小波与量子小波

（第二卷）

图像小波与小波应用

冉启文　冉　冉/著



科学出版社

（O-7648.31）

小波与量子小波

（第二卷）

图像小波与小波应用

www.sciencep.com



科学出版社互联网入口
科学数理分社：010-64019814
E-mail：lijingke@mail.sciencep.com
销售分类建议：高等数学



定 价：168.00元

小波与量子小波

(第二卷)

图像小波与小波应用

冉启文 冉 冉 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

《小波与量子小波》系统论述多尺度小波理论、线性调频小波理论和量子小波理论. 全书共十章, 分为三卷.

第一卷介绍小波简史与小波基础理论，由第 1—5 章构成.

第二卷介绍图像小波与小波应用，由第 6—8 章组成，核心内容包括张量积二维多分辨率分析理论、图像正交小波和正交小波包理论、图像金字塔理论、光场小波和光场小波包理论、光场金字塔理论、典型多分辨率分析实例、Daubechies 有限系数多分辨率分析理论、多分辨率时频分析理论体系、小波谱和小波包谱理论、时频局部化与小波包谱意义下的“测不准”原理、线性算子小波表示理论、恒分辨率小波理论和小波包理论、视觉计算理论与马尔小波理论、周期小波理论、周期小波级数理论与傅里叶级数理论的有趣对比.

第三卷介绍调频小波与量子小波, 由第 9 章和第 10 章以及包含 296 个练习题的四个习题集构成.

本书适合数学、统计学、物理学、力学、信息科学、生命科学和医学、计算机科学、化学、天文学、材料科学、能源科学、测绘科学、电子学、机械学、环境科学、林学、经济学和管理学等相关领域的研究人员和工程技术人员参考，也适合高等院校相关专业高年级本科生、研究生作为学习与研究小波的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

小波与量子小波. 第二卷, 图像小波与小波应用/冉启文, 冉冉著. —北京: 科学出版社, 2019.3

ISBN 978-7-03-060917-5

I. ①小… II. ①冉… ②冉… III. ①小波理论 IV. ①O174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 050960 号

责任编辑: 李静科 李 萍 / 责任校对: 严 娜

责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 3 月第 一 版 开本: 720×1000 B5

2019 年 3 月第一次印刷 印张: 25 1/2

字数: 514 000

定价: 168.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

献给我深爱的妻子

——冉启文

将此书献给我的母亲

因为她一直以来的支持与爱，这本书才得以完成

——冉　冉

前　言

小波的出现是历史的必然，也是科学思想发展的必然.

小波是什么？这个问题已经在很多文献中被提出而且给出了各自的回答，其中典型代表应该是20世纪90年代初法国数学家迈耶(Meyer Y)在《小波与算子》中和比利时数学家朵蓓琪丝(Daubechies I)在《小波十讲》中给出的回答. 经过从20世纪90年代初以来的二十多年快速发展以及对小波思想产生和发展历程的追溯，在“小波”名义下的各种研究无论是深度还是广度，都已经出现了十分显著的变化，重新“定义”小波正当其时.

《小波与量子小波》的小波包含丰富的逻辑内涵，体现为多尺度小波、线性调频小波和量子小波. 这样的小波具有将近两百年的历史渊源和传承，它是从20世纪80年代才得以真正兴起的深邃科学思想和方法，其产生、发展、完善和应用直接得益于数学、物理学、量子力学、计算机科学、信息科学、生物学和医学等领域众多科学家和工程师的卓越智慧和共同努力，小波的发展史淋漓尽致地展现出它是现代数学、现代物理学与现代科学技术研究交互推动的完美典范. 小波的思想简单、优美且普适，其数学理论是从一个或少数几个特别的函数出发，经过简单的“伸缩”和/或“平移”构造函数空间的规范正交基，其科学理念一脉相承于显微镜等的思想精华，以任意的伸缩倍数聚焦于研究对象的任意局部位置，获得任意层次相互独立的局部细节. 小波在科学界享有“数学显微镜”的美誉.

《小波与量子小波》系统论述多尺度小波理论、线性调频小波理论和量子小波理论. 全书由十章和四个习题集(共296个练习题)构成，分为相对独立的三卷，它们分别是《小波与量子小波(第一卷)：小波简史与小波基础理论》《小波与量子小波(第二卷)：图像小波与小波应用》和《小波与量子小波(第三卷)：调频小波与量子小波》. 本书是《小波与量子小波》的第二卷，它由全书的第6—8章组成，主要内容包括图像小波和小波包理论、多分辨率分析理论应用和多尺度小波理论典型应用三部分，这些研究内容本质上在不同层次上体现了多尺度小波思想和多分辨率分析思想的典型应用.

在图像小波理论与图像小波包理论中，形式上是研究二维多分辨率分析和二维形式的多尺度小波和小波包理论，实际上提供了通过张量积方法突破维数对多分辨率分析理论、小波理论和小波包理论的限制，同时，作为“多尺度小波理论和小波包理论”和“多分辨率分析方法”在“图像”研究中的应用，最终实现格式相同的多分辨率多尺度小波和小波包的连续理论方法和数值计算方法，最重要的是建立

“小波(光源)光场”和“小波包(光源)光场”的概念并将“光场”“物理图像”“数字图像”和“超级数字图像”等跨越光学理论和(数字)图像处理理论的研究对象进行完全统一的理论刻画. 通过引入超级数字图像的概念, 即图像任何像素处对应一个“二元函数”或者“普通图像”, 而不仅仅是普通图像在各个像素处的灰度数值, 那么, 当各个像素处的“二元函数”或者“普通图像”是脉冲函数或者δ-函数时, 超级数字图像的概念就包含了普通图像作为特例. 更重要的是, 如果各个像素处的“二元函数”或者“普通图像”被理解为算子的或者线性变换的核函数, 那么, 这种超级数字图像在每个像素处就对应于一个线性变换或者线性算子. 这时, 超级数字图像就是大量算子或者线性变换构成的算子族, 超级图像处理或者变换分析就相当于按照某种统一的模式, 比如, 图像小波或者图像小波包的模式同时分析处理一个算子族或者线性变换族中的所有算子或者线性变换. 这样, 超级数字图像的概念就能够统一表达连续物理图像、离散物理图像、(有限)数字图像和光场, 而且提供这些研究对象的几乎统一的小波分解合成、小波包分解合成、小波链分解合成和金字塔式分解合成理论. 这种表达方式和研究模式是本书的独特创新模式, 而且, 超级数字图像的概念本质上建立了包括传统意义的图像、算子(线性变换)以及算子族的小波理论和小波包理论以及金字塔理论的统一的理论框架. 实际上, 如果读者具备关于像脉冲函数或者δ-函数这样的广义函数或者“分布”的基本知识, 那么, 只要将此处超级数字图像各个像素处对应一个这样的“广义函数”或者“分布”, 就可以获得“广义函数族”或者“分布族”相对应的分布小波理论、分布小波链理论、分布小波包理论和分布金字塔理论以及相对应的分解合成算法理论. 这些研究成果为新颖的小波光场理论、小波光学理论、光信息处理理论和分布理论的建立奠定了宽广坚实的理论基础. 多分辨率分析小波理论的这个应用直接体现了小波思想推动光学和图像处理新理论体系的产生以及两者的融合和统一, 这样的示范应用启发相关领域研究人员在小波理念和基本理论模式基础上重新理解和刻画相应的学科以及某些相邻学科的融合统一.

在多分辨率分析理论应用研究中, 重点研究典型多分辨率分析, 特别是 Daubechies 紧支撑或者有限系数多分辨率分析理论, 比如, 正交的、共轭正交的多分辨率分析理论以及相应的紧支撑小波包理论, 应该说这些都是顺理成章、理所应当的典型研究内容. 但是, 本书更倾向于示范性地给出利用多分辨率分析思想突破某些著名的基本科学原理以及更深刻地突破这些基本科学原理赖以成立的相应的基本科学概念, 引导和启发研究人员重新思考、认识和升华一些基本的科学概念. 具体而言, 本书以小波和小波包的时频特性分析为出发点, 巧妙建立小波谱和小波包谱理论, 展现小波和小波包理论对时频分析局限性的根本突破, 特别是对测不准原理的最终表达形式以及赖以成立的基本概念“频率”的彻底否定, 从而为信号(函数)、图像、算子和分布(广义函数)的表达及处理, 提供新颖有效而且简单明了的理论方法和理论体系. 作者从未发现关于多分辨率分析的这种应用专题以及系统论述

类似文献，本书在这里的论述是精彩和引人入胜的.

小波理论的应用已经深入渗透到十分广泛的科学研究以及技术研究领域，将小波思想方法、小波包思想方法和多分辨率分析方法融入各种科学技术问题研究中，常常能够获得意想不到的理想效果，在本书第 7 章多分辨率分析理论应用研究中，借助研究“小波包和金字塔时频分析方法”的契机，对这个事实进行了充分的论述. 作为小波理论应用研究，本书第 8 章深入浅出、循序渐进地研究和阐述了小波理论和小波包理论的四类典型应用实例，即线性算子小波快速算法理论、恒分辨率小波理论和小波包理论及其算法理论、视觉计算理论与马尔小波理论、周期小波理论和周期小波级数理论及其与傅里叶级数理论的有趣对比.

关于线性算子小波表示问题，借助多分辨率分析小波和小波包理论系统地为线性空间提供具有各种性质的规范正交基或者共轭(双)正交基，借鉴“卷积算子”在傅里叶基下的对角化表现形式建立“卷积算子”快速算法的思路，启发性研究线性算子在小波基或者小波包基下的“拟对角形式”，从而获得这些线性算子的快速小波算法.

除此之外，为了满足离散采样信号或者数字图像在分解合成过程中始终保持恒定分辨率的要求，作为多分辨率分析小波理论和小波包理论的典型应用，本书利用多分辨率分析理论框架建立了恒分辨率小波理论和小波包理论及其算法理论. 恒分辨率小波理论本质上是一种冗余的多分辨率分析方法，这种利用多分辨率分析小波或者小波包获得函数或者信号冗余表达的方法，就是给出在各种不同尺度下获得的函数或者信号的统一尺度和分辨率表达公式，它与同维正交小波合成、同维正交小波包合成以及同维金字塔合成算法理论是不相同的，在离散采样的前提下，后者给出的是信号采样或者向量在线性空间平凡规范正交基下的表示方法，而恒分辨率的小波方法、小波包方法和金字塔方法能够按照相同的采样率和尺度获得在任意分解和合成步骤也就是多分辨率分析中任意尺度子空间和小波子空间中函数或者信号的冗余表达，保证在分解和合成过程中被处理的数字信号和数字图像的任何中间处理结果都具有完全相同的分辨率. 在视觉、听觉和各种传感器系统的信息分析和处理中，来自具有不同物理频率信息源的信息或者利用多种信息获取途径和方法得到的来自相同信息源的具有多种物理意义的信息数据需要关联处理或者统一融合时，恒分辨率小波理论将会提供十分便捷的信息分析处理方法和技术.

本书第 8 章的另一个研究重点是视觉计算理论和马尔小波理论，其中第一个核心问题是研究人工智能(视觉信息或者光信息)方法中信息表达和信息传输模式；第二个核心问题是研究在信息表达和信息传输过程中小波存在的客观性. 实际上，选择这个小波应用研究专题的更深刻的动机在于，这不仅是小波思想和理论产生的重要源泉，而且这个问题以及研究结果非常突出地表明，小波不仅仅是一种思维方法和抽象的数学和逻辑理论方法，同时也是人类视觉系统信息表达和传输功能的恰当描述，即小波是具有客观物理意义和生物学意义的. 由此可以相信这个成果对于研

究模拟人类智能活动的人工智能方法具有非常重要的示范效果和启迪意义.

周期小波和周期小波级数理论的出现是小波理论给予学术界的又一个意外和惊喜. 这部分内容将尝试说明即使在严格周期现象的研究中, 和被普遍认为研究周期现象“最有效的”傅里叶级数方法相比, 周期小波和周期小波级数仍然具有其独特的优势. 周期小波理论研究的核心问题是多分辨率分析的周期化, 利用由周期化多分辨率分析构造获得的周期小波, 按照正交级数方法获得的正交周期小波级数在研究周期现象时表现出了十分显著的优越性. 最意外的而且也是最令人吃惊的结果是, “满项的”小波级数(即大多数小波系数显著非零)代表了十分异常的函数(比如分形函数), 而“正常的”函数的小波级数却是“有洞的”或“缺项的”(即小波级数非零系数的分布是稀疏的). 回顾傅里叶级数理论可知, 大多数“正常的”函数的傅里叶级数是“满项的”, 而“缺项的”傅里叶级数代表着病态函数(比如魏尔斯特拉斯函数和黎曼函数等). 这似乎表明正交周期小波级数是对傅里叶级数的广泛的、强有力的升级: 周期小波级数分析是傅里叶级数的局部化的和多尺度的升级模式, 其突出的优越特征在于小波级数系数的显著取值直接地而且是集中地落在所研究函数、算子或者分布的奇异支撑集合上, 除此之外, 函数、算子或者分布是光滑的或者是无穷次可微的, 其小波级数系数可以忽略不计.

在撰写本书的过程中, 涉及到二维多分辨率分析理论、小波光场理论、图像和超级图像小波理论以及小波包理论的部分由冉冉主笔撰写, 其余内容由冉启文主笔撰写.

感谢已故洪家荣教授和冯英浚教授, 正是两位教授的支持与帮助坚定了第一作者在 20 世纪 90 年代选择多尺度小波与分数傅里叶变换(线性调频小波)相关关系的研究工作. 感谢舒文豪教授以及第二作者在哈尔滨工业大学学习期间的导师刘树田教授, 与他们的广泛讨论启迪作者研究并逐渐认识到多尺度小波与分数傅里叶变换(线性调频小波)的相似性.

感谢已故中国科学院院士马祖光教授、作为第一作者在博士后研究期间合作导师的王骐教授和马晶教授, 与三位教授的学术交流和学术讨论如沐春风、受益匪浅, 开启了第一作者系统构造线性调频小波和耦合调频小波的研究方向; 同时感谢马晶和谭立英夫妇, 与两位教授从 20 世纪 90 年代开始的友谊以及在光学、小波光学、分数傅里叶光学和卫星激光通信等领域的全面深入合作研究, 深度影响了《小波与量子小波》的写作风格, 特别是长期无私的讨论和争论形成的小波波前滤波思想和分数傅里叶光学调频域滤波思想, 深深影响了本书图像小波理论、小波光场理论和线性调频小波理论的论述风格.

感谢已故中国工程院院士张乃通教授, 他生前大力推动小波理论在通信理论和技术研究中的应用, 积极组织团队加强小波方法与超宽带无线通信方法和技术的融合、多尺度小波和线性调频小波方法与多域协同通信理论和方法的交叉联合研究, 在他生前的最后几年, 还特别鼓励和推荐第一作者将这些交叉融合研究成果撰写并

公开出版，虽然因为各种原因未能完成这些成果的独立出版，但其中部分成果已经融入本书的相关章节，希望对相关领域研究者和学生有所裨益，告慰辞世不久的张乃通院士.

感谢沙学军教授针对小波方法在通信理论和技术研究中应用的有益建议和无私讨论，特别是在基于加权分数傅里叶变换域的多分量多天线通信方法研究和异构网络协同信号处理理论与方法研究过程中深入的、全方位的交流和探索，启发第一作者在本书的撰写过程中重新考虑并采用更恰当的方式阐述多尺度小波理论和线性调频小波理论的某些问题.

感谢严质彬教授，第一作者和他三十多年的友谊一直伴随着小波、分形和混沌、随机过程和随机计算算法等理论的发展以及关于这些理论应用的长期、广泛而且深入的讨论和争论，受益良多，深刻影响着第一作者在《小波与量子小波》中对小波理论以及小波应用某些专题研究的理解和诠释.

除此之外，张海莹博士、赵辉博士、魏德运博士、杨中华博士、赵铁宇博士、袁琳博士、陈冰冰硕士和在读博士研究生王玲参与了部分文献资料的搜集整理工作，在“小波与科学”慕课课程建设过程中，张海莹博士、肖宇博士、杨占文博士、李莉博士和袁腊梅博士部分参与了将《小波与量子小波》中多尺度小波理论的部分内容转换成线上课程内容的工作，在此一并表示感谢.

《小波与量子小波》能够顺利出版，感谢哈尔滨工业大学研究生院和本科生院的资助和大力支持！特别感谢“973”计划课题“资源复用与抗干扰机理(2007CB310606)”和“异构网络协同信号处理理论与方法(2013CB329003)”的资助和大力支持！感谢国家自然科学基金项目“基于加权分数傅里叶变换域的多分量多天线通信方法(61671179)”的资助和大力支持！

最后，感谢吕春玲女士，不仅因为她对作者长期在工作、生活等多方面的关心和照顾，更因为她在《小波与量子小波》的成书过程中付出了大量的时间和精力，完成了十分繁重的相关资料整理、文字编辑排版以及巨量的数学公式和符号编排工作，同时，在将《小波与量子小波》的部分早期内容以“小波理论与应用”的课程名称在‘超星学术网’上公开授课过程中，以及在按照‘学堂在线’要求将《小波与量子小波》中多尺度小波理论的部分内容和习题转换、处理、编辑和整理成为在线慕课课程“小波与科学”的过程中，她完成了超出想象的大量繁琐复杂工作，深得相关网站工作人员的好评和赞赏. 作者再次感谢她，唯愿《小波与量子小波》的出版能够对相关领域科学技术研究人员和学生理解及应用小波有所助益，以此回馈和报答她的辛勤付出！

冉启文
2018 年 4 月于中国哈尔滨
冉　冉
2018 年 4 月于加拿大多伦多

目　　录

第二卷　图像小波与小波应用

第一卷　小波简史与小波基础理论

第三卷　调频小波与量子小波

第 6 章　图像小波与图像小波包理论

在多分辨率分析形式化小波构造理论体系下，利用尺度函数和一系列伸缩嵌套尺度子空间，能够建立相邻两个伸缩嵌套闭尺度子空间的正交直和分解关系，并给出这个正交直和分解中小波子空间整数平移规范正交基的构造和表达. 在一元函数的函数空间中，建立多分辨率分析小波基础上的小波链理论和小波包理论，为一元函数空间、尺度子空间、小波子空间、小波包子空间提供各种规范正交基，为一元函数或一元函数空间中的分布或算子表达提供非常便利的工具.

本章将在一元函数空间多分辨率分析基础上，利用张量积方法建立二元函数或图像的多分辨率分析小波理论、图像小波链理论、图像小波包理论和图像小波包金字塔理论，为了研究数字图像，本章还将建立数字图像的小波理论、小波链理论、小波包理论和小波包金字塔理论.

本章另一个重要内容是光场小波和光场小波包理论. 考虑到物理图像和数字图像的光场本质和光场描述，放弃用脉冲函数(δ-函数)刻画的“经典点光源”，把光场理论建立在各种尺度的“尺度光源”“小波光源”和“小波包光源”的基础上，构建光场小波理论、光场小波链理论、光场小波包理论和光场小波包金字塔理论，把物理图像处理、数字图像处理理解为“抽象的光场传播过程”，特别是物理图像处理和数字图像处理的小波变换、小波链变换、小波包变换以及小波包金字塔变换，各自都体现为一种特殊的小波光场传播方式. 这为光学和光通信提供一种“小波计算理论”和“小波包计算理论”，这样可以把光学和光场传播理解为一种计算和计算过程，而计算的理论基础就是小波理论和小波包理论，而完整的理论体系就是光场小波理论和光场小波包理论.

在本章图像小波理论和图像小波包理论研究过程中，物理图像小波理论和小波包理论最经常使用的两个希尔伯特空间分别是二元平方可积函数构成的线性空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})=\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 和平方可和的“行数”和“列数”均是无穷的矩阵构成的线性空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})=\ell^2(\mathbb{Z}^2)$，在这里把它们简单罗列以备用.

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})=\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)\\
&\qquad\qquad=\left\{f(x,y);\iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\left|f(x,y)\right|^2 dxdy<+\infty\right\}\\
&\left\langle f,g\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}=\iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)\overline{g}(x,y)dxdy
\end{aligned}
}
$$

$$\|f\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} = \langle f, f\rangle = \iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f(x,y)|^2\, dxdy$$

$$(f = g) \Leftrightarrow (f(x,y) = g(x,y),\ \text{a.e.},\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

$$\Leftrightarrow \iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f(x,y) - g(x,y)|^2\, dxdy = 0$$

二维小波和二维小波包是一维小波和一维小波包理论的自然延伸，研究对象是 $f(x,y)$，它是能量有限或者平方可积的二元函数或物理图像，它们全体构成的二元函数线性空间即为 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$.

在研究物理图像小波变换和小波包变换时，研究对象从物理图像 $f(x,y)$ 转换为“矩阵”，这种矩阵的“行数”和“列数”都是无限的，而与物理图像要求它是平方可积二元函数对等，要求这种“行数”和“列数”都是无限的矩阵必须是平方可和的矩阵，即其全部元素的模平方之和或者能量是有限实数. 这样的矩阵全体构成的线性空间就是 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = \ell^2(\mathbb{Z}^2)$.

$$\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = \ell^2(\mathbb{Z}^2)$$

$$= \left\{\mathbb{A} = (a_{r,s}); a_{r,s} \in \mathbb{C}, (r,s)\in\mathbb{Z}^2, \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}^2} |a_{r,s}|^2 < +\infty\right\}$$

$$\langle \mathbb{A}, \mathbb{B}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})} = \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}^2} a_{r,s} b^*_{r,s}$$

$$\langle \mathbb{A}, \mathbb{A}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})} = \|\mathbb{A}\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})} = \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}^2} |a_{r,s}|^2$$

在平方可和的二维无穷序列全体构成的矩阵空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中，其向量是行列无穷维矩阵形式的点 $\mathbb{A} = \{(a_{r,s}); a_{r,s}\in\mathbb{C}, (r,s)\in\mathbb{Z}^2\}$. 形象地说，$\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 中的点或向量是无穷维矩阵，无论是上下或左右都延伸到无穷远.

在建立数字图像小波理论和小波包理论过程中，将使用另一个希尔伯特空间，即 $M\times N$ 的复数矩阵全体构成的空间 $\mathbb{C}^{M\times N}$.

$$\mathbb{C}^{M\times N} = \{\mathbb{A} = (a_{r,s})_{M\times N}; a_{r,s}\in\mathbb{C},\ (r,s)\in\mathbb{Z}_{M\times N}\}$$

$$\langle \mathbb{A}, \mathbb{B}\rangle_{\mathbb{C}^{M\times N}} = \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}_{M\times N}} a_{r,s} b^*_{r,s}$$

$$\langle \mathbb{A}, \mathbb{A}\rangle_{\mathbb{C}^{M\times N}} = \|\mathbb{A}\|^2_{\mathbb{C}^{M\times N}} = \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}_{M\times N}} |a_{r,s}|^2$$

其中，$\mathbb{Z}_{M\times N} = \{(r,s); 0\leqslant r\leqslant M-1, 0\leqslant s\leqslant N-1\}$ 表示 $M\times N$ 个二元非负整数组构成的集合. 实际上，$M=N$ 是最经常使用的.

特别说明，在物理图像和数字图像二维小波理论以及二维小波包理论中，因为

分解和合成过程中大量出现涉及矩阵范数的恒等式，但出现在这些恒等式中的矩阵未必同维，所以在这里进行统一的说明，在这种情况下，矩阵范数都理解为行列数最大的矩阵范数，这个规定不影响数值运算．另外，在相关内容的阐述中，当出现不同维数的两个矩阵进行内积运算时，也理解为行列数共同最大数值的矩阵空间中的内积，不足的元素用 0 进行填充，保证进行内积运算时它们是同维的，这样的规定既不影响内积的数值，也不影响对正交性的判断．在一些特殊的公式和表达式中，为了强调维数的区别，在叙述中会特意标出相应的维数．

6.1　二维尺度函数和二维小波函数

这里将构造和研究二维多分辨率分析以及相应的二维小波构造和小波包构造，使用的方法是张量积，而张量积的基础是一维多分辨率分析、一维多分辨率分析小波和小波包．

6.1.1　二维多分辨率分析与小波

本小节实现从一维多分辨率分析和一维正交小波到二维多分辨率分析和二维正交小波的构造．

(α) 一维多分辨率分析与一维小波

如果$(\{V_J;J\in\mathbb{Z}\},\varphi(x))$是函数空间$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$上的一个多分辨率分析，即这个尺度子空间列与函数的组合满足如下五个要求：

❶ 单调性：$V_J\subseteq V_{J+1},J\in\mathbb{Z}$；

❷ 稠密性：$\overline{\left[\bigcup_{J\in\mathbb{Z}}V_J\right]}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$；

❸ 唯一性：$\bigcap_{J\in\mathbb{Z}}V_J=\{0\}$；

❹ 伸缩性：$f(x)\in V_J\Leftrightarrow f(2x)\in V_{J+1},J\in\mathbb{Z}$；

❺ 构造性：$\{\varphi(x-k);k\in\mathbb{Z}\}$构成$V_0$的规范正交基，

其中$\varphi(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$称为尺度函数，对于任意的整数$j\in\mathbb{Z}$，$V_j$称为第$j$级尺度子空间．定义空间$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$中的闭线性子空间列$\{W_j;j\in\mathbb{Z}\}$：对$\forall j\in\mathbb{Z}$，子空间$W_j$满足$W_j\perp V_j,V_{j+1}=W_j\oplus V_j$，其中，$W_j$称为(第$j$级)小波子空间．

根据多分辨率分析理论构造获得的正交小波函数是$\psi(x)\in W_0$．

① 小波子空间列 $\{W_j; j\in\mathbb{Z}\}$ 相互正交，而且伸缩依赖：

$$g(x)\in W_j \Leftrightarrow g(2x)\in W_{j+1},\quad W_j \perp W_\ell,\quad \forall j\neq \ell,\ (j,\ell)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

② 尺度空间列 $\{V_j; j\in\mathbb{Z}\}$ 和小波空间列 $\{W_j; j\in\mathbb{Z}\}$ 具有如下关系：

$$\begin{cases} m\geqslant j\Rightarrow W_m\perp V_j \\ m<j\Rightarrow W_m\subseteq V_j \end{cases}$$

③ 空间正交直和分解关系：对于 $j\in\mathbb{Z}, L\in\mathbb{N}$，

$$V_{j+L+1}=W_{j+L}\oplus W_{j+L-1}\oplus\cdots\oplus W_j\oplus V_j=\bigoplus_{k=0}^{+\infty}W_{j+L-k}$$

而且

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})=V_j\oplus\left(\bigoplus_{m=j}^{+\infty}W_m\right)=\bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty}W_m$$

④ 尺度方程和小波方程

$$\begin{cases} \varphi(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_n\varphi(2x-n) \\ \psi(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_n\varphi(2x-n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(\omega)=\mathrm{H}(0.5\omega)\Phi(0.5\omega) \\ \Psi(\omega)=\mathrm{G}(0.5\omega)\Phi(0.5\omega) \end{cases}$$

或者等价地：对于任意的整数 $j\in\mathbb{Z}$，

$$\begin{cases} \varphi_{j,k}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_{n-2k}\phi_{j+1,n}(x),k\in\mathbb{Z} \\ \psi_{j,k}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2k}\phi_{j+1,n}(x),k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(2^{-j}\omega)=\mathrm{H}(2^{-(j+1)}\omega)\Phi(2^{-(j+1)}\omega) \\ \Psi(2^{-j}\omega)=\mathrm{G}(2^{-(j+1)}\omega)\Phi(2^{-(j+1)}\omega) \end{cases}$$

其中低通和带通滤波器表示如下：

$$\mathrm{H}(\omega)=2^{-0.5}\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_n e^{-i\omega n},\qquad \mathrm{G}(\omega)=2^{-0.5}\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n e^{-i\omega n}$$

而且，低通系数和带通系数当 $n\in\mathbb{Z}$ 时表示为

$$h_n=\left\langle\varphi(\cdot),\sqrt{2}\varphi(2\cdot-n)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\sqrt{2}\int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x)\overline{\varphi}(2x-n)dx$$
$$g_n=\left\langle\psi(\cdot),\sqrt{2}\varphi(2\cdot-n)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\sqrt{2}\int_{x\in\mathbb{R}}\psi(x)\overline{\varphi}(2x-n)dx$$

同时满足 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left|h_n\right|^2=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left|g_n\right|^2=1$．而 $\Phi(\omega)$ 和 $\Psi(\omega)$ 分别是尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换.

⑤ 子空间的规范正交基

A. $\{\phi_{j,k}(x)=2^{j/2}\phi(2^j x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_j 的规范正交基;

B. $\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 是 W_j 的规范正交基;

C. $\{\phi_{j,k}(x),\psi_{j,k}(x);k\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_{j+1} 的规范正交基;

D. $\{\phi_{j+1,k}(x)=2^{(j+1)/2}\phi(2^{j+1}x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_{j+1} 的规范正交基;

E. $\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基.

⑥ 2×2 的构造矩阵:

$$\mathbf{M}(\omega)=\begin{pmatrix}\mathrm{H}(\omega) & \mathrm{H}(\omega+\pi)\\ \mathrm{G}(\omega) & \mathrm{G}(\omega+\pi)\end{pmatrix}$$

满足如下恒等式:

$$\mathbf{M}(\omega)\mathbf{M}^*(\omega)=\mathbf{M}^*(\omega)\mathbf{M}(\omega)=\mathbf{I}$$

或者等价地, 当 $\omega\in[0,2\pi]$ 时,

$$\begin{cases}\left|\mathrm{H}(\omega)\right|^2+\left|\mathrm{H}(\omega+\pi)\right|^2=1\\ \left|\mathrm{G}(\omega)\right|^2+\left|\mathrm{G}(\omega+\pi)\right|^2=1\\ \mathrm{H}(\omega)\overline{\mathrm{G}}(\omega)+\mathrm{H}(\omega+\pi)\overline{\mathrm{G}}(\omega+\pi)=0\end{cases}$$

或者等价地, 对于任意的 $(m,k)\in\mathbb{Z}^2$,

$$\begin{cases}\left\langle \mathbf{h}_0^{(2m)},\mathbf{h}_0^{(2k)}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_{n-2m}\overline{h}_{n-2k}=\delta(m-k)\\ \left\langle \mathbf{h}_1^{(2m)},\mathbf{h}_1^{(2k)}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2m}\overline{g}_{n-2k}=\delta(m-k)\\ \left\langle \mathbf{h}_1^{(2m)},\mathbf{h}_0^{(2k)}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2m}\overline{h}_{n-2k}=0\end{cases}$$

其中, $\mathbf{h}_0^{(m)}=\{h_{n-m};n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\in\ell^2(\mathbb{Z}),\mathbf{h}_1^{(m)}=\{g_{n-m};n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\in\ell^2(\mathbb{Z}),m\in\mathbb{Z}$. 换言之, $\{\mathbf{h}_0^{(2m)};m\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{\mathbf{h}_1^{(2m)};m\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中相互正交的两个偶数平移平方可和无穷维规范正交向量系, 而且, 它们共同构成 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的规范正交基.

(β) 二维多分辨率分析与二维小波

现在构造二维多分辨分析. 为此, 首先定义二维函数:

$$Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)$$

和二元能量有限或平方可积函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的闭子空间序列：

$$\mathbb{Q}_j^{(0)} = V_j \otimes V_j, \quad j \in \mathbb{Z}$$

定理 6.1 (二维多分辨率分析) $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j \in \mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y))$ 构成 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析，即满足如下五个公理：

① 单调性：$\mathbb{Q}_j^{(0)} \subset \mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}, \forall j \in \mathbb{Z}$；

② 唯一性：$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_j^{(0)} = \{0\}$；

③ 稠密性：$\overline{\left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_j^{(0)}\right)} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$；

④ 伸缩性：$f(x,y) \in \mathbb{Q}_j^{(0)} \Leftrightarrow f(2x,2y) \in \mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}, \forall j \in \mathbb{Z}$；

⑤ 构造性：$\{Q^{(0)}(x-m,y-n) = \varphi(x-m)\varphi(y-n); (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$ 构成子空间 $\mathbb{Q}_0^{(0)}$ 的规范正交基.

其中 $Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$ 是二维尺度函数，第 j 级尺度空间是

$$\mathbb{Q}_j^{(0)} = \text{Closespan}\{Q_{j;m,n}^{(0)}(x,y) = 2^j Q^{(0)}(2^j x - m, 2^j y - n); (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$$

证明 利用一维多分辨率分析的性质和张量积方法的特点，可以在二维平方可积函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ 中逐条验证 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j \in \mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y))$ 满足上述五个公理.

首先，当 $f(x,y) \in \mathbb{Q}_j^{(0)} = V_j \otimes V_j$ 时，按照定义，存在 $\xi(x) \in V_j, \zeta(y) \in V_j$，保证 $f(x,y) = \xi(x)\zeta(y)$，由一元多分辨率分析可知，$\xi(x) \in V_{j+1}, \zeta(y) \in V_{j+1}$，从而，利用 $\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)} = V_{j+1} \otimes V_{j+1}$ 的定义得到

$$\xi(x)\zeta(y) = f(x,y) \in V_{j+1} \otimes V_{j+1} = \mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}$$

这样，单调性①得到证明.

其次，对于任意的二元函数 $f(x,y) = \xi(x)\zeta(y) \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_j^{(0)}$，以及对于任意的整数 $j \in \mathbb{Z}$，必有 $\xi(x) \in V_j, \zeta(y) \in V_j$，从而，$\xi(x) \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j, \zeta(y) \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j$，根据一维多分辨率分析满足的唯一性公理 $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ 可得 $\xi(x) = \zeta(y) = 0$，于是 $f(x,y) = \xi(x)\zeta(y) = 0$. 由 $f(x,y) = \xi(x)\zeta(y) \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_j^{(0)}$ 的任意性得到二维多分辨率分析的唯一

性 $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_j^{(0)}=\{0\}$.

其余各个公理的验证留给读者作为练习，这里只给出必要的提示. 关于稠密性证明的提示是，利用如下公式：

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)=\text{Closespan}\{f(x,y)=\xi(x)\zeta(y);\xi(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}),\zeta(y)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})\}$$

并证明如下包含关系：

$$\{\xi(x)\zeta(y);\xi(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}),\zeta(y)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})\}\subseteq\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_j^{(0)}$$

如是证明稠密性.

直接按照定义证明伸缩性. 关于构造性的证明，先利用内积定义直接演算验证函数系：

$$\{Q^{(0)}(x-m,y-n)=\varphi(x-m)\varphi(y-n);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ 中的规范正交系，即满足如下内积演算公式：

$$\left\langle Q^{(0)}(x-m,y-n),Q^{(0)}(x-u,y-v)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}=\delta(m-u)\delta(n-v)$$

其中 $(m,u,n,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. 此外，对于任意的 $f(x,y)=\xi(x)\zeta(y)\in\mathbb{Q}_0^{(0)}$，必成立如下的正交尺度函数级数表达式：

$$\xi(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\alpha_m\varphi(x-m),\qquad\zeta(y)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\beta_n\varphi(x-n)$$

其中

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\alpha_m\right|^2<+\infty,\qquad\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\beta_n\right|^2<+\infty$$

验证这时必成立如下的二维尺度函数级数表达式：

$$f(x,y)=\xi(x)\zeta(y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}}\gamma_{m,n}Q^{(0)}(x-m,y-n)$$

而且

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}}\left|\gamma_{m,n}\right|^2<+\infty$$

如是即可证得规范正交系 $\{Q^{(0)}(x-m,y-n);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$ 是 $\mathbb{Q}_0^{(0)}$ 的基，从而它是 $\mathbb{Q}_0^{(0)}$ 的规范正交基. 建议读者补充必要的细节，完成这个定理的完整证明.

(γ) 尺度子空间的正交直和分解

在多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j \in \mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y))$ 的体系下，构造性定义三个函数子空间：

$$\mathbb{Q}_j^{(1)} = (V_j \otimes W_j), \quad \mathbb{Q}_j^{(2)} = (W_j \otimes V_j), \quad \mathbb{Q}_j^{(3)} = (W_j \otimes W_j)$$

这样定义的三个二元函数子空间序列 $\{\mathbb{Q}_j^{(\ell)}; j \in \mathbb{Z}\}, \ell = 1,2,3$ 称为二元函数正交小波子空间序列，而 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}, \ell = 1,2,3$ 称为第 j 级小波空间.

定理 6.2 (二维小波子空间列)　设 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j \in \mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y))$ 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析，那么，对于任意的 $j \in \mathbb{Z}$，尺度子空间 $\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}$ 存在如下正交直和分解表达式：

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)} &= V_{j+1} \otimes V_{j+1} \\
&= (V_j \oplus W_j) \otimes (V_j \oplus W_j) \\
&= (V_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j) \\
&= \mathbb{Q}_j^{(0)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(3)}
\end{aligned}$$

而且，二元函数的子空间序列 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}, \ell = 0,1,2,3, j \in \mathbb{Z}$ 具有如下性质：

① 相互正交：$\mathbb{Q}_j^{(\ell)} \perp \mathbb{Q}_{\tilde{j}}^{(\tilde{\ell})}, (j,\ell) \neq (\tilde{j},\tilde{\ell}), 1 \leqslant \ell, \tilde{\ell} \leqslant 3, (j,\tilde{j}) \in \mathbb{Z}^2$；

② 条件正交：$\mathbb{Q}_j^{(\ell)} \perp \mathbb{Q}_{\tilde{j}}^{(0)}, \ell = 1,2,3, j \geqslant \tilde{j}, (j,\tilde{j}) \in \mathbb{Z}^2$；

③ 条件包含：$\mathbb{Q}_j^{(\ell)} \subset \mathbb{Q}_{\tilde{j}}^{(0)}, \ell = 1,2,3, j < \tilde{j}, (j,\tilde{j}) \in \mathbb{Z}^2$；

④ 伸缩关系：$g(x,y) \in \mathbb{Q}_j^{(\ell)} \Leftrightarrow g(2x,2y) \in \mathbb{Q}_{j+1}^{(\ell)}, \ell = 1,2,3, \forall j \in \mathbb{Z}$；

⑤ 构造性：定义如下三个二元函数

$$\begin{cases}
Q^{(1)}(x,y) = \varphi(x)\psi(y) \\
Q^{(2)}(x,y) = \psi(x)\varphi(y) \\
Q^{(3)}(x,y) = \psi(x)\psi(y)
\end{cases}$$

它们的整数平移函数系是规范正交二元函数系且相互正交，分别构成第 0 级小波子空间 $\mathbb{Q}_0^{(\ell)}, \ell = 1,2,3$ 的规范正交二元函数基，这时，二维正交小波函数是如下的三个函数：

$$\begin{aligned}
Q^{(1)}(x,y) &= \varphi(x)\psi(y) \\
Q^{(2)}(x,y) &= \psi(x)\varphi(y) \\
Q^{(3)}(x,y) &= \psi(x)\psi(y)
\end{aligned}$$

具有如下张成关系：

$$\mathbb{Q}_0^{(\ell)} = \text{Closespan}\{Q_0^{(\ell)}(x-m, y-n); (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}, \quad \ell = 1,2,3$$

证明　建议读者完成这个证明.

(δ) 二维尺度方程和小波方程

定理 6.3 (尺度方程和小波方程)　设 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j \in \mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y))$ 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析, 对任意的 $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, 引入序列记号：

$$\begin{cases} h^{(0)}(m,n) = h_m h_n \\ h^{(1)}(m,n) = h_m g_n \\ h^{(2)}(m,n) = g_m h_n \\ h^{(3)}(m,n) = g_m g_n \end{cases}$$

其中, $g_n = (-1)^{2\kappa+1-n}\overline{h}_{2\kappa+1-n}, n \in \mathbb{Z}, \ \kappa \in \mathbb{Z}$. 那么, 成立如下的被称为二维多分辨分析尺度方程和小波方程的函数方程组：

$$\begin{cases} Q^{(0)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(0)}(m,n) Q_{1;m,n}^{(0)}(x,y) \\ Q^{(1)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(1)}(m,n) Q_{1;m,n}^{(0)}(x,y) \\ Q^{(2)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(2)}(m,n) Q_{1;m,n}^{(0)}(x,y) \\ Q^{(3)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(3)}(m,n) Q_{1;m,n}^{(0)}(x,y) \end{cases}$$

其中第一个方程就是尺度方程, 后面的三个方程就是小波方程. 或综合表示为

$$Q^{(\ell)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\ell)}(m,n) Q_{1;m,n}^{(0)}(x,y), \quad \ell = 0,1,2,3$$

而且, 第 j 级的三个小波空间可以被表示为

$$\mathbb{Q}_j^{(\ell)} = \text{Closespan}\{Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y); (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}, \quad \ell = 1,2,3$$

其中

$$\{Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y) = 2^j Q^{(\ell)}(2^j x - m, 2^j y - n); (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}, \quad \ell = 1,2,3$$

是空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的规范正交二元函数系.

证明　利用一元函数空间的多分辨率分析的尺度方程和小波方程：

$$\begin{cases}\varphi(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_n\varphi(2x-n)\\ \psi(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_n\varphi(2x-n)\end{cases}$$

直接得到

$$\begin{cases}Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)=\left[\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}h_m\cdot\sqrt{2}\varphi(2x-m)\right]\left[\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_n\cdot\sqrt{2}\varphi(2y-n)\right]\\ Q^{(1)}(x,y)=\varphi(x)\psi(y)=\left[\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}h_m\cdot\sqrt{2}\varphi(2x-m)\right]\left[\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_n\cdot\sqrt{2}\varphi(2y-n)\right]\\ Q^{(2)}(x,y)=\psi(x)\varphi(y)=\left[\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}g_m\cdot\sqrt{2}\varphi(2x-m)\right]\left[\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_n\cdot\sqrt{2}\varphi(2y-n)\right]\\ Q^{(3)}(x,y)=\psi(x)\psi(y)=\left[\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}g_m\cdot\sqrt{2}\varphi(2x-m)\right]\left[\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_n\cdot\sqrt{2}\varphi(2y-n)\right]\end{cases}$$

继续演算可得到二维尺度方程和小波方程. 建议读者完成其余部分的证明.

6.1.2 二维函数子空间的分解

在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 可以建立二元函数尺度子空间 $\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}$ 和整个函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的混合正交直和分解以及小波子空间列正交直和分解, 同时获得这些函数子空间的各种整数平移规范正交尺度函数基和小波函数基, 据此进一步得到整个函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的混合尺度函数和小波函数的混合规范正交基, 以及只由小波函数产生的规范正交小波函数基.

(α) 尺度子空间的混合正交直和分解

定理 6.4 (尺度子空间的混合正交直和分解) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 对任意的 $j\in\mathbb{Z},J\in\mathbb{N}$, 尺度子空间 $\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}$ 存在如下的混合正交直和分解表达式:

$$\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}=\mathbb{Q}_{j-J}^{(0)}\oplus\left\{\bigoplus_{u=0}^{J}\left[\mathbb{Q}_{j-u}^{(1)}\oplus\mathbb{Q}_{j-u}^{(2)}\oplus\mathbb{Q}_{j-u}^{(3)}\right]\right\}$$

证明 根据定理 6.2 可得如下演算:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)} &= \mathbb{Q}_j^{(0)} \oplus \left[\mathbb{Q}_j^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(3)}\right] \\ &= \mathbb{Q}_{j-1}^{(0)} \oplus \left[\mathbb{Q}_{j-1}^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_{j-1}^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_{j-1}^{(3)}\right] \oplus \left[\mathbb{Q}_j^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(3)}\right] \\ &\vdots \\ &= \mathbb{Q}_{j-J}^{(0)} \oplus \left[\mathbb{Q}_{j-J}^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_{j-J}^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_{j-J}^{(3)}\right] \oplus \cdots \oplus \left[\mathbb{Q}_j^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(3)}\right] \\ &= \mathbb{Q}_{j-J}^{(0)} \oplus \left\{\bigoplus_{u=0}^{J}\left[\mathbb{Q}_{j-u}^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(3)}\right]\right\}\end{aligned}$$

这个演算过程就是多次重复使用定理 6.2 的过程. 完成证明.

(β) 尺度子空间的完全正交直和分解

定理 6.5 (尺度子空间的完全正交直和分解)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 对任意的 $j\in\mathbb{Z}$, 尺度子空间 $\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}$ 存在如下的完全正交直和分解表达式:

$$\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)} = \left\{\bigoplus_{u=0}^{+\infty}\left[\mathbb{Q}_{j-u}^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(3)}\right]\right\}$$

证明　根据定理 6.2 的条件包含关系:

$$\mathbb{Q}_j^{(\ell)} \subset \mathbb{Q}_{\tilde{j}}^{(0)},\quad \ell=1,2,3,\quad j<\tilde{j},\quad (j,\tilde{j})\in\mathbb{Z}^2$$

和定理 6.4 可知

$$\left\{\bigoplus_{u=0}^{+\infty}\left[\mathbb{Q}_{j-u}^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(3)}\right]\right\} \subseteq \mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}$$

如果能够证明如下的相反包含关系, 即可完成证明:

$$\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)} \subseteq \left\{\bigoplus_{u=0}^{+\infty}\left[\mathbb{Q}_{j-u}^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(3)}\right]\right\}$$

即 $\forall f(x,y)\in\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}$, 存在 $\{f_{j-u}^{(\ell)}(x,y); u=0,1,\cdots,+\infty\}, \ell=1,2,3$ 这样三个相互正交的函数序列满足如下要求:

$$f_{j-u}^{(\ell)}(x,y)\in\mathbb{Q}_{j-u}^{(\ell)},\quad \ell=1,2,3,\quad u=0,1,\cdots,+\infty$$

而且

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{3} f_{j-u}^{(\ell)}(x,y)$$

把构造函数序列 $\{f_{j-u}^{(\ell)}(x,y); u=0,1,\cdots,+\infty\}, \ell=1,2,3$ 的工作留给读者作为练习.

建议读者完成全部证明.

(γ) 函数空间的混合正交直和分解

定理 6.6 (函数空间的混合正交直和分解)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 对任意的 $j\in\mathbb{Z}$, 函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 存在如下的混合正交直和分解表达式:

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)=\mathbb{Q}_j^{(0)}\oplus\left\{\bigoplus_{u=0}^{+\infty}\left[\mathbb{Q}_{j+u}^{(1)}\oplus\mathbb{Q}_{j+u}^{(2)}\oplus\mathbb{Q}_{j+u}^{(3)}\right]\right\}$$

即 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 可以被分解为半无穷的相互正交闭线性子空间序列的正交直和.

证明　建议读者完成这个证明.

提示: 利用多分辨率分析的稠密性公理.

(δ) 函数空间的完全正交直和分解

定理 6.7 (函数空间的完全正交直和分解)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 对任意的 $j\in\mathbb{Z}$, 函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 存在如下的完全正交直和分解表达式:

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)=\bigoplus_{u=-\infty}^{+\infty}\left[\mathbb{Q}_u^{(1)}\oplus\mathbb{Q}_u^{(2)}\oplus\mathbb{Q}_u^{(3)}\right]$$

即 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 可以被分解为相互正交小波子空间序列的正交直和.

证明　利用定理 6.6 和定理 6.5 可以完成这个证明. 建议读者给出这个定理的完整证明.

6.1.3　二维函数子空间的规范正交基

在二维函数尺度子空间的混合正交直和分解以及完全正交直和分解理论、函数空间的混合正交直和分解以及完全正交直和分解理论基础上, 利用各个尺度子空间和小波子空间的整数平移规范正交基, 可以给出尺度子空间和整个函数空间的混合尺度-小波规范正交基和完全小波规范正交基.

(α) 尺度方程和小波方程组

定理 6.8 (尺度方程和小波方程组)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 如下表示的尺度函数和小波函数的伸缩

平移函数系：

$$\left\{Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y)=2^jQ^{(\ell)}(2^jx-m,2^jy-n);\ (j,n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ell=1,2,3\right\}$$

是规范正交函数系，而且，在如下的函数系中

$$\left\{Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y)=2^jQ^{(\ell)}(2^jx-m,2^jy-n);\ (j,n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ell=0,1,2,3\right\}$$

存在如下的尺度方程和小波方程依赖关系：当 $(v,w)\in\mathbb{Z}^2$ 时，

$$\begin{cases}Q_{j;v,w}^{(0)}(x,y)=\sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(0)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y)\\ Q_{j;v,w}^{(1)}(x,y)=\sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(1)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y)\\ Q_{j;v,w}^{(2)}(x,y)=\sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(2)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y)\\ Q_{j;v,w}^{(3)}(x,y)=\sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(3)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y)\end{cases}$$

或者综合表示为

$$Q_{j;v,w}^{(\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y),\quad (v,w)\in\mathbb{Z}^2,\quad \ell=0,1,2,3$$

证明　根据定理 6.3 并引入尺度伸缩因子即可完成证明，建议读者写出完整的证明过程.

(β) 尺度子空间的两类规范正交基

定理 6.9 (尺度子空间的规范正交基)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，尺度子空间序列 $\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}$ 具有如下的两类规范正交基：

第一类：尺度-小波混合规范正交基

$$\left\{Q_{j-J;m,n}^{(0)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\right\}\cup\left[\bigcup_{u=0}^{J}\bigcup_{\ell=1}^{3}\{Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}\right]$$

第二类：完全小波规范正交基

$$\bigcup_{u=0}^{+\infty}\bigcup_{\ell=1}^{3}\{Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

由此得到如下的子空间张成关系：

$$\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)} = \text{Closespan}\{Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},u\in\mathbb{N},\ell=1,2,3\}$$
$$= \text{Closespan}\left\{\begin{matrix} Q_{j-J;m,n}^{(0)}(x,y),Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \\ u=0,1,\cdots,J,\ell=1,2,3\end{matrix}\right\}$$

证明　因为尺度子空间和小波子空间都存在由单一函数的伸缩平移产生的规范正交基，而且成立如下的张成关系：第 j 级尺度子空间可以被表示为

$$\mathbb{Q}_j^{(0)} = \text{Closespan}\{Q_{j;m,n}^{(0)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

第 j 级的三个小波子空间可以被表示为

$$\mathbb{Q}_j^{(\ell)} = \text{Closespan}\{Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\},\quad \ell=1,2,3$$

其中

$$Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y) = 2^j Q^{(\ell)}(2^j x-m,2^j y-n),\quad (m,n)\in\mathbb{Z}^2,\quad \ell=0,1,2,3$$

这样，利用尺度子空间的混合正交直和分解和完全小波子空间正交直和分解公式分别可以得到

$$\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)} = \mathbb{Q}_{j-J}^{(0)} \oplus \left\{\bigoplus_{u=0}^{J}\left[\mathbb{Q}_{j-u}^{(1)}\oplus\mathbb{Q}_{j-u}^{(2)}\oplus\mathbb{Q}_{j-u}^{(3)}\right]\right\}$$
$$= \left\{\bigoplus_{u=0}^{+\infty}\left[\mathbb{Q}_{j-u}^{(1)}\oplus\mathbb{Q}_{j-u}^{(2)}\oplus\mathbb{Q}_{j-u}^{(3)}\right]\right\}$$

于是，利用尺度子空间和小波子空间的由单一函数的伸缩平移产生的规范正交基得到尺度子空间的混合规范正交基和完全小波规范正交基：

$$\{Q_{j-J;m,n}^{(0)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}\cup\left[\bigcup_{u=0}^{J}\bigcup_{\ell=1}^{3}\{Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}\right]$$

而且

$$\bigcup_{u=0}^{+\infty}\bigcup_{\ell=1}^{3}\{Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

同时

$$\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)} = \text{Closespan}\{Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},u\in\mathbb{N},\ell=1,2,3\}$$
$$= \text{Closespan}\left\{\begin{matrix} Q_{j-J;m,n}^{(0)}(x,y),Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \\ u=0,1,\cdots,J,\ell=1,2,3\end{matrix}\right\}$$

这样完成了定理的证明.

(γ) 函数空间的两类规范正交基

定理 6.10 (函数空间的规范正交基)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 具有如下的两类规范正交基:

第一类: 尺度-小波混合规范正交基, 对任意的 $j\in\mathbb{Z}$,

$$\{Q_{j;m,n}^{(0)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}\cup\left[\bigcup_{u=0}^{+\infty}\bigcup_{\ell=1}^{3}\{Q_{j+u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}\right]$$

第二类: 完全小波规范正交基

$$\bigcup_{u=-\infty}^{+\infty}\bigcup_{\ell=1}^{3}\{Q_{u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

由此得到如下的空间张成关系: 对任意的 $j\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)&=\text{Closespan}\{Q_{u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},u\in\mathbb{Z},\ell=1,2,3\}\\&=\text{Closespan}\left\{\begin{matrix}Q_{j;m,n}^{(0)}(x,y),Q_{j+u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\\ u=0,1,\cdots,\ell=1,2,3\end{matrix}\right\}\end{aligned}$$

证明　利用函数空间的混合正交直和分解和完全小波子空间正交直和分解:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)&=\mathbb{Q}_j^{(0)}\oplus\left\{\bigoplus_{u=0}^{+\infty}\left[\mathbb{Q}_{j+u}^{(1)}\oplus\mathbb{Q}_{j+u}^{(2)}\oplus\mathbb{Q}_{j+u}^{(3)}\right]\right\}\\&=\bigoplus_{u=-\infty}^{+\infty}\left[\mathbb{Q}_u^{(1)}\oplus\mathbb{Q}_u^{(2)}\oplus\mathbb{Q}_u^{(3)}\right]\end{aligned}$$

结合定理 6.9 关于尺度子空间两类规范正交基以及张成关系即可得到这个定理的证明, 建议读者写出这个证明的详细过程.

6.2　二维小波包理论

在二维多分辨率分析理论基础上, 尺度子空间序列和函数空间都具有两类正交直和分解公式, 并据此可以获得这些子空间和整个函数空间的两类规范正交基, 这些工作为尺度子空间以及函数空间的构造和表达提供了便利. 此外, 这些规范正交基的简单代数构造为函数、分布和算子的正交级数表达和性质研究开辟了新途径. 在这个理论体系中, 未涉及关于小波子空间更精细结构的研究, 同时, 小波子空间中函数或者函数空间中任何函数在小波子空间中的正交投影只可能被“最精细地”表示为正交小波函数级数, 而这些函数在介乎于整个小波子空间上的整体性质与正交小波函数基上投影性质之间的“局部整体性质”, 将无法得到体现和研究. 这类

问题的解决取决于小波子空间列的正交直和分解理论的建立, 这就是本节将要研究的问题. 关于这些问题的一维形式以及进一步探索, 可以参考成礼智等(2004), 迈耶(1992), 迈耶和科伊夫曼(1995), Coifman 和 Wickerkauser(1992), Daubechies(1988, 1990, 1992), Madlat 和 Hwang(1992), Meyer (1990), Meyer 和 Ryan (1993), Wickerhauser(1992)的研究成果.

6.2.1 二维小波包定义及性质

这里将给出二维小波包函数的定义, 研究小波包函数序列的性质, 利用小波包函数序列的伸缩和平移构造小波包函数规范正交系, 建立小波子空间列的正交直和分解, 并为这些正交直和分解产生的小波包子空间构造相应的单一小波包函数整数平移规范正交基和混合多尺度联合小波包规范正交基, 最终为尺度子空间、小波子空间和整个函数空间提供以小波包函数为基础的尺度伸缩平移、多小波包级别混合的规范正交基族. 这个理论的思想和方法完全突破了此前研究函数空间结构和函数分解以及函数级数表达的任何理论体系, 为函数空间、函数子空间、函数表达、分布和算子表达铸就了崭新的方式和理论体系.

(α) 二维小波包函数

二维小波包函数定义 设 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y))$ 是二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的一个多分辨分析, 定义二维函数序列如下: 当 $(v,w)\in\mathbb{Z}^2$ 时,

$$
\begin{cases}
Q_{j;v,w}^{(4p+0)}(x,y) = \displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(0)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\\
Q_{j;v,w}^{(4p+1)}(x,y) = \displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(1)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\\
Q_{j;v,w}^{(4p+2)}(x,y) = \displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(2)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\\
Q_{j;v,w}^{(4p+3)}(x,y) = \displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(3)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)
\end{cases}
$$

或者综合表示为

$$
Q_{j;v,w}^{(4p+\ell)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y),
$$
$$
(v,w)\in\mathbb{Z}^2,\quad \ell=0,1,2,3,\quad p=0,1,2,3,\cdots
$$

其中

$$
Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y) = 2^jQ^{(p)}(2^jx-m,2^jy-n),\quad p=0,1,2,3,\cdots
$$

把这样定义的二元函数系 $\{Q^{(p)}(x,y), p=0,1,2,3,\cdots\}$ 称为小波包函数系.

注释: 在二维小波包函数系的定义中, 每次都是从一个尺度为 $s=2^{-(j+1)}$ 的小

波包级别为 p 的小波包函数 $Q^{(p)}(x,y)$ 的整数平移函数系：

$$\{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)=2^{j+1}Q^{(p)}(2^{j+1}x-m,2^{j+1}y-n);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

按照完全一样的结构产生四个小波包函数 $Q^{(4p+\ell)}(x,y),\ell=0,1,2,3$，在这个过程中，尺度倍增为 $s=2^{-j}$，小波包级别增长为 $4p+0,4p+1,4p+2,4p+3$，在这样的模式下，得到的每个小波包函数整数平移构成一个规范正交函数系. 总之，小波包函数序列本质上体现的是，从一个整数平移规范正交函数系产生四个整数平移函数系的过程，尺度倍增，小波包级别 4 倍增而且扩展填满一个周期为 4 的连续周期：$4p+0,4p+1,4p+2,4p+3$. 其中涉及的各个结果将陆续得到证明.

(β) 二维小波包整数平移正交性

定理 6.11 (小波包函数整数平移正交性)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照上述方式定义的二维小波包函数系 $\{Q^{(p)}(x,y),p=0,1,2,3,\cdots\}$ 具有如下规范正交性(包内正交性)：

$$\{Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y)=2^jQ^{(p)}(2^jx-m,2^jy-n);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

是规范正交函数系，其中 j 是任意整数，或者等价表示为

$$\left\langle Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y),Q_{j;u,v}^{(p)}(x,y)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}=\delta(m-u)\delta(n-v)$$

其中，$(j,m,n,u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，$p=0,1,2,3,\cdots$.

证明　直接演算即可完成证明. 预先进行如下演算：

$$\begin{aligned}
&\left\langle Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y),Q_{j;u,v}^{(p)}(x,y)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}\\
&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y)\overline{Q}_{j;u,v}^{(p)}(x,y)dxdy\\
&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}2^jQ^{(p)}(2^jx-m,2^jy-n)2^j\overline{Q}^{(p)}(2^jx-u,2^jy-v)dxdy\\
&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}Q^{(p)}(x-m,y-n)\overline{Q}^{(p)}(x-u,y-v)dxdy\\
&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}Q^{(p)}(x-(m-u),y-(n-v))\overline{Q}^{(p)}(x,y)dxdy
\end{aligned}$$

现在用第 II 型数学归纳法进行证明. 首先，验证当 $p=0,1,2,3$ 时，定理的结论是正确的. 具体验证 $p=0$：

$$\begin{aligned}
Q^{(p)}(x,y)&=Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)\\
Q^{(p)}(x-(m-u),y-(n-v))&=Q^{(0)}(x-(m-u),y-(n-v))\\
&=\varphi(x-(m-u))\varphi(y-(n-v))
\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}&\left\langle Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y),Q_{j;u,v}^{(p)}(x,y)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}\\&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\varphi(x-(m-u))\varphi(y-(n-v))\overline{\varphi}(x)\overline{\varphi}(y)dxdy\\&=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x-(m-u))\overline{\varphi}(x)dx\int_{\mathbb{R}}\varphi(y-(n-v))\overline{\varphi}(y)dy\\&=\delta(m-u)\delta(n-v)\end{aligned}$$

这说明此时定理的结论成立. 当 $p=1,2,3$ 时, 建议读者完成验算.

其次, 假设当 $4^{\xi}\leqslant p<4^{\xi+1}$ 时定理的结论成立, 推证当 $4^{\xi+1}\leqslant p<4^{\xi+2}$ 时定理的结论仍成立. 令 $\ell=\mathrm{mod}(p,4)$, 而且,

$$q=\frac{p-\mathrm{mod}(p,4)}{4}$$

那么, $\ell=\mathrm{mod}(p,4)\in\{0,1,2,3\}$, $4^{\xi}\leqslant q<4^{\xi+1}$, 而且, $p=4q+\ell$, 于是利用二维小波包函数系的定义公式, 如下演算成立:

$$\begin{aligned}&\left\langle Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y),Q_{j;u,v}^{(p)}(x,y)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}\\&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}Q^{(4q+\ell)}(x-(m-u),y-(n-v))\overline{Q}^{(4q+\ell)}(x,y)dxdy\\&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\left[\sum_{(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(\ell)}(s-2(m-u),t-2(n-v))Q_{1;s,t}^{(q)}(x,y)\right]\\&\quad\times\left[\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(\ell)}(a,b)Q_{1;a,b}^{(q)}(x,y)\right]^*dxdy\\&=\sum_{(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(\ell)}(s-2(m-u),t-2(n-v))\overline{h}^{(\ell)}(a,b)\\&\quad\times\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}Q_{1;s,t}^{(q)}(x,y)\overline{Q}_{1;a,b}^{(q)}(x,y)dxdy\end{aligned}$$

因为 $4^{\xi}\leqslant q<4^{\xi+1}$, 所以根据归纳假设可知, $\{Q_{1;s,t}^{(q)}(x,y);(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 即小波包函数 $Q^{(q)}(x,y)$ 的伸缩平移系是规范正交函数系, 从而

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}Q_{1;s,t}^{(q)}(x,y)\overline{Q}_{1;a,b}^{(q)}(x,y)dxdy=\delta(s-a)\delta(t-b)$$

这样, 内积演算可以继续简化为

$$\begin{aligned}&\left\langle Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y),Q_{j;u,v}^{(p)}(x,y)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}\\&=\sum_{(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(\ell)}(s-2(m-u),t-2(n-v))\overline{h}^{(\ell)}(s,t)\\&=\delta(m-u)\delta(n-v)\end{aligned}$$

其中最后一个步骤, 利用了 $\{h^{(\ell)}(s,t);(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},\ell=0,1,2,3$ 的如下定义:

$$\begin{cases}h^{(0)}(m,n)=h_m h_n\\ h^{(1)}(m,n)=h_m g_n\\ h^{(2)}(m,n)=g_m h_n\\ h^{(3)}(m,n)=g_m g_n\end{cases}$$

以及 $\mathbf{h}_0^{(m)}=\{h_{n-m};n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\in\ell^2(\mathbb{Z}),\mathbf{h}_1^{(m)}=\{g_{n-m};n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\in\ell^2(\mathbb{Z}),m\in\mathbb{Z}$ 的性质: 对于任意的两个整数 $(m,k)\in\mathbb{Z}^2$,

$$\begin{cases}\left\langle\mathbf{h}_0^{(2m)},\mathbf{h}_0^{(2k)}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_{n-2m}\overline{h}_{n-2k}=\delta(m-k)\\ \left\langle\mathbf{h}_1^{(2m)},\mathbf{h}_1^{(2k)}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2m}\overline{g}_{n-2k}=\delta(m-k)\\ \left\langle\mathbf{h}_1^{(2m)},\mathbf{h}_0^{(2k)}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2m}\overline{h}_{n-2k}=0\end{cases}$$

即 $\{\mathbf{h}_0^{(2m)};m\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{\mathbf{h}_1^{(2m)};m\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中相互正交的两个偶数平移平方可和无穷维规范正交向量系.

由此证明了当 $4^{\xi+1}\leqslant p<4^{\xi+2}$ 时, 定理的结论仍然成立. 于是根据数学归纳法原理, 这个定理对于全部 $p=0,1,2,\cdots$ 都是成立的. 完成证明.

(γ) 二维小波包的包间正交性

定理 6.12 (小波包函数整数平移正交性)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 按照上述方式定义的二维小波包函数系 $\{Q^{(p)}(x,y),p=0,1,2,3,\cdots\}$ 具有如下规范正交性(包间正交性):

$$\{Q_{j;m,n}^{(4p+\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\},\quad \ell=0,1,2,3$$

是四个相互正交的规范正交函数系, 其中 $p=0,1,2,3,\cdots$, j 是任意整数, 或者等价表示为

$$\left\langle Q_{j;m,n}^{(4p+k)}(x,y),Q_{j;u,v}^{(4p+\ell)}(x,y)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}=\delta(m-u)\delta(n-v)\delta(k-\ell),\quad p=0,1,2,3,\cdots$$

其中, $(j,m,n,u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $0\leqslant k,\ell\leqslant3$.

证明　首先进行内积的直接演算:

$$
\begin{aligned}
&\left\langle Q_{j;m,n}^{(4p+k)}(x,y), Q_{j;u,v}^{(4p+\ell)}(x,y)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)} \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} Q_{j;m,n}^{(4p+k)}(x,y)\overline{Q}_{j;u,v}^{(4p+\ell)}(x,y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} 2^j Q^{(4p+k)}(2^j x-m, 2^j y-n)2^j \overline{Q}^{(4p+\ell)}(2^j x-u, 2^j y-v)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} Q^{(4p+k)}(x-m, y-n)\overline{Q}^{(4p+\ell)}(x-u, y-v)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \left[\sum_{(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(k)}(s-2m, t-2n)Q_{1;s,t}^{(p)}(x,y)\right] \\
&\quad \times \left[\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\ell)}(a-2u, b-2v)Q_{1;a,b}^{(p)}(x,y)\right]^* dxdy \\
&= \sum_{(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(k)}(s-2m, t-2n)\overline{h}^{(\ell)}(a-2u, b-2v) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} Q_{1;s,t}^{(p)}(x,y)\overline{Q}_{1;a,b}^{(p)}(x,y)dxdy
\end{aligned}
$$

根据小波包函数系的整数平移规范正交性，$\{Q_{1;s,t}^{(p)}(x,y);(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 即小波包函数 $Q^{(p)}(x,y)$ 的伸缩平移系是规范正交函数系，从而

$$
\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} Q_{1;s,t}^{(p)}(x,y)\overline{Q}_{1;a,b}^{(p)}(x,y)dxdy = \delta(s-a)\delta(t-b)
$$

这样，内积演算可以继续简化为

$$
\begin{aligned}
&\left\langle Q_{j;m,n}^{(4p+k)}(x,y), Q_{j;u,v}^{(4p+\ell)}(x,y)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)} \\
&= \sum_{(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(k)}(s-2m, t-2n)\overline{h}^{(\ell)}(s-2u, t-2v)
\end{aligned}
$$

利用四个无穷维矩阵 $\{h^{(\ell)}(s,t);(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}, \ell=0,1,2,3$ 的如下定义：

$$
\begin{cases}
h^{(0)}(m,n) = h_m h_n \\
h^{(1)}(m,n) = h_m g_n \\
h^{(2)}(m,n) = g_m h_n \\
h^{(3)}(m,n) = g_m g_n
\end{cases}
$$

以及 $\mathbf{h}_0^{(m)} = \{h_{n-m};n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}} \in \ell^2(\mathbb{Z}), \mathbf{h}_1^{(m)} = \{g_{n-m};n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}} \in \ell^2(\mathbb{Z}), m\in\mathbb{Z}$ 的性质：对于任意的两个整数 $(m,k)\in\mathbb{Z}^2$，

$$\begin{cases}\left\langle \mathbf{h}_0^{(2m)}, \mathbf{h}_0^{(2k)} \right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{n-2m}\overline{h}_{n-2k} = \delta(m-k)\\ \left\langle \mathbf{h}_1^{(2m)}, \mathbf{h}_1^{(2k)} \right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_{n-2m}\overline{g}_{n-2k} = \delta(m-k)\\ \left\langle \mathbf{h}_1^{(2m)}, \mathbf{h}_0^{(2k)} \right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_{n-2m}\overline{h}_{n-2k} = 0\end{cases}$$

即 $\{\mathbf{h}_0^{(2m)}; m\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{\mathbf{h}_1^{(2m)}; m\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中相互正交的两个偶数平移平方可和无穷维规范正交向量系. 最终得到如下期望的内积计算表达式：

$$\begin{aligned}&\left\langle Q_{j;m,n}^{(4p+k)}(x,y), Q_{j;u,v}^{(4p+\ell)}(x,y) \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}\\ &= \sum_{(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(k)}(s-2m,t-2n)\overline{h}^{(\ell)}(s-2u,t-2v)\\ &= \delta(m-u)\delta(n-v)\delta(k-\ell)\end{aligned}$$

这样就完成了定理的证明.

这些研究表明，小波包函数的伸缩平移规范正交函数系是一系列的相互正交的函数系，它们体现为某个二维小波包函数平移系的规范正交性、同一个二维小波包函数尺度伸缩之间的正交性以及不同二维小波包函数之间的正交性. 这些成果为二维小波包子空间各种类型的规范正交基的构造奠定了理论基础，同时为整个函数空间的小波包子空间正交直和分解奠定了理论基础.

6.2.2　二维小波包空间及其正交分解

(α) 小波包子空间的构造

定理 6.13 (小波包子空间的构造)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照上述方式定义二维小波包函数系 $\{Q^{(p)}(x,y), p=0,1,2,3,\cdots\}$，将小波包子空间构造如下：

$$\mathbb{Q}_j^{(p)} = \text{Closespan}\{ Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y); (m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

其中，$j\in\mathbb{Z}$, $p=0,1,2,3,\cdots$, 那么，小波包子空间序列 $\{\mathbb{Q}_j^{(p)}; j\in\mathbb{Z}\}$ 是伸缩依赖的，即 $g(x,y)\in\mathbb{Q}_j^{(p)} \Leftrightarrow g(2x,2y)\in\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)}, p=0,1,2,3,\cdots, \forall j\in\mathbb{Z}$.

证明　这里示范证明 $g(x,y)\in\mathbb{Q}_j^{(p)} \Rightarrow g(2x,2y)\in\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)}$. 根据二维小波包子空间的构造性定义 $\mathbb{Q}_j^{(p)} = \text{Closespan}\{ Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y); (m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$ 可得，当 $g(x,y)\in\mathbb{Q}_j^{(p)}$ 时，存在平方可和的无穷维矩阵 $\{\alpha_{j;m,n}^{(p)}; (m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$ 满足如下要求：

$$g(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\alpha_{j;m,n}^{(p)}Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y)$$

而且

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|\alpha_{j;m,n}^{(p)}\right|^2<+\infty$$

这样得到

$$\begin{aligned}g(2x,2y)&=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\alpha_{j;m,n}^{(p)}Q_{j;m,n}^{(p)}(2x,2y)\\&=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}0.5\alpha_{j;m,n}^{(p)}2^{j+1}Q^{(p)}(2^{j+1}x-m,2^{j+1}y-n)\\&=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}0.5\alpha_{j;m,n}^{(p)}Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\end{aligned}$$

从而由定义可知，$g(2x,2y)\in\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)}$. 建议读者补充证明的细节，以得到完整的证明.

定理 6.14 (小波包子空间的正交性) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照上述方式定义二维小波包函数系 $\{Q^{(p)}(x,y),p=0,1,2,3,\cdots\}$，构造如下的小波包子空间列：

$$\mathbb{Q}_j^{(p)}=\text{Closespan}\{Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

其中 $j\in\mathbb{Z}$, $p=0,1,2,3,\cdots$, 其具有尺度伸缩正交性 $\mathbb{Q}_j^{(p)}\perp\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)},p=1,2,3,\cdots,\forall j\in\mathbb{Z}$.

证明 将 p 写成 $p\to 4p+\ell$, $\ell=0,1,2,3$ 的形式, 那么, 当 $(v,w)\in\mathbb{Z}^2$ 时,

$$\begin{cases}Q_{j;v,w}^{(4p+0)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(0)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\\Q_{j;v,w}^{(4p+1)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(1)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\\Q_{j;v,w}^{(4p+2)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(2)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\\Q_{j;v,w}^{(4p+3)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(3)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\end{cases}$$

或者综合表示为

$$Q_{j;v,w}^{(4p+\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)$$

同时, 类似得到

$$Q_{j+1;s,t}^{(4p+\ell)}(x,y)=\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(\ell)}(a-2s,b-2t)Q_{j+2;a,b}^{(p)}(x,y)$$

直接进行内积演算：

$$
\begin{aligned}
&\left\langle Q_{j;v,w}^{(4p+\ell)}(x,y), Q_{j+1;s,t}^{(4p+\ell)}(x,y)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)} \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} Q_{j;v,w}^{(4p+\ell)}(x,y)\overline{Q}_{j+1;s,t}^{(4p+\ell)}(x,y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\left[\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\right] \\
&\quad\times\left[\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\ell)}(a-2s,b-2t)Q_{j+2;a,b}^{(p)}(x,y)\right]^* dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\left[\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\right] \\
&\quad\times\left[\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\ell)}(a-2s,b-2t)Q_{j+2;a,b}^{(p)}(x,y)\right]^* dxdy \\
&= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\ \sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)\overline{h}^{(\ell)}(a-2s,b-2t) \\
&\quad\times\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\overline{Q}_{j+2;a,b}^{(p)}(x,y)dxdy
\end{aligned}
$$

由此可知，对于任何固定的 p，伸缩正交性 $\mathbb{Q}_j^{(4p+\ell)} \perp \mathbb{Q}_{j+1}^{(4p+\ell)}, \ell=0,1,2,3,\ \forall j\in\mathbb{Z}$ 完全取决于伸缩正交性 $\mathbb{Q}_j^{(p)} \perp \mathbb{Q}_{j+1}^{(p)},\ \forall j\in\mathbb{Z}$，即对于任意的 p，存在如下逻辑关系：

$$
\begin{gathered}
\left\langle Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y), Q_{j+2;a,b}^{(p)}(x,y)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)} = 0, \quad j\in\mathbb{Z} \\
\Downarrow \\
\left\langle Q_{j;v,w}^{(4p+\ell)}(x,y), Q_{j+1;s,t}^{(4p+\ell)}(x,y)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)} = 0, \quad \ell=0,1,2,3, \quad j\in\mathbb{Z}
\end{gathered}
$$

因此，利用第 II 型数学归纳法可完成证明. 建议读者给出完整的证明.

定理 6.15 (小波包子空间的正交性)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照上述方式定义二维小波包函数系 $\{Q^{(p)}(x,y), p=0,1,2,3,\cdots\}$，构造如下的小波包子空间列：

$$
\mathbb{Q}_j^{(p)} = \text{Closespan}\{Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}
$$

其中 $j\in\mathbb{Z},\ p=0,1,2,3,\cdots$，其具有正交或包含关系：$p,q=0,1,2,3,\cdots,\ \forall(j,k)\in\mathbb{Z}^2$，两个小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(p)}$ 和 $\mathbb{Q}_k^{(q)}$ 或者相互正交或者其中一个被另一个所包含(相等也是一种包含关系).

证明　建议读者仔细写出这个证明的详细过程.

(β) 小波包子空间正交分解

定理 6.16 (小波包子空间正交分解) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照上述方式定义二维小波包函数系 $\{Q^{(p)}(x,y), p=0,1,2,3,\cdots\}$，构造如下的小波包子空间列：

$$\mathbb{Q}_j^{(p)}=\text{Closespan}\{\,Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

其中 $j\in\mathbb{Z}$, $p=0,1,2,3,\cdots$, 其具有正交直和分解关系：

$$\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)}=\mathbb{Q}_j^{(4p+0)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(4p+1)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(4p+2)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(4p+3)}$$

证明 根据小波包函数系的定义，当 $(v,w)\in\mathbb{Z}^2$ 时，

$$\begin{cases}Q_{j;v,w}^{(4p+0)}(x,y)=\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(0)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\\ Q_{j;v,w}^{(4p+1)}(x,y)=\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(1)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\\ Q_{j;v,w}^{(4p+2)}(x,y)=\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(2)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\\ Q_{j;v,w}^{(4p+3)}(x,y)=\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(3)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\end{cases}$$

因此，$\mathbb{Q}_j^{(4p+0)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(4p+1)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(4p+2)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(4p+3)}\subseteq\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)}$. 为了证明相反的包含关系，容易验证：当 $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ 时，

$$Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{3}\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)Q_{j;v,w}^{(4p+\ell)}(x,y)$$

因此，规范正交函数系 $\{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 可以被四个相互正交的规范正交函数系 $\{Q_{j;v,w}^{(4p+\ell)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},\ell=0,1,2,3$ 线性表示，这不仅说明小波包子空间包含关系 $\mathbb{Q}_j^{(4p+0)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(4p+1)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(4p+2)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(4p+3)}\supseteq\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)}$，而且，还同时说明了左边的四个小波包子空间是相互正交的. 证明完成.

(γ) 小波包空间正交金字塔

利用二维小波包函数系的性质以及二维小波包子空间定义提供的特殊结构可以获得二维小波包子空间的各种类型的正交直和分解表达式，其中特别是二维小波包子空间的正交直和分解金字塔，为我们提供了二维小波包子空间更精细的结构刻画，这些研究成果为二元函数空间的正交直和分解、各种类型的规范正交基的建造

以及函数的正交级数表达开辟了新途径.

定理 6.17 (小波包子空间正交分解金字塔)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照上述方式定义二维小波包函数系 $\{Q^{(p)}(x,y), p=0,1,2,3,\cdots\}$，构造如下的小波包子空间列：

$$\mathbb{Q}_j^{(p)} = \text{Closespan}\{Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

其中 $j\in\mathbb{Z}$, $p=0,1,2,3,\cdots$，其具有多重正交直和分解关系：

❶ 尺度子空间的链式正交直和分解：

$$\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)} = \mathbb{Q}_{j-J}^{(0)} \oplus \left\{\bigoplus_{u=0}^{J}\left[\mathbb{Q}_{j-u}^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(3)}\right]\right\}, \quad j\in\mathbb{Z}, \quad J\geqslant 0$$

❷ 尺度子空间的完全小波包子空间正交直和分解：

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)} &= \mathbb{Q}_j^{(0)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(3)}\\ &= \mathbb{Q}_{j-1}^{(0)} \oplus \mathbb{Q}_{j-1}^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_{j-1}^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_{j-1}^{(3)} \oplus\cdots\oplus \mathbb{Q}_{j-1}^{(14)} \oplus \mathbb{Q}_{j-1}^{(15)}\\ &\vdots\\ &= \mathbb{Q}_{j-u}^{(0)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(1)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(2)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(3)} \oplus\cdots\oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(14)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(4^{u+1}-1)}\\ &= \bigoplus_{p=0}^{(4^{u+1}-1)} \mathbb{Q}_{j-u}^{(p)}, \quad j\in\mathbb{Z}, \quad u\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

❸ 小波包子空间的完全正交直和分解：

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)} &= \mathbb{Q}_j^{(4p+0)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(4p+1)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(4p+2)} \oplus \mathbb{Q}_j^{(4p+3)}\\ &= \mathbb{Q}_{j-1}^{(4^2p+0)} \oplus \mathbb{Q}_{j-1}^{(4^2p+1)} \oplus\cdots\oplus \mathbb{Q}_{j-1}^{(4^2p+14)} \oplus \mathbb{Q}_{j-1}^{(4^2p+15)}\\ &\vdots\\ &= \mathbb{Q}_{j-u}^{(4^{u+1}p+0)} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(4^{u+1}p+1)} \oplus\cdots\oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(4^{u+1}-2))} \oplus \mathbb{Q}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(4^{u+1}-1))}\\ &= \bigoplus_{q=0}^{(4^{u+1}-1)} \mathbb{Q}_{j-u}^{(4^{u+1}p+q)} = \bigoplus_{q=4^{u+1}p}^{[4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)]} \mathbb{Q}_{j-u}^{(q)}\end{aligned}$$

证明　建议读者完成这些结果的详细证明.

6.2.3　空间的小波包子空间分解

利用二维小波包函数的性质以及二维小波包子空间的正交直和分解关系，这里建立整个函数空间各种类型的小波包子空间正交直和分解，通过小波包子空间的规范正交基的合并得到整个函数空间的各种类型的规范正交基.

(α) 函数空间的完全小波包空间正交分解

定理 6.18 (函数空间的完全小波包空间正交分解) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照上述方式定义二维小波包函数系 $\{Q^{(p)}(x,y); p=0,1,2,3,\cdots\}$，并构造小波包子空间列如下：

$$\mathbb{Q}_j^{(p)}=\text{Closespan}\{Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

其中 $j\in\mathbb{Z}$, $p=0,1,2,3,\cdots$，那么，这些小波包子空间序列与整个函数空间具有多重正交直和分解关系：

❶ 函数空间的小波包子空间正交直和分解：第一类

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)&=\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}\bigoplus_{v=1}^{+\infty}\left[\mathbb{Q}_{j+v}^{(1)}\oplus\mathbb{Q}_{j+v}^{(2)}\oplus\mathbb{Q}_{j+v}^{(3)}\right]\\&=\left[\bigoplus_{m=1}^{15}\mathbb{Q}_{j-1}^{(m)}\right]\oplus\bigoplus_{v=1}^{+\infty}\left[\mathbb{Q}_{j+v}^{(1)}\oplus\mathbb{Q}_{j+v}^{(2)}\oplus\mathbb{Q}_{j+v}^{(3)}\right]\\&=\left[\bigoplus_{p=0}^{(4^{u+1}-1)}\mathbb{Q}_{j-u}^{(p)}\right]\oplus\bigoplus_{v=1}^{+\infty}\left[\mathbb{Q}_{j+v}^{(1)}\oplus\mathbb{Q}_{j+v}^{(2)}\oplus\mathbb{Q}_{j+v}^{(3)}\right]\end{aligned}$$

❷ 函数空间的小波包子空间正交直和分解：第二类

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)&=\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty}\left[\mathbb{Q}_j^{(1)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(2)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(3)}\right]\\&=\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty}\bigoplus_{q=0}^{(4^u-1)}\mathbb{Q}_{j-u}^{(4^u+q)}\oplus\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty}\bigoplus_{r=0}^{(4^v-1)}\mathbb{Q}_{j-v}^{(2\times4^v+r)}\\&\quad\oplus\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty}\bigoplus_{s=0}^{(4^w-1)}\mathbb{Q}_{j-w}^{(3\times4^w+s)}\end{aligned}$$

❸ 函数空间的小波包子空间正交直和分解：第三类

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)&=\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty}\left[\mathbb{Q}_j^{(1)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(2)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(3)}\right]\\&=\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty}\bigoplus_{q=0}^{(4^u-1)}\left[\mathbb{Q}_{j-u}^{(4^u+q)}\oplus\mathbb{Q}_{j-u}^{(2\times4^u+q)}\oplus\mathbb{Q}_{j-u}^{(3\times4^u+q)}\right]\end{aligned}$$

证明 留给读者作为练习.

(β) 二维正交小波包子空间列

定理 6.19 (二维正交小波包子空间列) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照上述方式定义二维小波包函数系

$\{Q^{(p)}(x,y), p=0,1,2,3,\cdots\}$，并构造小波包子空间列如下：

$$\mathbb{Q}_j^{(p)} = \text{Closespan}\{Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

其中 $j\in\mathbb{Z}$, $p=0,1,2,3,\cdots$，那么，成立如下的结果：

❶ 如下三个小波包子空间族是相互正交的：当 $j\in\mathbb{Z}$, $u,v,w\in\mathbb{N}$ 时，

$$\begin{aligned}&\{\mathbb{Q}_{j-u}^{(4^u+q)};q=0,1,\cdots,(4^u-1)\}\\&\{\mathbb{Q}_{j-v}^{(2\times4^v+r)};r=0,1,\cdots,(4^v-1)\}\\&\{\mathbb{Q}_{j-w}^{(3\times4^w+s)};s=0,1,\cdots,(4^w-1)\}\end{aligned}$$

❷ 这些小波包子空间有如下的规范正交基：对于 $u,v,w\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{j-u}^{(4^u+q)} &\leftrightarrow \{Q_{j-u,m,n}^{(4^u+q)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}, \quad q=0,1,\cdots,(4^u-1)\\\mathbb{Q}_{j-v}^{(2\times4^v+r)} &\leftrightarrow \{Q_{j-v,m,n}^{(2\times4^v+r)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}, \quad r=0,1,\cdots,(4^v-1)\\\mathbb{Q}_{j-w}^{(3\times4^w+s)} &\leftrightarrow \{Q_{j-w,m,n}^{(3\times4^w+s)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}, \quad s=0,1,\cdots,(4^w-1)\end{aligned}$$

证明　利用二维正交小波包函数系列的定义和性质以及二维小波包子空间的定义，可以直接完成证明. 建议读者补充证明的细节，建立完整的证明过程.

注释：这个定理不仅说明了尺度子空间的二维小波包子空间正交直和分解以及各个分解产生的小波包子空间之间相互正交，同时也说明了小波子空间、小波包子空间的正交直和分解以及各个分解产生的更精细的小波包子空间的规范正交基.

(γ) 函数空间的完全小波包规范正交基

定理 6.20 (函数空间的完全小波包规范正交基)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照上述方式定义二维小波包函数系 $\{Q^{(p)}(x,y);p=0,1,2,3,\cdots\}$，并构造小波包子空间列如下：

$$\mathbb{Q}_j^{(p)} = \text{Closespan}\{Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

其中 $j\in\mathbb{Z}$, $p=0,1,2,3,\cdots$，那么，成立如下的结果：

❶ 函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 有如下的规范正交基：对任意的 $j\in\mathbb{Z}, u\geqslant 0$，

$$\left[\bigcup_{q=0}^{4^{u+1}-1}\{Q_{j-u,m,n}^{(q)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}\right]\cup\left[\bigcup_{v=1}^{+\infty}\bigcup_{\ell=1}^{3}\{Q_{j+v;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}\right]$$

❷ 函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 有如下的规范正交基：对于 $u=1,2,\cdots$，

$$\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}\bigcup_{q=0}^{(4^u-1)}\bigcup_{\ell=1}^{3}\{Q_{j-u;m,n}^{(\ell\times4^u+q)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

❸ 函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 有如下的规范正交基：对于 $u,v,w=1,2,\cdots$，

$$\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}\bigcup_{q=0}^{(4^u-1)}\{Q_{j-u;m,n}^{(4^u+q)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$
$$\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}\bigcup_{r=0}^{(4^v-1)}\{Q_{j-v;m,n}^{(2\times4^v+r)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$
$$\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}\bigcup_{s=0}^{(4^w-1)}\{Q_{j-w;m,n}^{(3\times4^w+s)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

或者表示为

$$\left\{\begin{array}{r} Q_{j-u;m,n}^{(4^u+q)}(x,y),Q_{j-v;m,n}^{(2\times4^v+r)}(x,y),Q_{j-w;m,n}^{(3\times4^w+q)}(x,y);\\ 0\leqslant q\leqslant(4^u-1),\\ 0\leqslant r\leqslant(4^v-1),\\ 0\leqslant s\leqslant(4^w-1),\\ (j,m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\end{array}\right\}$$

或者表示为

$$\left\{\begin{array}{c|r} Q_{j-u;m,n}^{(4^u+q)}(x,y) & 0\leqslant q\leqslant(4^u-1),\\ Q_{j-v;m,n}^{(2\times4^v+r)}(x,y) & 0\leqslant r\leqslant(4^v-1),\\ Q_{j-w;m,n}^{(3\times4^w+q)}(x,y) & 0\leqslant s\leqslant(4^w-1),\\ & j\in\mathbb{Z},(m,n)\in\mathbb{Z}^2\end{array}\right\}$$

证明　利用整个二元函数空间的按照尺度-小波子空间的混合正交直和分解、完全小波子空间的正交直和分解以及各种类型小波包子空间的正交直和分解，结合尺度子空间的规范正交基、小波子空间的规范正交基以及各种类型的小波包子空间的规范正交基，即可给出函数空间的上述各种类型的组合型规范正交基. 建议读者补充证明过程的细节，建立定理的完整证明.

注释：这个定理只罗列了三种类型的组合型规范正交基，即第一类只把二维尺度子空间进行了小波包子空间正交直和分解，并利用二维小波包子空间的规范正交基和小波子空间的规范正交基联合给出整个函数空间的一种规范正交基；第二类是把三种二维小波子空间按照统一的小波包函数尺度级别进行完全的小波包子空间正交直和分解，并利用这些相互正交的二维函数小波包子空间的规范正交基联合构成整个函数空间的联合规范正交基；第三类是把三种二维函数小波子空间各自按照不同的小波包函数尺度级别分别进行完全的小波包子空间正交直和分解，并利

用这些分解产生的小波包子空间的规范正交基联合构成整个二元函数空间的完整规范正交基. 事实上，二维正交小波包函数系及其正交性为二维函数小波包子空间提供了各种类型的规范正交基，同时，尺度子空间、小波子空间和小波包子空间当然可以获得并不总是完全的小波包子空间正交直和分解，这样，整个函数空间同样可以构造由并非完全的小波包子空间正交直和分解产生的联合规范正交基，这种类型的联合规范正交基是普遍存在的，存在无穷无尽的各种各样的可能性. 相关内容的一维理论以及更多讨论可以参考冉启文和谭立英(2002), Coifman 和 Wickerhauser (1992), Mallat (1988, 1989a, 1989b, 1989c, 1996, 2009), Mallat 和 Hwaug(1992), Mallat 和 Zhong (1991), Wickerhauser(1992)等研究文献.

6.3　图像小波变换理论

图像理解为二元函数 $f(x,y)$，它是能量有限或平方可积的二元函数，有时也称为物理图像 $f(x,y)$，它们全体构成线性空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$.

6.3.1　图像的正交投影和小波变换

这里将研究二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上任意物理图像 $f(x,y)$ 在空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的尺度子空间和小波子空间上的正交投影以及这些投影之间的相互制约关系.

(α) 物理图像的正交投影

定理 6.21 (物理图像正交投影)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，如果将二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上任意物理图像 $f(x,y)$ 在空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的尺度子空间和小波子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 上的正交投影记为 $f_j^{(\ell)}(x,y)$, $j\in\mathbb{Z}$, $\ell=0,1,2,3$，那么它们可以写成如下的正交函数项级数：

$$f_j^{(\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;m,n}^{(\ell)}Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y),\quad j\in\mathbb{Z},\quad \ell=0,1,2,3$$

其中 $\{d_{j;m,n}^{(\ell)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},\ell=0,1,2,3$ 是图像 $f(x,y)$ 在尺度级别为 $s=2^{-j}$ 的尺度子空间和小波子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 的规范正交函数基 $\{Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$, $\ell=0,1,2,3$ 上的 4 个投影系数矩阵，形象地说，$\{d_{j;m,n}^{(\ell)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$, $\ell=0,1,2,3$ 是 4 个无穷维矩阵，无论是上下还是左右都按照整数的方式延伸到无穷远，这时，$\{d_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}\in\ell^2(\mathbb{Z}^2)$, $\ell=0,1,2,3$，而且满足物理图像正交小波级数 Parseval 恒等

式：

$$\left\|f_j^{(\ell)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j;m,n}^{(\ell)}\right|^2,\quad j\in\mathbb{Z},\quad \ell=0,1,2,3$$

证明 因为二元函数尺度子空间和小波子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 存在由单一尺度函数或小波函数产生的规范正交函数基 $\{Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$，其中 $\ell=0,1,2,3$，因此，对于任意物理图像 $f(x,y)$，在空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的尺度子空间和小波子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 上的正交投影 $f_j^{(\ell)}(x,y)$, $j\in\mathbb{Z},\ell=0,1,2,3$ 可以写成如下的正交函数项级数：

$$f_j^{(\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j;m,n}^{(\ell)}Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y),\quad j\in\mathbb{Z},\quad \ell=0,1,2,3$$

其中，当 $j\in\mathbb{Z},\ell=0,1,2,3,\ (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 时，

$$\begin{aligned}d_{j;m,n}^{(\ell)}&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}f_j^{(\ell)}(x,y)\bar{Q}_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y)dxdy\\&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}f(x,y)\bar{Q}_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y)dxdy\end{aligned}$$

而且，直接计算可得物理图像小波变换 Parseval 恒等式：

$$\begin{aligned}\left\|f_j^{(\ell)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\left|f_j^{(\ell)}(x,y)\right|^2dxdy\\&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j;m,n}^{(\ell)}Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y)\sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\bar{d}_{j;u,v}^{(\ell)}\bar{Q}_{j;u,v}^{(\ell)}(x,y)\,dxdy\\&=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j;m,n}^{(\ell)}\bar{d}_{j;u,v}^{(\ell)}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y)\bar{Q}_{j;u,v}^{(\ell)}(x,y)\\&=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j;m,n}^{(\ell)}\bar{d}_{j;u,v}^{(\ell)}\delta(m-u)\delta(n-v)\\&=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j;m,n}^{(\ell)}\right|^2\end{aligned}$$

这样就完成了定理的证明.

(β) 物理图像的正交级数表示

在物理图像在单一尺度子空间和小波子空间上正交投影的正交尺度级数和正交小波级数表达基础上，可以得到物理图像及其正交投影的正交尺度级数和正交小波级数表达式，同时，得到这些正交投影之间的正交和关系.

定理 6.22 (物理图像的正交级数展开式) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，将二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上任意物理图像 $f(x,y)$ 在空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的尺度子空间和小波子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 上的正交投影记为 $f_j^{(\ell)}(x,y)$, $j\in\mathbb{Z},\ell=0,1,2,3$，那么，它们可以写成如下的正交函数项级数：

$$f_j^{(\ell)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;m,n}^{(\ell)} Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y), \quad j\in\mathbb{Z}, \quad \ell=0,1,2,3$$

其中

$$\begin{aligned} d_{j;m,n}^{(\ell)} &= \int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f_j^{(\ell)}(x,y)\overline{Q}_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y)dx\,dy \\ &= \int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)\overline{Q}_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y)dx\,dy \end{aligned}$$

称为图像 $f(x,y)$ 在尺度基函数或小波基函数 $Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y)$ 下尺度级别为 $s=2^{-j}$ 的尺度变换系数或小波变换系数，$j\in\mathbb{Z}$, $\ell=0,1,2,3$.

物理图像 $f(x,y)$ 及其在二元函数子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 上的正交投影 $f_j^{(\ell)}(x,y)$ 存在如下正交级数展开表达式，而且满足如下多个函数方程：对于 $j\in\mathbb{Z},J\in\mathbb{N}$,

$$f_{j+1}^{(\ell)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;m,n}^{(\ell)} Q_{j+1;m,n}^{(\ell)}(x,y), \quad \ell=0,1,2,3$$

$$\begin{aligned} f_{j+1}^{(0)}(x,y) &= f_{j-J}^{(0)}(x,y) + \sum_{u=0}^{J}\sum_{\ell=1}^{3} f_{j-u}^{(\ell)}(x,y) \\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-J;m,n}^{(0)} Q_{j-J;m,n}^{(0)}(x,y) \\ &\quad + \sum_{u=0}^{J}\sum_{\ell=1}^{3}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-u;m,n}^{(\ell)} Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{j+1}^{(0)}(x,y) &= \sum_{u=0}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{3} f_{j-u}^{(\ell)}(x,y) \\ &= \sum_{u=0}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{3}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-u;m,n}^{(\ell)} Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f_j^{(0)}(x,y) + \sum_{u=0}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{3} f_{j+u}^{(\ell)}(x,y) \\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;m,n}^{(0)} Q_{j;m,n}^{(0)}(x,y) \\ &\quad + \sum_{u=0}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{3}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+u;m,n}^{(\ell)} Q_{j+u;m,n}^{(\ell)}(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{3} f_u^{(\ell)}(x,y) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{3}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{u;m,n}^{(\ell)} Q_{u;m,n}^{(\ell)}(x,y) \end{aligned}$$

不仅如此，还可以得到如下物理图像能量分解关系：

$$\left\|f_{j+1}^{(0)}\right\|^2=\left\|f_{j-J}^{(0)}\right\|^2+\sum_{u=0}^{J}\sum_{\ell=1}^{3}\left\|f_{j-u}^{(\ell)}\right\|^2$$

$$\left\|f_{j+1}^{(0)}\right\|^2=\sum_{u=0}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{3}\left\|f_{j-u}^{(\ell)}\right\|^2$$

以及

$$\|f\|^2=\left\|f_{j}^{(0)}\right\|^2+\sum_{u=0}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{3}\left\|f_{j+u}^{(\ell)}\right\|^2$$

$$\|f\|^2=\sum_{u=-\infty}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{3}\left\|f_{u}^{(\ell)}\right\|^2$$

这就是物理图像正交尺度投影和正交小波投影的勾股定理或 Parseval 恒等式.

证明　利用二维多分辨分析中二元函数空间以及尺度子空间的如下正交直和分解公式：

$$\mathbb{Q}_{j+1}^{(\ell)}=\operatorname{Closespan}\{Q_{j+1;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\},\qquad \ell=0,1,2,3$$

$$\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}=\operatorname{Closespan}\left\{\begin{aligned}&Q_{j-J;m,n}^{(0)}(x,y),Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2,\\&\qquad\qquad u=0,1,\cdots,J,\ell=1,2,3\end{aligned}\right\}$$

$$\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}=\operatorname{Closespan}\left\{Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2,u\in\mathbb{N},\ell=1,2,3\right\}$$

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)=\operatorname{Closespan}\left\{\begin{aligned}&Q_{j;m,n}^{(0)}(x,y),Q_{j+u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2,\\&\qquad\qquad u\in\mathbb{N},\ell=1,2,3\end{aligned}\right\}$$

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)=\operatorname{Closespan}\left\{Q_{u;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2,u\in\mathbb{Z},\ell=1,2,3\right\}$$

以及上述正交直和分解中各个子空间的规范正交基或联合规范正交基，仿照定理 6.21 的证明方法即可完成全部证明. 建议读者补充证明过程的细节，得到定理的完整证明.

注释：这些分解关系包括二元函数空间和子空间正交直和分解关系、图像在不同尺度级别的尺度函数整数平移规范正交基和小波函数整数平移规范正交基下的正交级数分解关系，以及图像在各个正交子空间上正交投影的能量分解关系. 这些分解关系构成了图像分析和处理最重要的依赖关系.

(γ) 物理图像和数字图像的 Mallat 分解

图像 $f(x,y)$ 在不同尺度级别的尺度函数整数平移规范正交系和小波函数整数平移

平移规范正交系下的正交级数分解关系，体现了图像 $f(x,y)$ 在不同尺度级别尺度子空间和小波子空间上正交投影的整体行为，而这些正交级数分解式中的系数才真正体现图像在各个像元(像素)上以尺度函数或小波函数为标准的“灰度”，在二维小波的世界里，这些灰度才是图像的本质，图像分析和处理的任何工作都以图像在这些像元上的灰度作为最基本的操作单元. 在二维多分辨分析的理论体系下，图像在这些像素上的灰度之间存在内在的依赖关系，这种依赖关系就是图像二维小波变换系数之间的 Mallat 算法关系.

现在研究物理图像和数字图像的 Mallat 分解算法.

如果图像 $f(x,y)$ 在尺度级别为 $s=2^{-(j+1)}$ 的尺度子空间的规范正交函数基 $\{Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$ 上的投影系数矩阵 $\{d_{j+1;m,n}^{(0)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 是已知的，那么现在研究如何计算 $f(x,y)$ 在尺度级别为 $s=2^{-j}$ 的尺度子空间和小波子空间的规范正交函数基 $\{Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\},\ell=0,1,2,3$ 上的 4 个投影系数矩阵 $\{d_{j;m,n}^{(\ell)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},\ell=0,1,2,3$. 这就是物理图像和数字图像的 Mallat 分解算法.

定理 6.23 (物理图像和数字图像的 Mallat 分解)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，将二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上任意物理图像 $f(x,y)$ 在空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的尺度子空间和小波子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 上的正交投影记为 $f_j^{(\ell)}(x,y)$, $j\in\mathbb{Z},\ell=0,1,2,3$，将它们写成如下的正交函数项级数：

$$f_j^{(\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;m,n}^{(\ell)}Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y),\quad j\in\mathbb{Z},\quad \ell=0,1,2,3$$

那么，物理图像 $f(x,y)$ 在各个尺度级别上的尺度子空间和小波子空间中的正交投影之间存在依赖关系：

$$f_{j+1}^{(0)}(x,y)=f_j^{(0)}(x,y)+\sum_{\ell=1}^{3}f_j^{(\ell)}(x,y)$$

它们的正交级数展开式之间存在如下依赖关系：

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;m,n}^{(0)}Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{3}\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;v,w}^{(\ell)}Q_{j;v,w}^{(\ell)}(x,y)$$

而且系数矩阵 $\{d_{j+1;m,n}^{(0)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$, $\{d_{j;m,n}^{(\ell)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},\ell=0,1,2,3$ 之间存在如下的分解计算关系，即二维 Mallat 分解算法公式：对于 $(v,w)\in\mathbb{Z}^2$,

$$\begin{cases} d_{j;v,w}^{(0)} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \overline{h}^{(0)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(0)} \\ d_{j;v,w}^{(1)} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \overline{h}^{(1)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(0)} \\ d_{j;v,w}^{(2)} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \overline{h}^{(2)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(0)} \\ d_{j;v,w}^{(3)} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \overline{h}^{(3)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(0)} \end{cases}$$

或者改写成

$$d_{j;v,w}^{(\ell)} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \overline{h}^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(0)},\quad \ell=0,1,2,3,\qquad (v,w)\in\mathbb{Z}^2$$

直观而言，Mallat 分解算法把无穷维矩阵空间 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 中的一个点或者向量或者矩阵 $\{d_{j+1;m,n}^{(0)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ “分解”为四个点或者向量或者无穷维矩阵 $\{d_{j;v,w}^{(\ell)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}^2\}\in\ell^2(\mathbb{Z}^2)$，$\ell=0,1,2,3$. 似乎更准确的说法是，把 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 中一个 $\infty\times\infty$ 的矩阵 $\{d_{j+1;m,n}^{(0)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ “分解”为四个 $\frac{\infty}{2}\times\frac{\infty}{2}$ 的矩阵 $\{d_{j;v,w}^{(\ell)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}^2\}$，$\ell=0,1,2,3$. 可以理解为无穷维“数字图像” $\{d_{j+1;m,n}^{(0)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 被“分解”为纵横分辨率均降半，即纵横尺寸各减半的四个数字图像 $\{d_{j;v,w}^{(\ell)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}^2\}$，$\ell=0,1,2,3$.

证明　这里只通过演算获得系数矩阵的分解计算公式，其余证明细节建议读者进行补充. 在如下级数方程两端乘以 $\overline{Q}_{j;s,t}^{(\xi)}(x,y)dxdy$ 并积分

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;m,n}^{(0)}Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y) = \sum_{\ell=0}^{3}\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;v,w}^{(\ell)}Q_{j;v,w}^{(\ell)}(x,y)$$

得到如下演算：方程右边如下

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=0}^{3}\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;v,w}^{(\ell)}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} Q_{j;v,w}^{(\ell)}(x,y)\times\overline{Q}_{j;s,t}^{(\xi)}(x,y)dxdy \\ &=\sum_{\ell=0}^{3}\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;v,w}^{(\ell)}\delta(v-s)\delta(w-t)\delta(\ell-\xi) \\ &= d_{j;s,t}^{(\xi)} \end{aligned}$$

此外，利用尺度方程和小波方程组：

$$Q_{j;s,t}^{(\xi)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\xi)}(m-2s,n-2t)Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y)$$

推演前述方程的左边如下：

$$\begin{aligned}
&\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;m,n}^{(0)}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y)\overline{Q}_{j;s,t}^{(\xi)}(x,y)dxdy\\
=&\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} d_{j+1;m,n}^{(0)}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y)\sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2}\overline{h}^{(\xi)}(u-2s,v-2t)\overline{Q}_{j+1;u,v}^{(0)}(x,y)\,dxdy\\
=&\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}\sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} d_{j+1;m,n}^{(0)}\overline{h}^{(\xi)}(u-2s,v-2t)\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y)\overline{Q}_{j+1;u,v}^{(0)}(x,y)dxdy\\
=&\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;m,n}^{(0)}\overline{h}^{(\xi)}(u-2s,v-2t)\delta(m-u)\delta(n-v)\\
=&\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\overline{h}^{(\xi)}(m-2s,n-2t)d_{j+1;m,n}^{(0)}
\end{aligned}$$

综合左右两端的结果得到

$$d_{j;s,t}^{(\xi)}=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\overline{h}^{(\xi)}(m-2s,n-2t)d_{j+1;m,n}^{(0)}$$

这就是需要证明的分解计算公式.

(δ) 物理图像和数字图像的 Mallat 合成

如果图像 $f(x,y)$ 在尺度级别为 $s=2^{-j}$ 的尺度子空间和小波子空间的规范正交函数基 $\{Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\},\ell=0,1,2,3$ 上的 4 个投影系数矩阵，即数字图像 $\{d_{j;m,n}^{(\ell)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},\ell=0,1,2,3$ 已经获得，这里研究如何计算它在尺度级别为 $s=2^{-(j+1)}$ 的尺度子空间规范正交函数基 $\{Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$ 上的投影系数矩阵或者数字图像 $\{d_{j+1;m,n}^{(0)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$. 这就是物理图像和数字图像的二维 Mallat 合成算法.

定理 6.24 (物理图像和数字图像的 Mallat 合成)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，将二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上任意物理图像 $f(x,y)$ 在空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的尺度子空间和小波子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 上的正交投影记为 $f_j^{(\ell)}(x,y)$，$j\in\mathbb{Z},\ell=0,1,2,3$，将它们写成如下的正交函数项级数：

$$f_j^{(\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;m,n}^{(\ell)}Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y),\quad j\in\mathbb{Z},\quad \ell=0,1,2,3$$

这时物理图像 $f(x,y)$ 在各个尺度级别上的尺度子空间和小波子空间中的正交投影之间存在依赖关系：

$$f_{j+1}^{(0)}(x,y)=f_j^{(0)}(x,y)+\sum_{\ell=1}^{3}f_j^{(\ell)}(x,y)$$

它们的正交级数展开式之间存在如下依赖关系：

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d^{(0)}_{j+1;m,n} Q^{(0)}_{j+1;m,n}(x,y) = \sum_{\ell=0}^{3} \sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d^{(\ell)}_{j;v,w} Q^{(\ell)}_{j;v,w}(x,y)$$

那么，系数矩阵 $\{d^{(0)}_{j+1;m,n};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$，$\{d^{(\ell)}_{j;m,n};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},\ell=0,1,2,3$ 之间存在如下的合成计算关系，即二维 Mallat 合成公式：对于 $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$，

$$d^{(0)}_{j+1;m,n} = \sum_{\ell=0}^{3} \sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}^2} h^{(\ell)}(m-2v,n-2w) d^{(\ell)}_{j;v,w}$$

或者详细写成

$$\begin{aligned} d^{(0)}_{j+1;m,n} = & \sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}^2} h^{(0)}(m-2v,n-2w) d^{(0)}_{j;v,w} \\ & + \sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}^2} h^{(1)}(m-2v,n-2w) d^{(1)}_{j;v,w} \\ & + \sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}^2} h^{(2)}(m-2v,n-2w) d^{(2)}_{j;v,w} \\ & + \sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}^2} h^{(3)}(m-2v,n-2w) d^{(3)}_{j;v,w} \end{aligned}$$

直观而言，与 Mallat 分解算法相反地，Mallat 合成算法把无穷维矩阵空间 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 中的四个点或者向量或者无穷维矩阵 $\{d^{(\ell)}_{j;v,w}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}^2\}\in\ell^2(\mathbb{Z}^2)$，$\ell=0,1,2,3$ 合并为一个点或者向量或者矩阵 $\{d^{(0)}_{j+1;m,n};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$. 考虑到数字图像的纵横尺寸，似乎更准确的说法是，把 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 中四个 $\frac{\infty}{2}\times\frac{\infty}{2}$ 的数字图像 $\{d^{(\ell)}_{j;v,w}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}^2\}$，$\ell=0,1,2,3$ 合并为一个 $\infty\times\infty$ 的纵横分辨率皆倍增的数字图像

$$\{d^{(0)}_{j+1;m,n};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

证明 在如下级数方程两端 $\times\overline{Q}^{(0)}_{j+1;s,t}(x,y)dxdy$ 并积分

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d^{(0)}_{j+1;m,n} Q^{(0)}_{j+1;m,n}(x,y) = \sum_{\ell=0}^{3} \sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d^{(\ell)}_{j;v,w} Q^{(\ell)}_{j;v,w}(x,y)$$

并利用尺度方程和小波方程组

$$Q^{(\xi)}_{j;v,w}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\xi)}(m-2v,n-2w) Q^{(0)}_{j+1;m,n}(x,y)$$

仿照定理 6.23 证明过程中的演算即可完成证明. 建议读者完成这个详细的演算过程，得到定理的完整证明.

6.3.2　图像小波算法矩阵格式

这里研究数字图像或无穷维矩阵小波算法的矩阵表达格式.

引入数字图像或无穷维矩阵记号：

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = \{d_{j+1,m,n}^{(0)};(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

$$\mathscr{D}_{j}^{(\ell)} = \{d_{j,v,w}^{(\ell)};(v,w)\in\mathbb{Z}^2\},\quad \ell = 0,1,2,3$$

回顾两个 $\infty\times[0.5\infty]$ 的矩阵记号：

$$\mathcal{H}_0 = \left[h_{m,v} = h_{m-2v};(m,v)\in\mathbb{Z}^2\right]_{\infty\times\frac{\infty}{2}} = \left[\mathbf{h}^{(2v)};v\in\mathbb{Z}\right]_{\infty\times\frac{\infty}{2}}$$

$$\mathcal{H}_1 = \left[g_{m,v} = g_{m-2v};(m,v)\in\mathbb{Z}^2\right]_{\infty\times\frac{\infty}{2}} = \left[\mathbf{g}^{(2v)};v\in\mathbb{Z}\right]_{\infty\times\frac{\infty}{2}}$$

为了直观起见，可以将这两个 $\infty\times[0.5\infty]$ 矩阵按照列元素示意性表示如下：

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & h_0 & h_{-2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & h_{+1} & h_{-1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & h_{+2} & h_0 & h_{-2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & h_{+1} & h_{-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & h_{+2} & h_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{\infty\times\frac{\infty}{2}},\quad \mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & g_0 & g_{-2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & g_{+1} & g_{-1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & g_{+2} & g_0 & g_{-2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & g_{+1} & g_{-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & g_{+2} & g_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{\infty\times\frac{\infty}{2}}$$

而且，它们的复数共轭转置矩阵 $\mathcal{H}_0^*,\mathcal{H}_1^*$ 都是 $[0.5\infty]\times\infty$ 矩阵，可以按照行元素示意性表示为

$$\mathcal{H}_0^* = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots\ \overline{h}_{-2}\ \overline{h}_{-1}\ \overline{h}_0\ \overline{h}_{+1}\ \overline{h}_{+2}\ \cdots \\ \qquad\qquad \cdots\ \overline{h}_{-2}\ \overline{h}_{-1}\ \overline{h}_0\ \overline{h}_{+1}\ \overline{h}_{+2}\ \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\ \overline{h}_{-2}\ \overline{h}_{-1}\ \overline{h}_0\ \overline{h}_{+1}\ \overline{h}_{+2}\ \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \end{pmatrix}_{\frac{\infty}{2}\times\infty}$$

$$\mathcal{H}_1^* = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots\ \overline{g}_{-2}\ \overline{g}_{-1}\ \overline{g}_0\ \overline{g}_{+1}\ \overline{g}_{+2}\ \cdots \\ \qquad\qquad \cdots\ \overline{g}_{-2}\ \overline{g}_{-1}\ \overline{g}_0\ \overline{g}_{+1}\ \overline{g}_{+2}\ \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\ \overline{g}_{-2}\ \overline{g}_{-1}\ \overline{g}_0\ \overline{g}_{+1}\ \overline{g}_{+2}\ \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \end{pmatrix}_{\frac{\infty}{2}\times\infty}$$

利用这些记号定义一个 $\infty\times\infty$ 的分块为 1×2 的矩阵 $\mathcal{A}$：

$$
\mathcal{A}=\left(\mathcal{H}_0\middle|\mathcal{H}_1\right)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & h_0 & h_{-2} & \vdots & \vdots & \vdots & g_0 & g_{-2} & \vdots & \vdots \\
\vdots & h_{+1} & h_{-1} & \vdots & \vdots & \vdots & g_{+1} & g_{-1} & \vdots & \vdots \\
\vdots & h_{+2} & h_0 & h_{-2} & \vdots & \vdots & g_{+2} & g_0 & g_{-2} & \vdots \\
\vdots & \vdots & h_{+1} & h_{-1} & \vdots & \vdots & \vdots & g_{+1} & g_{-1} & \vdots \\
\vdots & \vdots & h_{+2} & h_0 & \vdots & \vdots & \vdots & g_{+2} & g_0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right)_{\infty\times\infty}
$$

它的复数共轭转置矩阵是

$$
\mathcal{A}^*=\left(\begin{array}{c}\mathcal{H}_0^*\\ \hline \mathcal{H}_1^*\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & & & & & & & & & & \\
\cdots & \overline{h}_{-2} & \overline{h}_{-1} & \overline{h}_0 & \overline{h}_{+1} & \overline{h}_{+2} & \cdots & & & & \\
 & & \cdots & \overline{h}_{-2} & \overline{h}_{-1} & \overline{h}_0 & \overline{h}_{+1} & \overline{h}_{+2} & \cdots & & \\
 & & & & \cdots & \overline{h}_{-2} & \overline{h}_{-1} & \overline{h}_0 & \overline{h}_{+1} & \overline{h}_{+2} & \cdots \\
 & & & & & & & & & & \cdots \\
\hline
\cdots & & & & & & & & & & \\
\cdots & \overline{g}_{-2} & \overline{g}_{-1} & \overline{g}_0 & \overline{g}_{+1} & \overline{g}_{+2} & \cdots & & & & \\
 & & \cdots & \overline{g}_{-2} & \overline{g}_{-1} & \overline{g}_0 & \overline{g}_{+1} & \overline{g}_{+2} & \cdots & & \\
 & & & & \cdots & \overline{g}_{-2} & \overline{g}_{-1} & \overline{g}_0 & \overline{g}_{+1} & \overline{g}_{+2} & \cdots \\
 & & & & & & & & & & \cdots
\end{array}\right)_{\infty\times\infty}
$$

根据多分辨率分析理论可知，无穷维矩阵 $\mathcal{A}$ 是一个酉矩阵，即

$$
\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}=\mathcal{I}
$$

是无穷维单位矩阵或单位算子. $\mathcal{A}^*$ 表示无穷维矩阵 $\mathcal{A}$ 的复数共轭转置，在这里它正好是无穷维矩阵 $\mathcal{A}$ 的逆矩阵.

(α) 数字图像小波分解矩阵表示

利用这里引进的数字图像和无穷维矩阵记号，可以得到数字图像小波分解的矩阵表达形式.

定理 6.25 (数字图像小波分解矩阵格式)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\{d_{j+1,m,n}^{(0)};(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$ 和 $\mathscr{D}_j^{(\ell)}=\{d_{j,v,w}^{(\ell)};(v,w)\in\mathbb{Z}^2\},\ell=0,1,2,3$ 存在如下的矩阵分块分解计算公式：

$$
\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)} & \mathscr{D}_j^{(1)} \\ \hline \mathscr{D}_j^{(2)} & \mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right) = \boldsymbol{\mathcal{A}}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}
= \left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^* \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 \middle| \bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\right)
= \left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 & \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1 \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 & \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\end{array}\right)
$$

证明　回顾定理 6.23 的结果结合这里引入的数字图像或无穷维矩阵记号的定义即可完成证明，建议读者写出完整的证明过程.

从直观形式看，$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 是一个 $\infty\times\infty$ 的数字图像 $\{d_{j+1;m,n}^{(0)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$，而另外四个矩阵 $\mathscr{D}_j^{(0)},\mathscr{D}_j^{(1)},\mathscr{D}_j^{(2)},\mathscr{D}_j^{(3)}$ 是 $[0.5\infty]\times[0.5\infty]$ 的数字图像，纵横方向的数字分辨率皆减半的矩阵 $\{d_{j;v,w}^{(\ell)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}^2\}$，$\ell=0,1,2,3$. 因此，数字图像小波分解矩阵格式给出的结果非常直观地表达了二维小波分解降分辨率的图像实质，获得四个纵横分辨率同时减半的“小图像”. 非常幸运的是，下面的定理说明，这四个“小图像”可以完美重建原始的高分辨率数字图像，说明了二维小波分解过程本质上“没有信息损失”.

(β) 数字图像小波合成矩阵表示

定理 6.26 (数字图像小波合成矩阵格式)　在二元函数空间 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\{d_{j+1,m,n}^{(0)};(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$ 和 $\mathscr{D}_j^{(\ell)}=\{d_{j,v,w}^{(\ell)};(v,w)\in\mathbb{Z}^2\},\ell=0,1,2,3$ 存在如下的矩阵分块合成计算公式：

$$
\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)} & \mathscr{D}_j^{(1)} \\ \hline \mathscr{D}_j^{(2)} & \mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right)\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}
= \left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_0 \middle| \boldsymbol{\mathcal{H}}_1\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)} & \mathscr{D}_j^{(1)} \\ \hline \mathscr{D}_j^{(2)} & \mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}} \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}\end{array}\right)
= \boldsymbol{\mathcal{H}}_0\mathscr{D}_j^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0\mathscr{D}_j^{(1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1\mathscr{D}_j^{(2)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1\mathscr{D}_j^{(3)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}
$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}$ 表示无穷维矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 的转置矩阵. 这就是数字图像小波合成 Mallat 算法的矩阵表达形式.

证明　根据定理 6.25 建立的数字图像二维小波分解矩阵表达公式

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)} & \mathscr{D}_j^{(1)}\\ \hline \mathscr{D}_j^{(2)} & \mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right)=\boldsymbol{\mathcal{A}}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}=\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\\ \hline \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0\middle|\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\right)$$
$$=\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 & \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\\ \hline \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 & \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\end{array}\right)$$

利用无穷维矩阵(离散算子) $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 的酉性, 按照分块矩阵运算规则直接演算即可得到定理的全部证明. 建议读者写出详细的证明过程.

这个定理表明, 数字图像 $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\mathscr{D}_j^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\mathscr{D}_j^{(1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\mathcal{H}}_1\mathscr{D}_j^{(2)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\mathcal{H}}_1\mathscr{D}_j^{(3)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}$ 利用二维小波分解获得的四个低分辨率子图像 $\mathscr{D}_j^{(0)},\mathscr{D}_j^{(1)},\mathscr{D}_j^{(2)},\mathscr{D}_j^{(3)}$ 经过分辨率“提升”达到与 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 同样的分辨率, 之后确认它们的和正好是原始数字图像. 这个过程说明数字图像二维小波算法是一个酉的过程或酉的算子.

6.3.3 图像小波算法的酉性

定理 6.27 (数字图像小波算法的酉性) 在二元函数空间 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\{d_{j+1,m,n}^{(0)};(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$ 和 $\mathscr{D}_j^{(\ell)}=\{d_{j,v,w}^{(\ell)};(v,w)\in\mathbb{Z}^2\},\ell=0,1,2,3$ 之间的矩阵表示关系是酉变换:

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)} & \mathscr{D}_j^{(1)}\\ \hline \mathscr{D}_j^{(2)} & \mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right)\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\middle|\boldsymbol{\mathcal{H}}_1\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)} & \mathscr{D}_j^{(1)}\\ \hline \mathscr{D}_j^{(2)} & \mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}}\\ \hline \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}\end{array}\right)$$
$$=\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\mathscr{D}_j^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\mathscr{D}_j^{(1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\mathcal{H}}_1\mathscr{D}_j^{(2)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\mathcal{H}}_1\mathscr{D}_j^{(3)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}$$

即它们在无穷维矩阵空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中的能量之间保持恒等式关系:

$$\sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1}\left\|\boldsymbol{\mathcal{H}}_\varsigma\mathscr{D}_j^{(\varsigma\zeta)_2}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\zeta^{\mathrm{T}}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{\ell=0}^{3}\left\|\mathscr{D}_j^{(\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

其中

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j+1;m,n}^{(0)}\right|^2$$
$$=\sum_{\ell=0}^{3}\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j;v,w}^{(\ell)}\right|^2=\sum_{\ell=0}^{3}\left\|\mathscr{D}_j^{(\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

而且

$$\begin{cases}\left\|\mathscr{D}_j^{(0)}\right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\left\|\mathcal{H}_0\mathscr{D}_j^{(0)}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\sum\limits_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j;v,w}^{(0)}\right|^2\\ \left\|\mathscr{D}_j^{(1)}\right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\left\|\mathcal{H}_0\mathscr{D}_j^{(1)}\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}}\right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\sum\limits_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j;v,w}^{(1)}\right|^2\\ \left\|\mathscr{D}_j^{(2)}\right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\left\|\mathcal{H}_1\mathscr{D}_j^{(2)}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\sum\limits_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j;v,w}^{(2)}\right|^2\\ \left\|\mathscr{D}_j^{(3)}\right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\left\|\mathcal{H}_1\mathscr{D}_j^{(3)}\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}}\right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\sum\limits_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j;v,w}^{(3)}\right|^2\end{cases}$$

证明　回顾定理 6.25 和定理 6.26, 即图像小波算法的分解和合成的矩阵格式, 利用如下罗列的结果:

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)}&\mathscr{D}_j^{(1)}\\\hline\mathscr{D}_j^{(2)}&\mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right)=\mathcal{A}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\mathcal{A}}=\left(\begin{array}{c}\mathcal{H}_0^*\\\hline\mathcal{H}_1^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\left(\bar{\mathcal{H}}_0\middle|\bar{\mathcal{H}}_1\right)$$

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\mathcal{A}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)}&\mathscr{D}_j^{(1)}\\\hline\mathscr{D}_j^{(2)}&\mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right)\mathcal{A}^{\mathrm{T}}=\left(\mathcal{H}_0\middle|\mathcal{H}_1\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)}&\mathscr{D}_j^{(1)}\\\hline\mathscr{D}_j^{(2)}&\mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\\\hline\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}}\end{array}\right)$$

可知: 数字图像小波算法的这组分解和合成关系的几何意义, 本质上就是如下函数正交投影分解, 以及在尺度子空间和小波子空间规范正交基下正交函数级数的正交投影分解和合成关系:

$$f_{j+1}^{(0)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{3}f_j^{(\ell)}(x,y)$$

而且

$$\sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j+1;u,v}^{(0)}Q_{j+1;u,v}^{(0)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{3}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j;m,n}^{(\ell)}Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y)$$

其中

$$\begin{aligned}f_{j+1}^{(0)}(x,y)&=\sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j+1;u,v}^{(0)}Q_{j+1;u,v}^{(0)}(x,y)\\ f_j^{(\ell)}(x,y)&=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j;m,n}^{(\ell)}Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y),\quad \ell=0,1,2,3\end{aligned}$$

具体地说, 数字图像小波算法的分解和合成矩阵格式体现的是正交函数级数的系数矩阵之间的关系; 函数的正交投影分解和合成或者正交函数级数的正交投影分解和合成体现的是函数数值之间的依赖关系; 这两者没有任何实质性区别, 只是表达方式不同而已.

因为 $\{f_j^{(\ell)}(x,y);\ell=0,1,2,3\}$ 是正交函数系, 所以得到函数范数恒等式:

$$\left\| f_{j+1}^{(0)} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}^2 = \sum_{\ell=0}^{3} \left\| f_j^{(\ell)} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}^2$$

简单计算可得(利用函数的正交函数级数表达式)：

$$\left\| f_{j+1}^{(0)} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}^2 = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \left| d_{j+1;m,n}^{(0)} \right|^2 = \left\| \mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

$$\left\| f_j^{(\ell)} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}^2 = \sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \left| d_{j;v,w}^{(\ell)} \right|^2 = \sum_{\ell=0}^{3} \left\| \mathscr{D}_j^{(\ell)} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2, \quad \ell = 0,1,2,3$$

从而得到无穷维矩阵空间的矩阵范数恒等式：

$$\left\| \mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2 = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \left| d_{j+1;m,n}^{(0)} \right|^2 = \sum_{\ell=0}^{3} \sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \left| d_{j;v,w}^{(\ell)} \right|^2 = \sum_{\ell=0}^{3} \left\| \mathscr{D}_j^{(\ell)} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

再次回顾定理 6.25 和定理 6.26，即图像小波算法的分解和合成的矩阵格式，可以得到如下结果：

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathscr{D}_j^{(0)} & \mathscr{D}_j^{(1)} \\ \hline \mathscr{D}_j^{(2)} & \mathscr{D}_j^{(3)} \end{array} \right) = \boldsymbol{\mathcal{A}}^* \mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^* \mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 & \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^* \mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1 \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^* \mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 & \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^* \mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1 \end{array} \right)$$

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \left(\begin{array}{c|c} \mathscr{D}_j^{(0)} & \mathscr{D}_j^{(1)} \\ \hline \mathscr{D}_j^{(2)} & \mathscr{D}_j^{(3)} \end{array} \right) \boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}} = \sum_{\varsigma=0}^{1} \sum_{\zeta=0}^{1} \boldsymbol{\mathcal{H}}_\varsigma \mathscr{D}_j^{(\varsigma\zeta)_2} \boldsymbol{\mathcal{H}}_\zeta^{\mathrm{T}}$$

数字图像小波算法的这组分解和合成关系的几何意义，本质上就是如下函数正交投影分解，以及在尺度子空间和小波子空间规范正交基下正交函数级数的正交投影分解和合成关系：

$$f_{j+1}^{(0)}(x,y) = \sum_{\ell=0}^{3} f_j^{(\ell)}(x,y)$$

而且

$$\begin{aligned} &\sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;u,v}^{(0)} Q_{j+1;u,v}^{(0)}(x,y) \\ &= \sum_{\ell=0}^{3} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;m,n}^{(\ell)} h^{(\ell)}(u-2m, v-2n) Q_{j+1;u,v}^{(0)}(x,y) \end{aligned}$$

或者等价地

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=0}^{3} \sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;u,v}^{(0)} \overline{h}^{(\ell)}(u-2m, v-2n) Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y) \\ &= \sum_{\ell=0}^{3} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;m,n}^{(\ell)} Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} f_{j+1}^{(0)}(x,y) &= \sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;u,v}^{(0)} Q_{j+1;u,v}^{(0)}(x,y) \\ &= \sum_{\ell=0}^{3} \sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;u,v}^{(0)} \overline{h}^{(\ell)}(u-2m,v-2n) Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y) \end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned} f_{j}^{(\ell)}(x,y) &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;m,n}^{(\ell)} Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y) \\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;m,n}^{(\ell)} h^{(\ell)}(u-2m,v-2n) Q_{j+1;u,v}^{(0)}(x,y) \\ \ell &= 0,1,2,3 \end{aligned}$$

其中利用了尺度方程和小波方程组:

$$Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y) = \sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\ell)}(u-2m,v-2n) Q_{j+1;u,v}^{(0)}(x,y), \quad \ell = 0,1,2,3$$

的等价(逆)方程组

$$\begin{aligned} Q_{j+1;u,v}^{(0)}(x,y) &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(0)}(u-2m,v-2n) Q_{j;m,n}^{(0)}(x,y) \\ &\quad + \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(1)}(u-2m,v-2n) Q_{j;m,n}^{(1)}(x,y) \\ &\quad + \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(2)}(u-2m,v-2n) Q_{j;m,n}^{(2)}(x,y) \\ &\quad + \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(3)}(u-2m,v-2n) Q_{j;m,n}^{(3)}(x,y) \\ &= \sum_{\ell=0}^{3} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(\ell)}(u-2m,v-2n) Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y) \end{aligned}$$

在这样的表达之下, 详细计算的结果是

$$\left\| f_{j+1}^{(0)} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}^2 = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \left| d_{j+1;m,n}^{(0)} \right|^2 = \left\| \mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

而且, 当 $\ell = (\varsigma\zeta)_2 = 0,1,2,3$ 时,

$$\left\| f_{j}^{(\ell)} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}^2 = \left\| f_{j}^{(\varsigma\zeta)_2} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}^2 = \left\| \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varsigma} \mathscr{D}_{j}^{(\varsigma\zeta)_2} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\zeta}^{\mathrm{T}} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$
$$(\varsigma\zeta)_2 \in \{(00),(01),(10),(11)\}$$

综合上述论证, 最终得到

$$\sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1} \left\| \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varsigma} \mathscr{D}_{j}^{(\varsigma\zeta)_2} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\zeta}^{\mathrm{T}} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2 = \sum_{\ell=0}^{3} \left\| \mathscr{D}_{j}^{(\ell)} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2 = \left\| \mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

这样就完成了定理的证明.

注释：(1) 这个定理以及这个定理的证明过程，充分体现了在函数空间与无穷维矩阵的希尔伯特空间之间保范同构性质在研究物理图像和数字图像小波理论中的重要作用.

(2) 这个定理的证明途径还可以选择另一种思路. 所有的表达方式都集中在无穷维矩阵的希尔伯特空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中. 这种方法的关键点是利用无穷维分块矩阵 $\mathcal{A}$ 是一个酉矩阵，即 $\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}=\mathcal{I}$ 是单位矩阵(算子)，说明矩阵 $\mathcal{A}$ 的分块子矩阵 $\mathcal{H}_0^*,\mathcal{H}_1^*,\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$ 的正交性：

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\left(\mathcal{H}_0\middle|\mathcal{H}_1\right)\begin{pmatrix}\mathcal{H}_0^*\\ \hline \mathcal{H}_1^*\end{pmatrix}=\mathcal{H}_0\mathcal{H}_0^*+\mathcal{H}_1\mathcal{H}_1^*=\mathcal{I}$$

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}=\begin{pmatrix}\mathcal{H}_0^*\\ \hline \mathcal{H}_1^*\end{pmatrix}\left(\mathcal{H}_0\middle|\mathcal{H}_1\right)=\begin{pmatrix}\mathcal{H}_0^*\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0^*\mathcal{H}_1\\ \mathcal{H}_1^*\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_1^*\mathcal{H}_1\end{pmatrix}=\mathcal{I}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0\mathcal{H}_0^*+\mathcal{H}_1\mathcal{H}_1^* &= \mathcal{I}_{\infty\times\infty}\\ \mathcal{H}_0^*\mathcal{H}_0=\mathcal{H}_1^*\mathcal{H}_1 &= \mathcal{I}_{[0.5\infty]\times[0.5\infty]}\\ \mathcal{H}_0^*\mathcal{H}_1=\mathcal{H}_1^*\mathcal{H}_0 &= \mathcal{O}_{[0.5\infty]\times[0.5\infty]}\end{aligned}$$

因此，在表达式

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\mathcal{H}_0\mathscr{D}_j^{(0)}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}+\mathcal{H}_0\mathscr{D}_j^{(1)}\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}}+\mathcal{H}_1\mathscr{D}_j^{(2)}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}+\mathcal{H}_1\mathscr{D}_j^{(3)}\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}}$$

中的如下四个与 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 同维的无穷维矩阵：

$$\mathcal{H}_0\mathscr{D}_j^{(0)}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}},\quad \mathcal{H}_0\mathscr{D}_j^{(1)}\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}},\quad \mathcal{H}_1\mathscr{D}_j^{(2)}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}},\quad \mathcal{H}_1\mathscr{D}_j^{(3)}\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}}$$

在无穷维矩阵的希尔伯特空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中是相互正交的：

$$\left\langle \mathcal{H}_\varsigma\mathscr{D}_j^{(\varsigma\zeta)_2}\mathcal{H}_\zeta^{\mathrm{T}},\mathcal{H}_\kappa\mathscr{D}_j^{(\kappa\lambda)_2}\mathcal{H}_\lambda^{\mathrm{T}}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=0$$

其中 $(\varsigma\zeta)_2\neq(\kappa\lambda)_2,(\varsigma,\zeta,\kappa,\lambda)\in\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}$. 从而得范数恒等式：

$$\sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1}\left\|\mathcal{H}_\varsigma\mathscr{D}_j^{(\varsigma\zeta)_2}\mathcal{H}_\zeta^{\mathrm{T}}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{\ell=0}^{3}\left\|\mathscr{D}_j^{(\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

这样就完成了定理的证明.

6.4　物理图像小波包理论

图像理解为二元函数 $f(x,y)$，它是能量有限或平方可积的二元函数，有时也称

为物理图像 $f(x,y)$，它们全体构成希尔伯特空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$. 在物理图像小波包理论的研究过程中，还将经常使用另一个希尔伯特空间，即平方可和无穷维矩阵构成的线性空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})=\ell^2(\mathbb{Z}^2)$.

6.4.1　物理图像正交小波包投影

在二维多分辨率分析的理论框架下，利用尺度子空间、小波子空间以及小波包子空间的正交直和分解，将二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上的任意物理图像 $f(x,y)$ 向空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的这些小波包子空间进行正交投影，这里将研究这些正交小波包投影的表示方法以及这些投影之间的相互制约关系.

(α) 物理图像正交小波包变换

定理 6.28 (物理图像正交小波包变换)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，如果将二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上任意物理图像 $f(x,y)$ 的正交小波包变换，即它在空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 上的正交投影记为 $f_j^{(\ell)}(x,y)$，$j\in\mathbb{Z},\ell=0,1,2,\cdots$，那么它们能写成如下正交小波包函数项级数：

$$f_j^{(\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;m,n}^{(\ell)}Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y),\quad j\in\mathbb{Z},\quad \ell=0,1,2,\cdots$$

而且

$$\left\|f_j^{(\ell)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j;m,n}^{(\ell)}\right|^2,\quad j\in\mathbb{Z},\quad \ell=0,1,2,\cdots$$

此外，物理图像 $f(x,y)$ 的这些正交小波包投影之间满足如下方程：对于 $u\geqslant 0$,

$$f_{j+1}^{(0)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}f_{j-u}^{(\ell)}(x,y)$$

或者等价地表示为

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;m,n}^{(0)}Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-u;m,n}^{(\ell)}Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y)$$

同时，成立如下范数恒等式：

$$\left\|f_{j+1}^{(0)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}\left\|f_{j-u}^{(\ell)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

或者等价地表示为

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j+1;m,n}^{(0)}\right|^2=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j-u;m,n}^{(\ell)}\right|^2$$

如果引入无穷维矩阵记号：

$$\mathscr{D}_j^{(\ell)}=\{d_{j,v,w}^{(\ell)};(v,w)\in\mathbb{Z}^2\}\in\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}),\quad j\in\mathbb{Z},\quad \ell=0,1,2,\cdots$$

那么，成立如下范数恒等式：

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}\left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

而且

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j+1;m,n}^{(0)}\right|^2$$

$$\left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j-u;m,n}^{(\ell)}\right|^2,\quad \ell=0,1,\cdots,4^{u+1}-1$$

证明 因为当 $j\in\mathbb{Z}$, $\ell=0,1,2,3,\cdots$ 时，

$$\mathbb{Q}_j^{(\ell)}=\text{Closespan}\{\,Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

而且成立二维小波包子空间正交直和分解关系：对于任意的 $u\in\mathbb{N}$，

$$\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}=\bigoplus_{p=0}^{4^{u+1}-1}\mathbb{Q}_{j-u}^{(p)}$$

从而利用函数子空间的正交小波包子空间的正交直和分解关系以及这些相互正交的小波包子空间的规范正交基可以证明，任何物理图像在这些相互正交的闭子空间上的正交投影必然存在正交小波包函数级数表达式，而且，这些表达式之间因为正交性必然成立勾股定理关系，即能量守恒或者保持范数恒等式. 建议读者补充必要的细节完成这个定理的全部证明.

(β) 物理图像正交小波包级数

定理 6.29 (物理图像正交小波包级数) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，如果将二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上任意物理图像 $f(x,y)$ 在空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 上的正交投影记为 $f_j^{(\ell)}(x,y)$，$j\in\mathbb{Z},\ell=0,1,2,\cdots$，那么它们能写成如下正交小波包函数项级数：

$$f_j^{(\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j;m,n}^{(\ell)}Q_{j;m,n}^{(\ell)}(x,y),\quad j\in\mathbb{Z},\quad \ell=0,1,2,\cdots$$

而且

$$\left\|f_j^{(\ell)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j;m,n}^{(\ell)}\right|^2,\quad j\in\mathbb{Z},\quad \ell=0,1,2,\cdots$$

此外，图像 $f(x,y)$ 的正交小波包投影之间满足如下方程：对于 $u\geqslant 0,p\geqslant 0,j\in\mathbb{Z}$，

$$f_{j+1}^{(p)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)$$

或者等价地表示为

$$\begin{aligned}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j+1;m,n}^{(p)}Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)&=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}Q_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)\\&=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j-u;m,n}^{(\ell)}Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y)\end{aligned}$$

同时，成立如下范数恒等式：

$$\left\|f_{j+1}^{(p)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}\left\|f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)}\left\|f_{j-u}^{(\ell)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

或者等价地表示为

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j+1;m,n}^{(p)}\right|^2=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}\right|^2=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j-u;m,n}^{(\ell)}\right|^2$$

如果引入无穷维矩阵记号：

$$\mathscr{D}_j^{(\ell)}=\{d_{j,v,w}^{(\ell)};(v,w)\in\mathbb{Z}^2\}\in\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}),\quad j\in\mathbb{Z},\quad \ell=0,1,2,\cdots$$

那么，成立如下范数恒等式：

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}\left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)}\left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

而且，当 $\ell=4^{u+1}p,(4^{u+1}p+1),\cdots,\left[4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)\right]$ 时，

$$\left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j-u;m,n}^{(\ell)}\right|^2,\quad \left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j+1;m,n}^{(p)}\right|^2$$

证明　建议读者仿照定理 6.28 的证明过程完成这个定理的证明.

6.4.2　物理图像正交小波包算法

物理图像 $f(x,y)$ 在各个正交小波包子空间上的正交小波包投影之间，存在正交分解关系，即它们满足如下方程：对于 $u\geqslant 0,p\geqslant 0,j\in\mathbb{Z}$，

$$f_{j+1}^{(p)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1} f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)} f_{j-u}^{(\ell)}(x,y)$$

或者等价地表示为

$$\begin{aligned}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;m,n}^{(p)}Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)&=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}Q_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)\\&=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-u;m,n}^{(\ell)}Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y)\end{aligned}$$

如果在无穷维矩阵空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中引入无穷维矩阵记号:

$$\mathscr{D}_j^{(\ell)}=\{d_{j,v,w}^{(\ell)};(v,w)\in\mathbb{Z}^2\}\in\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}),\quad j\in\mathbb{Z},\quad \ell=0,1,2,\cdots$$

那么, 因为上述过程完全是正交投影, 所以, 在无穷维矩阵空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中成立如下的范数恒等式:

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}\left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)}\left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

这里将仔细研究 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 与 $\{\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)};\ell=0,1,\cdots,(4^{u+1}-1)\}$ 这些无穷维矩阵之间的相互转换关系, 这就是以数字图像相互转换形式体现的物理图像的小波包算法.

(α) 物理图像小波包分解

定理 6.30 (物理图像小波包分解) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 将二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上任意物理图像 $f(x,y)$ 在空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 上的正交投影记为 $f_j^{(\ell)}(x,y)$, $j\in\mathbb{Z}$, $\ell=0,1,2,\cdots$, 并把它们写成如下正交小波包函数项级数:

$$\begin{gathered}f_{j+1}^{(p)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;m,n}^{(p)}Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)\\ f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}Q_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)\\ \ell=0,1,\cdots,(4^{u+1}-1)\end{gathered}$$

利用物理图像 $f(x,y)$ 正交小波包投影的关系公式:

$$f_{j+1}^{(p)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1} f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)} f_{j-u}^{(\ell)}(x,y)$$

可以得到无穷维系数矩阵 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 与 $\{\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)};\ell=0,1,\cdots,(4^{u+1}-1)\}$ 之间的二维正交小波包分解公式：对于 $(v,w)\in\mathbb{Z}^2,p\in\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} d_{j;v,w}^{(4p+0)} = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \overline{h}^{(0)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)} \\ d_{j;v,w}^{(4p+1)} = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \overline{h}^{(1)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)} \\ d_{j;v,w}^{(4p+2)} = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \overline{h}^{(2)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)} \\ d_{j;v,w}^{(4p+3)} = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \overline{h}^{(3)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)} \end{cases}$$

或者改写成：对于 $(v,w)\in\mathbb{Z}^2,p\in\mathbb{N}$,

$$d_{j;v,w}^{(4p+\ell)} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \overline{h}^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)},\quad \ell=0,1,2,3$$

或者采用一般化表示方式写成：对于 $(v,w)\in\mathbb{Z}^2,\xi=0,1,2,\cdots,u$

$$d_{j-\xi;v,w}^{(4\lambda+\ell)} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \overline{h}^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j-\xi+1;m,n}^{(\lambda)},\quad \ell=0,1,2,3,$$
$$\lambda=4^{\xi}p,\ (4^{\xi}p+1),\ \cdots,\ (4^{\xi}p+4^{\xi}-1)$$

而且，这个逐步迭代的过程可以示意性表示为

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} \mapsto \{\mathscr{D}_{j}^{(4p+\ell)};\ell=0,1,\cdots,(4^1-1)\}$$
$$\boxed{\begin{aligned}&(\mathscr{D}_{j}^{(4p+\ell)} \mapsto \mathscr{D}_{j-1}^{4(4p+\ell)+\ell'};\ell'=0,1,2,3),\\ &\qquad\qquad \ell=0,1,\cdots,(4^1-1)\end{aligned}}$$
$$\mapsto \{\mathscr{D}_{j-1}^{(4^2p+\lambda)};\lambda=0,1,\cdots,(4^2-1)\}$$
$$\boxed{\begin{aligned}&(\mathscr{D}_{j-1}^{(4p+\lambda)} \mapsto \mathscr{D}_{j-2}^{4(4p+\lambda)+\ell'};\ell'=0,1,2,3),\\ &\qquad\qquad \lambda=0,1,\cdots,(4^2-1)\end{aligned}}$$
$$\vdots$$
$$\mapsto \{\mathscr{D}_{j-1}^{(4^{\xi}p+\lambda)};\lambda=0,1,\cdots,(4^{\xi}-1)\}$$
$$\boxed{\begin{aligned}&(\mathscr{D}_{j-1}^{(4^{\xi}p+\lambda)} \mapsto \mathscr{D}_{j-2}^{4(4^{\xi}p+\lambda)+\ell'};\ell'=0,1,2,3),\\ &\qquad\qquad \lambda=0,1,\cdots,(4^{\xi}-1)\end{aligned}}$$
$$\vdots$$
$$\mapsto \{\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)};\ell=0,1,\cdots,(4^{u+1}-1)\}$$

这个过程的最终结果可以示意性表示为

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} \mapsto \{\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\lambda)};\lambda=0,1,\cdots,(4^{u+1}-1)\}$$

证明　当 $\xi=0,1,2,\cdots,u$ 时，物理图像 $f(x,y)$ 的正交小波包投影以及正交小波包函数级数满足

$$f_{j-\xi+1}^{(\zeta)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-\xi+1;m,n}^{(\zeta)} Q_{j-\xi+1;m,n}^{(\zeta)}(x,y)$$
$$f_{j-\xi}^{(4\zeta+\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-\xi;m,n}^{(4\zeta+\ell)} Q_{j-\xi;m,n}^{(4\zeta+\ell)}(x,y)$$
$$\ell=0,1,2,3\quad \zeta=4^{\xi}p,\ (4^{\xi}p+1),\cdots,\ (4^{\xi}p+4^{\xi}-1)$$

而且，当 $\ell=0,1,2,3,\ \zeta=4^{\xi}p,(4^{\xi}p+1),\cdots,(4^{\xi}p+4^{\xi}-1)$ 时，

$$f_{j-\xi+1}^{(\zeta)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{3} f_{j-\xi}^{(4\zeta+\ell)}(x,y)$$

或者等价地写成正交小波包投影的正交小波包函数级数公式：

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-\xi+1;m,n}^{(\zeta)} Q_{j-\xi+1;m,n}^{(\zeta)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{3}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-\xi;m,n}^{(4\zeta+\ell)} Q_{j-\xi;m,n}^{(4\zeta+\ell)}(x,y),$$
$$\ell=0,1,2,3,\quad \zeta=4^{\xi}p,\ (4^{\xi}p+1),\cdots,\ (4^{\xi}p+4^{\xi}-1)$$

接下来仿照图像正交小波分解的证明方法并结合正交小波包函数系的定义即可完成定理的证明. 比如用乘积因子 $\overline{Q}_{j-\xi;v,w}^{(4\zeta+\ell)}(x,y)dxdy$ 乘以上式两端后进行积分，并利用如下形式的小波包函数系定义公式中的系数矩阵即可完成全部证明：

$$Q_{j-\xi;v,w}^{(4\zeta+\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\ell)}(m-2v,n-2w) Q_{j-\xi+1;m,n}^{(\zeta)}(x,y),$$
$$(v,w)\in\mathbb{Z}^2,\quad \ell=0,1,2,3,\quad \zeta=4^{\xi}p,\ (4^{\xi}p+1),\cdots,\ (4^{\xi}p+4^{\xi}-1)$$

建议读者补充必要的细节完成证明.

(β) 数字图像小波包分解

定理 6.31 (数字图像小波包分解)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，将二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上任意物理图像 $f(x,y)$ 在空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 上的正交投影记为 $f_j^{(\ell)}(x,y)$，$j\in\mathbb{Z}$, $\ell=0,1,2,\cdots$，并把它们写成如下正交小波包函数项级数：

$$f_{j+1}^{(p)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;m,n}^{(p)} Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)$$

$$f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)} Q_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)$$

$$\ell=0,1,\cdots,(4^{u+1}-1)$$

利用物理图像 $f(x,y)$ 正交小波包投影的关系公式：

$$f_{j+1}^{(p)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)}f_{j-u}^{(\ell)}(x,y)$$

将物理图像 $f(x,y)$ 的各个正交小波包正交投影转换为无穷维系数矩阵对应的数字图像，那么，数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 与 $\{\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)};\ell=0,1,\cdots,(4^{u+1}-1)\}$ 之间存在如下形式的二维正交小波包分解公式：

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(4p+0)}&\mathscr{D}_j^{(4p+1)}\\\hline\mathscr{D}_j^{(4p+2)}&\mathscr{D}_j^{(4p+3)}\end{array}\right)=\boldsymbol{\mathcal{A}}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}=\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\\\hline\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0\middle|\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0&\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\\\hline\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0&\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\end{array}\right)$$

或者利用无穷维矩阵序列符号 $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(u)}=(\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}\mid\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)})_{[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]}$，采用一般化表示方式将数字图像正交小波包迭代过程写成如下公式：对于 $\xi=0,1,2,\cdots,u$，

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+0)}&\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+1)}\\\hline\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+2)}&\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+3)}\end{array}\right)=\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(\xi)}^*\mathscr{D}_{j-\xi+1}^{(\lambda)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{(\xi)}=\left(\begin{array}{c}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\xi)}\right]^*\\\hline\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\right]^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{j-\xi+1}^{(\lambda)}(\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(\xi)}\mid\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(\xi)})$$

$$=\left(\begin{array}{c|c}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\xi)}\right]^*\mathscr{D}_{j-\xi+1}^{(\lambda)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(\xi)}&\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\xi)}\right]^*\mathscr{D}_{j-\xi+1}^{(\lambda)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(\xi)}\\\hline\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\right]^*\mathscr{D}_{j-\xi+1}^{(\lambda)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(\xi)}&\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\right]^*\mathscr{D}_{j-\xi+1}^{(\lambda)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(\xi)}\end{array}\right)$$

其中 $\lambda=4^\xi p,(4^\xi p+1),\cdots,(4^\xi p+4^\xi-1)$.

证明　建议读者完成这个定理的证明.

(γ) 物理图像小波包合成

这里研究物理图像正交小波包分解的逆过程，即物理图像的正交小波包合成过程及其计算方法.

定理 6.32 (物理图像小波包合成)　在二元函数空间 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，将二元函数空间 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R}^2)$ 上任意物理图像 $f(x,y)$ 在空间 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R}^2)$ 的小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 上的正交投影记为 $f_j^{(\ell)}(x,y)$，$j\in\mathbb{Z}$，$\ell=0,1,2,\cdots$，并把它们写成如下正交小波包函数项级数：

$$f_{j+1}^{(p)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j+1;m,n}^{(p)}Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)$$

$$f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}Q_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)$$

$$\ell=0,1,\cdots,(4^{u+1}-1)$$

利用物理图像 $f(x,y)$ 正交小波包投影的关系公式：

$$f_{j+1}^{(p)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)}f_{j-u}^{(\ell)}(x,y)$$

可以得到无穷维系数矩阵 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 与 $\{\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)};\ell=0,1,\cdots,(4^{u+1}-1)\}$ 之间的二维正交小波包合成公式：对于 $(m,n)\in\mathbb{Z}^2,p\in\mathbb{N}$,

$$d_{j+1;m,n}^{(p)}=\sum_{\ell=0}^{3}\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}^2}h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(4p+\ell)}$$

或者详细写成

$$\begin{aligned}d_{j+1;m,n}^{(p)}=&\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}^2}h^{(0)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(4p+0)}\\&+\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}^2}h^{(1)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(4p+1)}\\&+\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}^2}h^{(2)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(4p+2)}\\&+\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}^2}h^{(3)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(4p+3)}\end{aligned}$$

或者采用一般化表示方式写成：对于 $(m,n)\in\mathbb{Z}^2,\xi=u,u-1,\cdots,2,1,0$

$$d_{j-\xi+1;m,n}^{(\lambda)}=\sum_{\ell=0}^{3}\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}^2}h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j-\xi;v,w}^{(4\lambda+\ell)}$$

$$\lambda=4^{\xi}p,(4^{\xi}p+1),\cdots,(4^{\xi}p+4^{\xi}-1)$$

证明　仿照图像正交小波合成的证明方法并结合正交小波包函数系的定义即可完成定理的证明. 这里乘积因子是 $\overline{Q}_{j-\xi+1;s,t}^{(\zeta)}(x,y)dxdy$，并利用如下形式的小波包函数系定义公式中的系数矩阵即可完成证明：

$$Q_{j-\xi;v,w}^{(4\zeta+\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)Q_{j-\xi+1;m,n}^{(\zeta)}(x,y),$$
$$(v,w)\in\mathbb{Z}^2,\quad \ell=0,1,2,3,\quad \zeta=4^{\xi}p,(4^{\xi}p+1),\cdots,(4^{\xi}p+4^{\xi}-1)$$

建议读者补充必要的细节完成证明.

(δ) 数字图像小波包合成

定理 6.33 (数字图像小波包合成) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 将二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上任意物理图像 $f(x,y)$ 在空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)}$ 上的正交投影记为 $f_j^{(\ell)}(x,y)$, $j\in\mathbb{Z}$, $\ell=0,1,2,\cdots$, 并把它们写成如下正交小波包函数项级数:

$$f_{j+1}^{(p)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j+1;m,n}^{(p)}Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)$$

$$f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}Q_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)$$
$$\ell=0,\ 1,\ \cdots,\ (4^{u+1}-1)$$

利用物理图像 $f(x,y)$ 正交小波包投影的关系公式:

$$f_{j+1}^{(p)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)}f_{j-u}^{(\ell)}(x,y)$$

将物理图像 $f(x,y)$ 的各个正交小波包正交投影转换为无穷维系数矩阵对应的数字图像, 那么, 数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 与 $\{\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)};\ell=0,1,\cdots,(4^{u+1}-1)\}$ 之间存在如下形式的二维正交小波包合成公式:

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}&=\mathcal{A}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(4p+0)}&\mathscr{D}_j^{(4p+1)}\\\hline\mathscr{D}_j^{(4p+2)}&\mathscr{D}_j^{(4p+3)}\end{array}\right)\mathcal{A}^{\mathrm{T}}\\&=\left(\mathcal{H}_0\,\middle|\,\mathcal{H}_1\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(4p+0)}&\mathscr{D}_j^{(4p+1)}\\\hline\mathscr{D}_j^{(4p+2)}&\mathscr{D}_j^{(4p+3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\\\hline\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}}\end{array}\right)\\&=\mathcal{H}_0\mathscr{D}_j^{(4p+0)}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}+\mathcal{H}_0\mathscr{D}_j^{(4p+1)}\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}}+\mathcal{H}_1\mathscr{D}_j^{(4p+2)}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}+\mathcal{H}_1\mathscr{D}_j^{(4p+3)}\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

或者利用无穷维矩阵序列符号 $\mathcal{A}_{(u)}=(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})_{[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]}$, 采用一般化表示方式将数字图像正交小波包迭代过程写成如下公式: 当 $\xi=u,u-1,\cdots,2,1,0$ 时

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j-\xi+1}^{(\lambda)}&=\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(\xi)}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+0)}&\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+1)}\\\hline\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+2)}&\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+3)}\end{array}\right)\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(\xi)}^{\mathrm{T}}\\&=\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\xi)}\middle|\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+0)}&\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+1)}\\\hline\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+2)}&\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\\\hline\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\end{array}\right)\\&=\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+0)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+1)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\\&\quad+\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+2)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(4\lambda+3)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

其中 $\lambda=4^{\xi}p,(4^{\xi}p+1),\cdots,(4^{\xi}p+4^{\xi}-1)$.

证明　这个定理表达的是一个酉算子的逆算子及其表示问题，建议读者完成这个定理的证明.

6.5　光场小波与光场小波包理论

本节将引入小波光场、抽象光源、抽象数字图像、超级数字图像或基本物理图像等概念，研究它们的二维小波变换和二维小波包变换.

6.5.1　小波光场与基本物理图像

这里将把光场的概念从经典形式拓展到小波光场，把经典的点光源拓展为抽象光源，并据此引入超级数字图像或基本物理图像的概念.

(α) 小波光场

把光场理解为平面上各个点上的“点光源”的叠加，这里的“点光源”不再是“经典点光源”，而是“尺度函数点光源(尺度点光源)”、“小波函数点光源(小波点光源)”和“小波包函数点光源(小波包点光源)”，与“经典点光源”不同的是，“尺度点光源”“小波点光源”和“小波包点光源”不再是“没有大小的光源”，它们都是具有一定尺寸和一定结构的“数字点光源”，这些“数字点光源”的尺寸由尺度函数、小波函数和小波包函数的尺度决定. 这样的光场称为小波光场.

经典光场与小波光场另一个显著的区别是，“经典光源”构成光场的模式要求平面上每个点或者在某个矩形或长方形内的每个点都必须被考虑；而“抽象光源”构成小波光场的模式只考虑平面上的二进网格点，而且，当“抽象光源”的尺寸是 $s=2^{-j}$ 时，光场中的点就只包括形式为 $\{(2^{-j}m,2^{-j}n);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 的网格点. 在这样的条件下，具体到每个网格点 $(2^{-j}m,2^{-j}n)$ 上的“抽象光源”，除去原点之外，最

直接的也是尺寸最大的“抽象光源”就是尺度为 $s=2^{-j}$ 的二维尺度函数、二维小波函数和二维小波包函数：

$$\{Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y)=2^jQ^{(p)}(2^jx-m,2^jy-n);p=0,1,2,\cdots\}$$

除此之外，同样是在这个点上，还存在大量其他尺寸的“抽象光源”，只不过这些“抽象光源”的尺寸比此前罗列的都更小，实际上，对于任意的 $k>j$，若选择两个整数满足 $(u,v)=(2^{k-j}m,2^{k-j}n)$，那么，$(2^{-k}u,2^{-k}v)=(2^{-j}m,2^{-j}n)$，即纵横最小间隔为 2^{-j} 的网格点 $(2^{-j}m,2^{-j}n)$，同时也是纵横最小间隔为 2^{-k} 的网格点 $(2^{-k}u,2^{-k}v)=(2^{-j}m,2^{-j}n)$，只要 $(u,v)=(2^{k-j}m,2^{k-j}n)$ 即可．因此，每个网格点 $(2^{-j}m,2^{-j}n)$ 上的“抽象光源”，除了已经罗列出的“抽象光源”，还包括如下尺寸的“抽象光源”：对于 $(u,v)=(2^{k-j}m,2^{k-j}n),k=(j+1),(j+2),\cdots$，

$$\{Q_{k;u,v}^{(p)}(x,y)=2^kQ^{(p)}(2^kx-u,2^ky-v);p=0,1,2,\cdots\}$$

这样似乎产生了某种多样性，但是这没有任何问题，因为在这个理论的后续分析和研究过程中，每次使用的相互有关联的“抽象光源”都是正交的，虽然它们具有相同的中心位置，但因为它们是不同的二维小波包函数而且具有不同的尺寸．因此，按照二维小波包函数的定义关系产生的不同小波包级别的二维小波包函数系本身是整数平移规范正交系，同时，这些整数平移规范正交系之间也是相互正交的．

(β) 数字图像小波包分解

按照上述方式理解“抽象光源”和小波光场，那么，在“抽象光源”尺寸固定的条件下，对于固定的小波包级别 p，相应光场表现为平面固定间隔 2^{-j} 的全部网格点 $\{(2^{-j}m,2^{-j}n);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 上“抽象光源”的叠加，每个网格点上的“抽象光源”具有一定的幅度或者强度或者能量，因此，如果只从平面网格点上“抽象光源”的强度数值分布来看，那么，一个小波光场就很像一个数字图像，两者的本质差异在于，数字图像在网格点上的“灰度值”(或者光强)只是一个孤立的数字，而小波光场在网格点上的幅度或者强度或者能量，代表一个最小的局部小波光场，即这个网格点上的“抽象光源”的总能量．正因为这样的差异，不妨把小波光场称为“抽象数字图像”，这个抽象数字图像在网格点或者“像素” $(2^{-j}m,2^{-j}n)$ 上的表现不是一个灰度值，而是一个具有一定强度或者能量的“抽象光源”：

$$d_{j;m,n}^{(p)}Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y)=2^jd_{j;m,n}^{(p)}Q^{(p)}(2^jx-m,2^jy-n)$$

其中 $d_{j;m,n}^{(p)}$ 是这个“抽象光源”能量的表示，$Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y)$ 是这个像素上的单位能量的“抽象光源”，即

$$\left\|Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y)\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\left|Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y)\right|^2dxdy=1$$

利用以前已经定义过的无穷维矩阵

$$\mathscr{D}_j^{(p)} = \{d_{j,m,n}^{(p)};(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}\in\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}),\quad j\in\mathbb{Z},\quad p=0,1,2,\cdots$$

与之相应的物理图像 $f_j^{(p)}(x,y)$ 表现为如下的二维正交小波包函数级数：

$$f_j^{(p)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j;m,n}^{(p)} Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y)$$

在这种对应关系中，把无穷维矩阵称为数字图像，但这个时候，与此相似的小波光场或者抽象数字图像可以表示为 $\mathfrak{D}_j^{(p)}$：

$$\mathfrak{D}_j^{(p)} = \{d_{j;m,n}^{(p)} Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y) = 2^j d_{j;m,n}^{(p)} Q^{(p)}(2^j x-m,2^j y-n);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

与此相应地，把能量标志恒等于 1 的特殊小波光场称为“超级数字图像”或者“基本物理图像”，

$$\mathscr{Q}_j^{(p)} = \{Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y) = 2^j Q^{(p)}(2^j x-m,2^j y-n);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

6.5.2　超级数字图像小波算法

因为基本物理图像或超级数字图像各个“像素”上的“超级灰度值”实际上就是各级二维小波包函数伸缩平移规范正交函数系，所以，可以把基本物理图像或超级数字图像“当作”一个数字图像进行小波变换，这就是超级数字图像小波算法.

(α) 超级数字图像小波分解

定理 6.34 (超级数字图像小波分解)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，五个“超级数字图像”：

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} &= \{Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}\\ \mathscr{Q}_j^{(\ell)} &= \{Q_{j;v,w}^{(\ell)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}^2\},\quad \ell=0,1,2,3\end{aligned}$$

之间存在如下的小波分解计算关系：

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{Q}_j^{(0)} & \mathscr{Q}_j^{(1)}\\ \hline \mathscr{Q}_j^{(2)} & \mathscr{Q}_j^{(3)}\end{array}\right) &= \mathcal{A}^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\\ \hline \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\end{array}\right)\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}(\mathcal{H}_0\mid\mathcal{H}_1)\\ &= \left(\begin{array}{c|c}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{H}_1\\ \hline \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{H}_1\end{array}\right)\end{aligned}$$

证明　在二维多分辨率分析中，二维尺度子空间的正交直和分解关系：

$$\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)} = \mathbb{Q}_j^{(0)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(1)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(2)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(3)},\quad j\in\mathbb{Z}$$

完全来自于它们的规范正交基之间的如下(定义)关系：对于 $(v,w)\in\mathbb{Z}^2$，

$$\begin{cases} Q_{j;v,w}^{(0)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(0)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y) \\ Q_{j;v,w}^{(1)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(1)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y) \\ Q_{j;v,w}^{(2)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(2)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y) \\ Q_{j;v,w}^{(3)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(3)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y) \end{cases}$$

上述关系是从 $\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}$ 的规范正交基 $\{Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$ 过渡到 $\mathbb{Q}_{j+1}^{(0)}$ 的另一组规范正交基的计算关系，这组新的规范正交基由四组相互正交的规范正交函数系 $\{Q_{j;v,w}^{(\ell)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}^2\},\ell=0,1,2,3$ 组成，而它们分别是尺度子空间和小波子空间 $\mathbb{Q}_j^{(\ell)},\ell=0,1,2,3$ 的规范正交基.

采用分块矩阵乘法规则重新表达上述分解关系就得到定理的证明，比如从

$$Q_{j;v,w}^{(0)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(0)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y), \quad (v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

可以直接验证 $\mathcal{Q}_j^{(0)} = \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{H}_0$. 更多的证明细节建议读者给予补充.

注释：函数矩阵 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} = \{Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$ 是数字分辨率为 $\infty\times\infty$ 的超级数字图像，它在像素 $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ 处的"超级灰度值"是函数 $Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y)$，可以大致理解为超级数字图像 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}$ 在像素 $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ 处的"微光场"(经典数字图像在一个像素 $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ 处的灰度值是一个数字 ϖ，在这种情况下，"微光场"凝聚为绝对的点光场 $\varpi\delta(x-m,y-n)$).

另外，函数矩阵 $\mathcal{Q}_j^{(\ell)} = \{Q_{j;v,w}^{(\ell)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}^2\},\ell=0,1,2,3$ 是四个数字分辨率为 $[0.5\infty]\times[0.5\infty]$ 的超级数字图像，它们在像素 $(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 处的"超级灰度值"分别是函数 $Q_{j;v,w}^{(\ell)}(x,y),\ell=0,1,2,3$.

(β) 超级数字图像小波合成

定理 6.35 (超级数字图像小波合成)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，五个"超级数字图像"：

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} = \{Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$
$$\mathcal{Q}_j^{(\ell)} = \{Q_{j;v,w}^{(\ell)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}^2\}, \quad \ell=0,1,2,3$$

之间存在如下的小波合成计算关系：

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} &= \bar{\mathcal{A}}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{Q}_j^{(0)} & \mathscr{Q}_j^{(1)} \\ \hline \mathscr{Q}_j^{(2)} & \mathscr{Q}_j^{(3)}\end{array}\right)\mathcal{A}^* \\ &= \left(\bar{\mathcal{H}}_0 \middle| \bar{\mathcal{H}}_1\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{Q}_j^{(0)} & \mathscr{Q}_j^{(1)} \\ \hline \mathscr{Q}_j^{(2)} & \mathscr{Q}_j^{(3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\mathcal{H}_0^* \\ \hline \mathcal{H}_1^*\end{array}\right) \\ &= \bar{\mathcal{H}}_0\mathscr{Q}_j^{(0)}\mathcal{H}_0^* + \bar{\mathcal{H}}_0\mathscr{Q}_j^{(1)}\mathcal{H}_1^* + \bar{\mathcal{H}}_1\mathscr{Q}_j^{(2)}\mathcal{H}_0^* + \bar{\mathcal{H}}_1\mathscr{Q}_j^{(3)}\mathcal{H}_1^*\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{A}^{\mathrm{T}}$ 表示无穷维矩阵 $\mathcal{A}$ 的转置矩阵，$\bar{\mathcal{A}}$ 表示无穷维矩阵 $\mathcal{A}$ 的共轭矩阵，$\mathcal{A}^*$ 表示无穷维矩阵 $\mathcal{A}$ 的复数共轭转置矩阵，即 $\mathcal{A}^* = \bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}$.

证明 一种证明方法是可以直接利用定理 6.34 的小波分解关系的逆给出证明. 另一种证明方法是利用二维尺度方程和小波方程组的如下逆关系表达公式：对于 $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\begin{aligned}Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y) = &\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(0)}(m-2v,n-2w)Q_{j;v,w}^{(0)}(x,y) \\ &+ \sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(1)}(m-2v,n-2w)Q_{j;v,w}^{(1)}(x,y) \\ &+ \sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(2)}(m-2v,n-2w)Q_{j;v,w}^{(2)}(x,y) \\ &+ \sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(3)}(m-2v,n-2w)Q_{j;v,w}^{(3)}(x,y)\end{aligned}$$

或者

$$Q_{j+1;m,n}^{(0)}(x,y) = \sum_{\xi=0}^{3} \sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(\xi)}(m-2v,n-2w)Q_{j;v,w}^{(\xi)}(x,y)$$

结合分块矩阵乘法规则直接验证定理.

6.6 有限数字图像小波理论

本节将在有限维矩阵空间中，研究作为数字矩阵的有限维数字图像的小波变换理论. 有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = \{d_{j+1,m,n}^{(0)}; (m,n) \in \mathbb{Z}_{N\times N}\}$ 理解为 $N\times N$ 复数矩阵全体构成的线性空间：

$$\mathbb{C}^{N\times N} = \{\mathbb{A} = (a_{r,s})_{N\times N}; a_{r,s} \in \mathbb{C},\ (r,s) \in \mathbb{Z}_{N\times N}\}$$

中的一个点或者向量或者矩阵，其中

$$\mathbb{Z}_{N\times N} = \{(r,s); 0 \leqslant r \leqslant N-1, 0 \leqslant s \leqslant N-1\}$$

表示 $N\times N$ 个二元非负整数组构成的集合. 假设 $N = 2^{\Delta}$，Δ 是一个自然数.

6.6.1　二维有限脉冲响应多分辨率分析

将一维多分辨分析的低通滤波器系数记为 $\mathbf{h}_0=\{h_{0,n}=h_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$，带通滤波器系数记为 $\mathbf{h}_1=\{h_{1,n}=g_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$，假设低通和带通滤波器系数序列 $\mathbf{h}_0$ 和 $\mathbf{h}_1$ 只有有限项非零. 设 $h_{0,0}h_{0,M-1}\neq 0$ 且当 $n<0$ 或 $n>(M-1)$ 时，$h_{0,n}=0$，M 是偶数. 由 $h_{1,n}=(-1)^{2\kappa+1-n}\overline{h}_{0,2\kappa+1-n}$，$n\in\mathbb{Z}$ 确定对应的带通滤波器系数序列 $\mathbf{h}_1$，选择整数 κ 满足 $2\kappa=M-2$ 或者 $\kappa=0.5M-1$，经过这样的选择，带通滤波器系数序列中可能不为 0 的项是

$$
\begin{aligned}
h_{1,0}&=(-1)\overline{h}_{0,M-1}\\
h_{1,1}&=(+1)\overline{h}_{0,M-2}\\
h_{1,2}&=(-1)\overline{h}_{0,M-3}\\
h_{1,3}&=(+1)\overline{h}_{0,M-4}\\
&\ \ \vdots\\
h_{1,M-2}&=(-1)\overline{h}_{0,1}\\
h_{1,M-1}&=(+1)\overline{h}_{0,0}
\end{aligned}
$$

除此之外，带通滤波器系数序列其余的项都是 0.

将低通和带通滤波器系数序列 $\mathbf{h}_0$ 和 $\mathbf{h}_1$ 周期化，共同的周期长度是 $N=2^{\Delta}>M$，它们在一个周期内的取值分别构成如下的维数是 N 的列向量：

$$\mathbf{h}_\ell=\{h_{\ell,0},h_{\ell,1},\cdots,h_{\ell,M-2},h_{\ell,M-1},h_{\ell,M},\cdots,h_{\ell,N-1}\}^{\mathrm{T}},\quad \ell=0,1$$

其中 $h_{\ell,M}=\cdots=h_{\ell,N-1}=0,\ell=0,1$. 定义如下符号：对于整数 m,

$$\mathbf{h}_\ell^{(m)}=\{h_{\ell,\mathrm{mod}(n-m,N)};n=0,1,2,\cdots,N-1\}^{\mathrm{T}},\quad \ell=0,1$$

容易证明，当 $0\leqslant m,k\leqslant 0.5N-1$ 时，成立如下规范正交关系：

$$
\begin{cases}
\left\langle \mathbf{h}_\ell^{(2m)},\mathbf{h}_\ell^{(2k)}\right\rangle=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}h_{\ell,\mathrm{mod}(n-2m,N)}\overline{h}_{\ell,\mathrm{mod}(n-2k,N)}=\delta(m-k),\ell=0,1,\\
\left\langle \mathbf{h}_0^{(2m)},\mathbf{h}_1^{(2k)}\right\rangle=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}h_{0,\mathrm{mod}(n-2m,N)}\overline{h}_{1,\mathrm{mod}(n-2k,N)}=0.
\end{cases}
$$

从而，$\{\mathbf{h}_\ell^{(2k)};k=0,1,2,\cdots,(0.5N-1),\ell=0,1,\}$ 是 $\mathbb{C}^N$ 的规范正交基.

引入两个维数是 $N\times(0.5N)$ 的矩阵：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell &= \left[h_{\ell,n,k} = h_{\ell,\mathrm{mod}(n-2k,N)}; 0 \leqslant n \leqslant N-1, 0 \leqslant k \leqslant 0.5N-1\right]_{N\times\frac{N}{2}} \\ &= \left[\mathbf{h}_\ell^{(2k)}; 0 \leqslant k \leqslant 0.5N-1\right]_{N\times\frac{N}{2}} \\ &= \left[\mathbf{h}_\ell^{(0)} \middle| \mathbf{h}_\ell^{(2)} \middle| \mathbf{h}_\ell^{(4)} \middle| \cdots \middle| \mathbf{h}_\ell^{(N-2)}\right], \quad \ell = 0,1\end{aligned}$$

为了直观起见，可以将这两个 $N\times(0.5N)$ 矩阵按照列元素示意性表示如下：

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_0 = \begin{pmatrix} h_0 & 0 & & h_2 \\ h_1 & 0 & & h_3 \\ \vdots & h_0 & & \vdots \\ \vdots & h_1 & & \vdots \\ h_{M-1} & \vdots & \cdots & h_{M-1} \\ 0 & h_{M-1} & & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & h_0 \\ 0 & 0 & & h_1 \end{pmatrix}_{N\times\frac{N}{2}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}_1 = \begin{pmatrix} g_0 & 0 & & g_2 \\ g_1 & 0 & & g_3 \\ \vdots & g_0 & & \vdots \\ \vdots & g_1 & & \vdots \\ g_{M-1} & \vdots & \cdots & g_{M-1} \\ 0 & g_{M-1} & & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & g_0 \\ 0 & 0 & & g_1 \end{pmatrix}_{N\times\frac{N}{2}}$$

而且，它们的复数共轭转置矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*, \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*$ 都是 $(0.5N)\times N$ 矩阵，可以按照行元素示意性表示为

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^* = \begin{pmatrix} \overline{h}_0 & \overline{h}_1 & \cdots & \cdots & \overline{h}_{M-1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \overline{h}_0 & \overline{h}_1 & \cdots & \overline{h}_{M-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & & \vdots \\ \overline{h}_2 & \overline{h}_3 & \cdots & \cdots & \overline{h}_{M-1} & 0 & \cdots & 0 & \overline{h}_0 & \overline{h}_1 \end{pmatrix}_{\frac{N}{2}\times N}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^* = \begin{pmatrix} \overline{g}_0 & \overline{g}_1 & \cdots & \cdots & \overline{g}_{M-1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \overline{g}_0 & \overline{g}_1 & \cdots & \overline{g}_{M-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & & \vdots \\ \overline{g}_2 & \overline{g}_3 & \cdots & \cdots & \overline{g}_{M-1} & 0 & \cdots & 0 & \overline{g}_0 & \overline{g}_1 \end{pmatrix}_{\frac{N}{2}\times N}$$

利用这些记号定义一个 $N\times N$ 的分块为 1×2 的矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$：

$$\mathcal{A}=(\mathcal{H}_0\mid\mathcal{H}_1)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} h_0 & 0 & & h_2 & g_0 & 0 & & g_2\\ h_1 & 0 & & h_3 & g_1 & 0 & & g_3\\ \vdots & h_0 & & \vdots & \vdots & g_0 & & \vdots\\ \vdots & h_1 & & \vdots & \vdots & g_1 & & \vdots\\ h_{M-1} & \vdots & \cdots & h_{M-1} & g_{M-1} & \vdots & \cdots & g_{M-1}\\ 0 & h_{M-1} & & 0 & 0 & g_{M-1} & & 0\\ \vdots & 0 & & \vdots & \vdots & 0 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots & \vdots & & 0\\ \vdots & \vdots & & h_0 & \vdots & \vdots & & g_0\\ 0 & 0 & & h_1 & 0 & 0 & & g_1 \end{array}\right)_{N\times N}$$

从而 $\mathcal{A}=(\mathcal{H}_0\mid\mathcal{H}_1)$ 的复数共轭矩阵是

$$\mathcal{A}^*=\left(\begin{array}{c}\mathcal{H}_0^*\\ \hline \mathcal{H}_1^*\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccccccccc} \bar{h}_0 & \bar{h}_1 & \cdots & \cdots & \bar{h}_{M-1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \bar{h}_0 & \bar{h}_1 & \cdots & \bar{h}_{M-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & & \vdots\\ \bar{h}_2 & \bar{h}_3 & \cdots & \cdots & \bar{h}_{M-1} & 0 & \cdots & 0 & \bar{h}_0 & \bar{h}_1\\ \hline \bar{g}_0 & \bar{g}_1 & \cdots & \cdots & \bar{g}_{M-1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \bar{g}_0 & \bar{g}_1 & \cdots & \bar{g}_{M-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & & \vdots\\ \bar{g}_2 & \bar{g}_3 & \cdots & \cdots & \bar{g}_{M-1} & 0 & \cdots & 0 & \bar{g}_0 & \bar{g}_1 \end{array}\right)_{N\times N}$$

(α) 有限响应多分辨率分析的酉性

利用前述记号和定义，可以得到支撑有限数字图像小波理论和小波包理论具有十分优美理论体系的重要结果，即有限响应多分辨率分析的酉性定理.

定理 6.36 (有限响应多分辨率分析的酉性)　分块矩阵 $\mathcal{A}=(\mathcal{H}_0\mid\mathcal{H}_1)$ 是一个 $N\times N$ 的酉矩阵.

证明　利用无穷维矩阵记号的定义以及一维有限脉冲响应多分辨率分析的性质，可以直接演算得到

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*=(\mathcal{H}_0\mid\mathcal{H}_1)\left(\begin{array}{c}\mathcal{H}_0^*\\ \hline \mathcal{H}_1^*\end{array}\right)=\mathcal{H}_0\mathcal{H}_0^*+\mathcal{H}_1\mathcal{H}_1^*=\mathcal{I}$$

而且

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}=\left(\begin{array}{c}\mathcal{H}_0^*\\ \hline \mathcal{H}_1^*\end{array}\right)(\mathcal{H}_0\mid\mathcal{H}_1)=\begin{pmatrix}\mathcal{H}_0^*\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0^*\mathcal{H}_1\\ \mathcal{H}_1^*\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_1^*\mathcal{H}_1\end{pmatrix}=\mathcal{I}$$

其中

$$\mathcal{H}_0\mathcal{H}_0^* + \mathcal{H}_1\mathcal{H}_1^* = \mathcal{I}_{N\times N}$$
$$\mathcal{H}_0^*\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1^*\mathcal{H}_1 = \mathcal{I}_{[0.5N]\times[0.5N]}$$
$$\mathcal{H}_0^*\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^*\mathcal{H}_0 = \mathcal{O}_{[0.5N]\times[0.5N]}$$

所以，$\mathcal{A} = (\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_1)$ 是一个 $N \times N$ 的酉矩阵. 完成证明.

(β) 矩阵空间单位算子的正交分解

在有限脉冲响应的二维多分辨率分析理论体系中，利用矩阵 $\mathcal{A} = (\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_1)$ 的酉性，可以获得矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上单位算子的一种正交分解，从而为这个矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 建立正交直和分解提供一种新的途径.

定理 6.37 (单位算子的正交分解)　在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上，单位算子存在如下的正交分解：

$$\mathbb{A} = \sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1} \mathcal{H}_\varsigma \mathcal{H}_\varsigma^* \mathbb{A} \bar{\mathcal{H}}_\zeta \mathcal{H}_\zeta^{\mathrm{T}} = \sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1} \mathbb{A}^{(\varsigma\zeta)_2}, \quad \mathbb{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$$

其中

$$\mathbb{A}^{(\varsigma\zeta)_2} = \mathcal{H}_\varsigma \mathcal{H}_\varsigma^* \mathbb{A} \bar{\mathcal{H}}_\zeta \mathcal{H}_\zeta^{\mathrm{T}}, \quad (\varsigma,\zeta) \in \{0,1\}\times\{0,1\}$$

而且，对于 $(\varsigma,\zeta,s,t) \in \{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}$，

$$\left\langle \mathbb{A}^{(\varsigma\zeta)_2}, \mathbb{A}^{(st)_2} \right\rangle_{\mathbb{C}^{M\times N}} = \left\langle \mathcal{H}_\varsigma \mathcal{H}_\varsigma^* \mathbb{A} \bar{\mathcal{H}}_\zeta \mathcal{H}_\zeta^{\mathrm{T}}, \mathcal{H}_s \mathcal{H}_s^* \mathbb{A} \bar{\mathcal{H}}_t \mathcal{H}_t^{\mathrm{T}} \right\rangle_{\mathbb{C}^{M\times N}} = 0, \quad (\varsigma,\zeta) \neq (s,t)$$

证明　建议读者完成这个定理的证明.

(γ) 矩阵空间的正交直和分解

利用此前建立的矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上单位算子的正交分解，可以定义这个矩阵空间上的四个正交投影算子，并利用这四个投影算子的性质建立矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 的一种正交直和分解.

定理 6.38 (矩阵空间的正交直和分解)　在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上，如下四个线性子空间：

$$\mathfrak{C}^{(\varsigma\zeta)_2} = \{\mathbb{A}^{(\varsigma\zeta)_2} = \mathcal{H}_\varsigma \mathcal{H}_\varsigma^* \mathbb{A} \bar{\mathcal{H}}_\zeta \mathcal{H}_\zeta^{\mathrm{T}}, \mathbb{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}\}, \quad (\varsigma,\zeta) \in \{0,1\}\times\{0,1\}$$

是相互正交的，而且，

$$\mathbb{C}^{N\times N} = \mathfrak{C}^{(00)_2} \oplus \mathfrak{C}^{(01)_2} \oplus \mathfrak{C}^{(10)_2} \oplus \mathfrak{C}^{(\varsigma\zeta)_2} = \sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1} \mathfrak{C}^{(\varsigma\zeta)_2}$$

证明　这个定理证明的关键是

$$\mathcal{H}_0^*\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^*\mathcal{H}_0 = \mathcal{O}_{[0.5N]\times[0.5N]}$$

而且

$$\mathcal{H}_0\mathcal{H}_0^* + \mathcal{H}_1\mathcal{H}_1^* = \mathcal{I}_{N\times N}$$
$$\mathcal{H}_0^*\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1^*\mathcal{H}_1 = \mathcal{I}_{[0.5N]\times[0.5N]}$$

从而得到

$$\sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1}\mathbb{A}^{(\varsigma\zeta)_2} = \sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1}\mathcal{H}_\varsigma\mathcal{H}_\varsigma^*\mathbb{A}\bar{\mathcal{H}}_\zeta\mathcal{H}_\zeta^{\mathrm{T}} = \left[\sum_{\varsigma=0}^{1}\mathcal{H}_\varsigma\mathcal{H}_\varsigma^*\right]\mathbb{A}\left[\sum_{\zeta=0}^{1}\bar{\mathcal{H}}_\zeta\mathcal{H}_\zeta^{\mathrm{T}}\right] = \mathbb{A}$$

而且，对于 $(\varsigma,\zeta,s,t)\in\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}$，$(\varsigma,\zeta)\neq(s,t)$，

$$\begin{aligned}\left[\mathbb{A}^{(\varsigma\zeta)_2}\right]\left[\mathbb{A}^{(st)_2}\right]^* &= \left[\mathcal{H}_\varsigma\mathcal{H}_\varsigma^*\mathbb{A}\bar{\mathcal{H}}_\zeta\mathcal{H}_\zeta^{\mathrm{T}}\right]\left[\mathcal{H}_s\mathcal{H}_s^*\mathbb{A}\bar{\mathcal{H}}_t\mathcal{H}_t^{\mathrm{T}}\right]^* \\ &= \mathcal{H}_\varsigma\mathcal{H}_\varsigma^*\mathbb{A}\bar{\mathcal{H}}_\zeta\left[\mathcal{H}_\zeta^{\mathrm{T}}\bar{\mathcal{H}}_t\right]\mathcal{H}_t^{\mathrm{T}}\mathbb{A}^*\mathcal{H}_s\mathcal{H}_s^* \\ &= \mathcal{H}_\varsigma\mathcal{H}_\varsigma^*\mathbb{A}\bar{\mathcal{H}}_\zeta\left[\mathcal{H}_\zeta^{\ *}\mathcal{H}_t\right]\mathcal{H}_t^{\mathrm{T}}\mathbb{A}^*\mathcal{H}_s\mathcal{H}_s^* \\ &= \mathcal{O}_{N\times N}\end{aligned}$$

剩余的部分留给读者进行补充. 建议读者完成整个定理的证明.

6.6.2　有限数字图像的小波分解

利用前述建立的矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 正交直和分解公式:

$$\mathbb{C}^{N\times N} = \mathfrak{C}^{(00)_2}\oplus\mathfrak{C}^{(01)_2}\oplus\mathfrak{C}^{(10)_2}\oplus\mathfrak{C}^{(\varsigma\zeta)_2} = \sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1}\mathfrak{C}^{(\varsigma\zeta)_2}$$

可以刻画二维有限数字图像的小波分解，在各个不同的正交直和分解子空间选择不同的规范正交基的条件下，可以得到数字图像小波分解的不同表达形式.

(α) 有限数字图像小波分解定义

有限数字图像的二维小波分解定义　从 $\{d_{j+1,m,n}^{(0)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}$ 分解为 $\{d_{j,v,w}^{(\ell)};0\leqslant v,w\leqslant(0.5N-1)\},\ell=0,1,2,3$ 的小波分解定义为

$$\begin{cases} d_{j;v,w}^{(0)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\bar{h}^{(0)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(0)} \\ d_{j;v,w}^{(1)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\bar{h}^{(1)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(0)} \\ d_{j;v,w}^{(2)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\bar{h}^{(2)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(0)} \\ d_{j;v,w}^{(3)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\bar{h}^{(3)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(0)} \end{cases}$$

或者写成紧凑形式：

$$d_{j;v,w}^{(\ell)}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\overline{h}^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(0)},\quad \ell=0,1,2,3$$

其中 $v,w=0,1,\cdots,(0.5N-1)$.

引入有限数字图像记号如下：

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\{d_{j+1,m,n}^{(0)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}\in\mathbb{C}^{N\times N}$$
$$\mathscr{D}_{j}^{(\ell)}=\{d_{j,v,w}^{(\ell)};0\leqslant v,w\leqslant(0.5N-1)\}\in\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)},\quad \ell=0,1,2,3$$

定理 6.39 (有限数字图像小波分解) 在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上的任何有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\{d_{j+1,m,n}^{(0)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}\in\mathbb{C}^{N\times N}$，它的二维小波分解是如下表示的四个子图像：

$$\mathscr{D}_{j}^{(\ell)}=\{d_{j,v,w}^{(\ell)};0\leqslant v,w\leqslant(0.5N-1)\}\in\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)},\quad \ell=0,1,2,3$$

那么，$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 与 $\mathscr{D}_{j}^{(\ell)},\ell=0,1,2,3$ 之间具有如下的分块矩阵计算关系：

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j}^{(0)} & \mathscr{D}_{j}^{(1)}\\ \hline \mathscr{D}_{j}^{(2)} & \mathscr{D}_{j}^{(3)}\end{array}\right)=\mathcal{A}^{*}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\mathcal{A}}=\left(\begin{array}{c}\mathcal{H}_0^{*}\\ \hline \mathcal{H}_1^{*}\end{array}\right)\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\left(\bar{\mathcal{H}}_0\,\middle|\,\bar{\mathcal{H}}_1\right)$$
$$=\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{H}_0^{*}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_0 & \mathcal{H}_0^{*}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_1\\ \hline \mathcal{H}_1^{*}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_0 & \mathcal{H}_1^{*}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_1\end{array}\right)$$

证明 利用分块矩阵 $\mathcal{A}=(\mathcal{H}_0\mid\mathcal{H}_1)$ 的定义直接验证即可. 建议读者写出详细的证明过程.

(β) 有限数字图像小波链分解

根据有限数字图像二维小波分解定义，当将要进行分解的数字图像不是 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 而是 $(0.5N)\times(0.5N)$ 的数字图像 $\mathscr{D}_{j}^{(0)}$ 时，小波分解仍然产生四个数字图像，只不过这四个数字图像的纵横数字分辨率是 $(0.25N)\times(0.25N)$，比 $\mathscr{D}_{j}^{(0)}$ 下降一半. 对于非负整数 u，如果原始数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\{d_{j+1,m,n}^{(0)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}$ 经过多次小波分解后，需要将 $\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}$ 再次分解以计算 $\mathscr{D}_{j-u}^{(\ell)},\ell=0,1,2,3$ 时，计算公式的格式完全一样，只不过这时得到的四个子图像 $\mathscr{D}_{j-u}^{(\ell)},\ell=0,1,2,3$ 的尺寸或数字分辨率是 $[2^{-u}N]\times[2^{-u}N]$. 这样从 $N\times N$ 的数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 出发，经过第 0 次，第 1 次，$\cdots$，第

u 次二维小波分解，最终将得到如下的子图像列：

$$\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\ell)}=\{d_{j-\xi,v,w}^{(\ell)};0\leqslant v,w\leqslant(2^{-\xi}N-1)\}\in\mathbb{C}^{[2^{-\xi}N]\times[2^{-\xi}N]},\quad \ell=0,1,2,3,\quad \xi=0,1,\cdots,u$$

把这个过程称为数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 的二维小波链分解.

定理 6.40 (有限数字图像小波链分解)　矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上的任何有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\{d_{j+1,m,n}^{(0)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}\in\mathbb{C}^{N\times N}$，它的二维小波链分解表示为

$$\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\ell)}=\{d_{j-\xi,v,w}^{(\ell)};0\leqslant v,w\leqslant(2^{-\xi}N-1)\}\in\mathbb{C}^{[2^{-\xi}N]\times[2^{-\xi}N]},\quad \ell=0,1,2,3,\quad \xi=0,1,\cdots,u$$

那么，$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 的二维小波链分解具有如下计算公式：对于 $\xi=0,1,\cdots,u$，

$$\begin{cases}
d_{j-\xi;v,w}^{(0)}=\sum\limits_{n=0}^{(2^{-\xi}N-1)}\sum\limits_{m=0}^{(2^{-\xi}N-1)}\overline{h}^{(0)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-\xi;m,n}^{(0)}\\
d_{j-\xi;v,w}^{(1)}=\sum\limits_{n=0}^{(2^{-\xi}N-1)}\sum\limits_{m=0}^{(2^{-\xi}N-1)}\overline{h}^{(1)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-\xi;m,n}^{(0)}\\
d_{j-\xi;v,w}^{(2)}=\sum\limits_{n=0}^{(2^{-\xi}N-1)}\sum\limits_{m=0}^{(2^{-\xi}N-1)}\overline{h}^{(2)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-\xi;m,n}^{(0)}\\
d_{j-\xi;v,w}^{(3)}=\sum\limits_{n=0}^{(2^{-\xi}N-1)}\sum\limits_{m=0}^{(2^{-\xi}N-1)}\overline{h}^{(3)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-\xi;m,n}^{(0)}
\end{cases}$$

或者写成紧凑形式：

$$d_{j-\xi;v,w}^{(\ell)}=\sum_{n=0}^{(2^{-\xi}N-1)}\sum_{m=0}^{(2^{-\xi}N-1)}\overline{h}^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-\xi;m,n}^{(0)},\quad \ell=0,1,2,3$$

其中，$v,w=0,1,\cdots,(2^{-\xi}N-1)$.

证明　在证明过程中，要注意在第 $\xi=0,1,\cdots,u$ 次进行二维小波分解时，被分解和分解得到的数字图像的尺寸或数字分辨率. 建议读者补充完成证明.

(γ) 有限数字图像小波链矩阵分解

对于任意非负整数 u，引入两个 $[2^{-u}N]\times[2^{-(u+1)}N]$ 矩阵 $\mathcal{H}_0^{(u)},\mathcal{H}_1^{(u)}$，它们分别与 $\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$ 的构造方法相同，比如当 $u=0$ 时，$\mathcal{H}_0^{(0)}=\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1^{(0)}=\mathcal{H}_1$ 是 $N\times[2^{-1}N]$ 矩阵，当 $u=1$ 时，$\mathcal{H}_0^{(\ell)}=\mathcal{H}_0^{(1)},\mathcal{H}_1^{(\ell)}=\mathcal{H}_1^{(1)}$ 是 $[2^{-1}N]\times[2^{-2}N]$ 矩阵. 利用这些矩阵记号定义 $[2^{-u}N]\times[2^{-u}N]$ 矩阵 $\mathcal{A}_{(u)}=(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})$，比如当 $u=0$ 时，

$$\mathcal{A}_{(u)} = (\mathcal{H}_0^{(u)} \mid \mathcal{H}_1^{(u)}) = \mathcal{A} = (\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_1)$$

容易证明$[2^{-u}N]\times[2^{-u}N]$矩阵$\mathcal{A}_{(u)} = (\mathcal{H}_0^{(u)} \mid \mathcal{H}_1^{(u)})$是酉矩阵.

定理 6.41 (有限数字图像小波链矩阵分解) 矩阵空间$\mathbb{C}^{N\times N}$上的任何有限数字图像$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = \{d_{j+1,m,n}^{(0)}; 0\leqslant m,n\leqslant (N-1)\}\in\mathbb{C}^{N\times N}$，它的二维小波链分解表示为

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\ell)} = \{d_{j-\xi,v,w}^{(\ell)}; 0\leqslant v,w\leqslant (2^{-\xi}N-1)\}\in\mathbb{C}^{[2^{-\xi}N]\times[2^{-\xi}N]},\\ \ell = 0,1,2,3,\\ \xi = 0,1,\cdots,u\end{aligned}$$

那么，$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$的二维小波链分解具有如下计算公式：对于$\xi = 0,1,\cdots,u$,

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(0)} & \mathscr{D}_{j-\xi}^{(1)}\\ \hline \mathscr{D}_{j-\xi}^{(2)} & \mathscr{D}_{j-\xi}^{(3)}\end{array}\right) = \mathcal{A}_{(\xi)}^{*}\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(0)}\bar{\mathcal{A}}_{(\xi)} = \left(\begin{array}{c}[\mathcal{H}_0^{(\xi)}]^*\\ \hline [\mathcal{H}_1^{(\xi)}]^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(0)}\left(\bar{\mathcal{H}}_0^{(\xi)} \middle| \bar{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c}[\mathcal{H}_0^{(\xi)}]^*\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_0^{(\xi)} & [\mathcal{H}_0^{(\xi)}]^*\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\\ \hline [\mathcal{H}_1^{(\xi)}]^*\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_0^{(\xi)} & [\mathcal{H}_1^{(\xi)}]^*\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\end{array}\right)$$

或者综合写成

$$\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varsigma\zeta)_2} = [\mathcal{H}_\varsigma^{(\xi)}]^*[\mathcal{H}_0^{(\xi-1)}]^*\cdots[\mathcal{H}_0^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_0^{(0)}\cdots\bar{\mathcal{H}}_0^{(\xi-1)}\bar{\mathcal{H}}_\zeta^{(\xi)},\quad (\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}$$

证明 回顾一维有限数字信号小波分解链的理论并结合$[2^{-u}N]\times[2^{-u}N]$分块矩阵$\mathcal{A}_{(u)} = (\mathcal{H}_0^{(u)} \mid \mathcal{H}_1^{(u)})$的定义即可完成定理的证明.

6.6.3 有限数字图像的小波合成

在有限数字图像小波分解和小波链分解理论的基础上，利用分解算子和分解链算子的酉性和可逆性，直接获得这个分解过程和链分解过程的逆，建立有限数字图像小波合成和小波链合成理论. 这就是本小节的基本内容.

(α) 有限数字图像小波合成关系

定理 6.42 (有限数字图像小波合成) 矩阵空间$\mathbb{C}^{N\times N}$上的任何有限数字图像$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = \{d_{j+1,m,n}^{(0)}; 0\leqslant m,n\leqslant (N-1)\}\in\mathbb{C}^{N\times N}$，它的二维小波分解是如下表示的四个子图像：

$$\mathscr{D}_j^{(\ell)} = \{d_{j,v,w}^{(\ell)}; 0\leqslant v,w\leqslant (0.5N-1)\}\in\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)},\quad \ell = 0,1,2,3$$

那么，利用四个"小数字图像" $\mathscr{D}_j^{(\ell)}=\{d_{j,v,w}^{(\ell)};0\leqslant v,w\leqslant(0.5N-1)\},\ell=0,1,2,3$ 合成得到"大数字图像"，即原始图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\{d_{j+1,m,n}^{(0)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}$，可以实现如下计算：对于 $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$，

$$
\begin{aligned}
d_{j+1;m,n}^{(0)}=&\sum_{w=0}^{(0.5N-1)}\sum_{v=0}^{(0.5N-1)}h^{(0)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(0)}\\
&+\sum_{w=0}^{(0.5N-1)}\sum_{v=0}^{(0.5N-1)}h^{(1)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(1)}\\
&+\sum_{w=0}^{(0.5N-1)}\sum_{v=0}^{(0.5N-1)}h^{(2)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(2)}\\
&+\sum_{w=0}^{(0.5N-1)}\sum_{v=0}^{(0.5N-1)}h^{(3)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(3)}
\end{aligned}
$$

或者写成

$$
d_{j+1;m,n}^{(0)}=\sum_{\ell=0}^{3}\sum_{w=0}^{(0.5N-1)}\sum_{v=0}^{(0.5N-1)}h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(\ell)}
$$

证明　将有限数字图像小波分解的定义公式代入上式右边直接演算，利用有限响应多分辨率分析低通和带通滤波器系数序列的偶数平移正交性，以及两个偶数平移向量组之间的正交性即可完成证明. 建议读者写出完整的证明过程.

(β) 有限数字图像小波矩阵合成关系

定理 6.43 (有限数字图像小波矩阵合成)　在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上的任何有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\in\mathbb{C}^{N\times N}$，它的二维小波分解是如下表示的四个子图像：

$$
\mathscr{D}_j^{(\ell)}\in\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)},\quad \ell=0,1,2,3
$$

那么，利用四个"小数字图像" $\mathscr{D}_j^{(\ell)}\in\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)},\ell=0,1,2,3$ 合成得到"大数字图像"，即原始图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\in\mathbb{C}^{N\times N}$，可以如下计算实现：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}&=\boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)}&\mathscr{D}_j^{(1)}\\\hline\mathscr{D}_j^{(2)}&\mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right)\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\middle|\boldsymbol{\mathcal{H}}_1\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)}&\mathscr{D}_j^{(1)}\\\hline\mathscr{D}_j^{(2)}&\mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}}\\\hline\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}\end{array}\right)\\
&=\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\mathscr{D}_j^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\mathscr{D}_j^{(1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\mathcal{H}}_1\mathscr{D}_j^{(2)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\mathcal{H}}_1\mathscr{D}_j^{(3)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

从直观形式看，$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 是 $N\times N$ 的数字图像 $\{d_{j+1,m,n}^{(0)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}$，另外四个矩阵 $\mathscr{D}_j^{(0)},\mathscr{D}_j^{(1)},\mathscr{D}_j^{(2)},\mathscr{D}_j^{(3)}$ 是纵横方向的数字分辨率皆减半的数字图像

$\{d_{j,v,w}^{(\ell)};0 \leqslant v,w \leqslant (0.5N-1)\} \in \mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)}, \ell = 0,1,2,3.$

证明　这是定理 6.39 的逆过程. 利用分块矩阵 $\mathcal{A} = (\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_1)$ 的定义以及酉性直接验证即可. 建议读者写出详细的证明过程.

(γ) 有限数字图像小波链矩阵合成关系

定理 6.44 (有限数字图像小波链矩阵合成)　矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上的任何有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = \{d_{j+1,m,n}^{(0)};0 \leqslant m,n \leqslant (N-1)\} \in \mathbb{C}^{N\times N}$，将它的二维小波链矩阵分解得到的各种尺寸(数字分辨率)“小图像”系列表示为

$$\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\ell)} = \{d_{j-\xi,v,w}^{(\ell)};0 \leqslant v,w \leqslant (2^{-\xi}N-1)\} \in \mathbb{C}^{[2^{-\xi}N]\times[2^{-\xi}N]}, \quad \ell = 0,1,2,3, \quad \xi = 0,1,\cdots,u$$

那么, 从这些“小图像”系列重构“大图像”，即原始数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 的二维小波链合成计算公式是：对于 $\ell \in \{0,1,2,3\}$，$\ell = \varepsilon_1 \times 2 + \varepsilon_0 \mapsto (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\}$，

$$\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(00)_2} = \mathcal{A}_{(\xi)} \left(\begin{array}{c|c} \mathscr{D}_{j-\xi}^{(00)_2} & \mathscr{D}_{j-\xi}^{(01)_2} \\ \hline \mathscr{D}_{j-\xi}^{(10)_2} & \mathscr{D}_{j-\xi}^{(11)_2} \end{array}\right) \mathcal{A}_{(\xi)}^{\mathrm{T}} = \left(\mathcal{H}_0^{(\xi)} \middle| \mathcal{H}_1^{(\xi)}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathscr{D}_{j-\xi}^{(00)_2} & \mathscr{D}_{j-\xi}^{(01)_2} \\ \hline \mathscr{D}_{j-\xi}^{(10)_2} & \mathscr{D}_{j-\xi}^{(11)_2} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} [\mathcal{H}_0^{(\xi)}]^{\mathrm{T}} \\ \hline [\mathcal{H}_1^{(\xi)}]^{\mathrm{T}} \end{array}\right)$$

或者

$$\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(00)_2} = \sum_{\varepsilon_1=0}^{1}\sum_{\varepsilon_0=0}^{1} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(\xi)} \mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} [\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(\xi)}]^{\mathrm{T}} = \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\}} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(\xi)} \mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} [\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(\xi)}]^{\mathrm{T}}$$

其中，$\xi = u,(u-1),\cdots,1,0$. 或者综合写出

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = &\sum_{\xi=0}^{u} \sum_{\substack{(\varsigma\zeta)_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\} \\ (\varsigma\zeta)_2 \neq (00)_2}} \mathcal{H}_0^{(0)} \cdots \mathcal{H}_0^{(\xi-1)} \mathcal{H}_\varsigma^{(\xi)} \mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varsigma\zeta)_2} \left[\mathcal{H}_\zeta^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(\xi-1)}\right]^{\mathrm{T}} \cdots \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \\ &+ \mathcal{H}_0^{(0)} \cdots \mathcal{H}_0^{(u-1)} \mathcal{H}_0^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(0)} \left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(u-1)}\right]^{\mathrm{T}} \cdots \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

证明　这个定理的结果就是定理 6.41 的逆过程. 回顾有限数字图像二维小波链分解的分块矩阵表达式以及行列数(数字分辨率)为 $[2^{-\xi}N]\times[2^{-\xi}N]$ 的 1×2 分块矩阵 $\mathcal{A}_{(\xi)} = (\mathcal{H}_0^{(\xi)} \mid \mathcal{H}_1^{(\xi)})$ 的定义和酉性，当 $\xi = u,(u-1),\cdots,1,0$ 取遍全部可能的数值后即完成定理的证明. 建议读者写出完整的证明过程.

6.6.4　有限数字图像小波和小波链的酉性

前述讨论论证了有限数字图像小波和小波链计算的有效性，并详细建立了有

限数字图像二维小波和小波链的计算公式, 取得这些研究结果的重要依据就是小波算法和小波链算法的酉性, 利用由此证明的有限数字图像二维小波和小波链过程的酉性, 可以得到在这个过程中出现的分解和合成 "小图像" 系列与 "大图像", 即原始有限数字图像的内积恒等式或范数恒等式. 这里将要研究这些问题.

(α) 有限数字图像小波算法的酉性

定理 6.45 (有限数字图像小波算法的酉性) 在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上的任何有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\{d_{j+1,m,n}^{(0)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}\in\mathbb{C}^{N\times N}$, 它的二维小波分解是如下表示的四个子图像:

$$\mathscr{D}_j^{(\ell)}=\{d_{j,v,w}^{(\ell)};0\leqslant v,w\leqslant(0.5N-1)\}\in\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)},\quad \ell=0,1,2,3$$

它们满足如下的分解和合成关系:

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)}&\mathscr{D}_j^{(1)}\\\hline\mathscr{D}_j^{(2)}&\mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right)=\boldsymbol{\mathcal{A}}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}=\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\\\hline\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0\middle|\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\right)=\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0&\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\\\hline\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0&\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\end{array}\right)$$

而且

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)}&\mathscr{D}_j^{(1)}\\\hline\mathscr{D}_j^{(2)}&\mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right)\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\middle|\boldsymbol{\mathcal{H}}_1\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(0)}&\mathscr{D}_j^{(1)}\\\hline\mathscr{D}_j^{(2)}&\mathscr{D}_j^{(3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}}\\\hline\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}\end{array}\right)$$

那么, 在这样的分块矩阵表达形式下, 上述关系是一对互逆的酉关系, 保持如下的范数恒等式:

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\sum_{\ell=0}^{3}\left\|\mathscr{D}_j^{(\ell)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\sum_{(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}}\left\|\boldsymbol{\mathcal{H}}_\varsigma^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\zeta\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2$$

而且

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\sum_{(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}}\left\|\boldsymbol{\mathcal{H}}_\varsigma\mathscr{D}_j^{(\varsigma\zeta)_2}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\zeta^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2$$

其中

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\sum_{0\leqslant m,n\leqslant N-1}\left|d_{j+1;m,n}^{(0)}\right|^2$$

而且, 对于 $(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}$,

$$\left\|\mathscr{D}_j^{(\varsigma\zeta)_2}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\left\|\boldsymbol{\mathcal{H}}_\varsigma^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\zeta\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\left\|\boldsymbol{\mathcal{H}}_\varsigma\mathscr{D}_j^{(\varsigma\zeta)_2}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\zeta^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\sum_{0\leqslant v,w\leqslant 0.5N-1}\left|d_{j;v,w}^{(\varsigma\zeta)_2}\right|^2$$

证明 利用分块矩阵 $\mathcal{A}=(\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_1)$ 的定义以及酉性直接验证即可. 建议读者写出详细的证明过程.

(β) 有限数字图像小波链算法的酉性

定理 6.46 (有限数字图像小波链算法的酉性) 在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上的任何有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\{d_{j+1,m,n}^{(0)};0\leqslant m,n\leqslant (N-1)\}\in\mathbb{C}^{N\times N}$，它的二维小波链矩阵分解得到的各种尺寸(数字分辨率)的“小图像”系列表示为：对于 $\xi=0,1,\cdots,u$,

$$\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\ell)}=\{d_{j-\xi,v,w}^{(\ell)};0\leqslant v,w\leqslant (2^{-\xi}N-1)\}\in\mathbb{C}^{[2^{-\xi}N]\times[2^{-\xi}N]},\quad \ell=0,1,2,3$$

那么“小图像”系列与“大图像”即原始数字图像之间存在分解链和合成链关系：

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(0)} & \mathscr{D}_{j-\xi}^{(1)}\\ \hline \mathscr{D}_{j-\xi}^{(2)} & \mathscr{D}_{j-\xi}^{(3)}\end{array}\right)=\mathcal{A}_{(\xi)}^{*}\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(0)}\bar{\mathcal{A}}_{(\xi)}=\left(\begin{array}{c|c}[\mathcal{H}_0^{(\xi)}]^{*}\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_0^{(\xi)} & [\mathcal{H}_0^{(\xi)}]^{*}\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\\ \hline [\mathcal{H}_1^{(\xi)}]^{*}\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_0^{(\xi)} & [\mathcal{H}_1^{(\xi)}]^{*}\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_1^{(\xi)}\end{array}\right)$$

或者

$$\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varsigma\zeta)_2}=[\mathcal{H}_{\varsigma}^{(\xi)}]^{*}\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_{\zeta}^{(\xi)},\quad (\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}$$

或者综合写成

$$\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varsigma\zeta)_2}=[\mathcal{H}_{\varsigma}^{(\xi)}]^{*}[\mathcal{H}_0^{(\xi-1)}]^{*}\cdots[\mathcal{H}_0^{(0)}]^{*}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_0^{(0)}\cdots\bar{\mathcal{H}}_0^{(\xi-1)}\bar{\mathcal{H}}_{\zeta}^{(\xi)},\quad (\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}$$

其中 $\xi=0,1,\cdots,u$，同时，反过来，

$$\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(00)_2}=\mathcal{A}_{(\xi)}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(00)_2} & \mathscr{D}_{j-\xi}^{(01)_2}\\ \hline \mathscr{D}_{j-\xi}^{(10)_2} & \mathscr{D}_{j-\xi}^{(11)_2}\end{array}\right)\mathcal{A}_{(\xi)}^{\mathrm{T}}=\left(\mathcal{H}_0^{(\xi)}\middle|\mathcal{H}_1^{(\xi)}\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(00)_2} & \mathscr{D}_{j-\xi}^{(01)_2}\\ \hline \mathscr{D}_{j-\xi}^{(10)_2} & \mathscr{D}_{j-\xi}^{(11)_2}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}[\mathcal{H}_0^{(\xi)}]^{\mathrm{T}}\\ \hline [\mathcal{H}_1^{(\xi)}]^{\mathrm{T}}\end{array}\right)$$

或者

$$\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(00)_2}=\sum_{\varepsilon_1=0}^{1}\sum_{\varepsilon_0=0}^{1}\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}=\sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}}\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}$$

其中，$\xi=u,(u-1),\cdots,1,0$，或者综合写成

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=&\sum_{\xi=0}^{u}\sum_{\substack{(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}\\(\varsigma\zeta)_2\neq(00)_2}}\mathcal{H}_0^{(0)}\dots\mathcal{H}_0^{(\xi-1)}\mathcal{H}_{\varsigma}^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varsigma\zeta)_2}\left[\mathcal{H}_{\zeta}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathcal{H}_0^{(\xi-1)}\right]^{\mathrm{T}}\cdots\left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\\&+\mathcal{H}_0^{(0)}\cdots\mathcal{H}_0^{(u-1)}\mathcal{H}_0^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(0)}\left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathcal{H}_0^{(u-1)}\right]^{\mathrm{T}}\cdots\left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

而且，在这样的分块矩阵表达形式下，上述关系是一对互逆的酉关系，保持如下的范数恒等式：

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 &= \left\|\mathscr{D}_{j}^{(0)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 + \sum_{\ell=1}^{3}\left\|\mathscr{D}_{j}^{(\ell)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 \\ &\vdots \\ &= \left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(0)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 + \sum_{\xi=0}^{u}\sum_{\ell=1}^{3}\left\|\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\ell)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2\end{aligned}$$

或者等价地

$$\begin{aligned}&\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 \\ &= \sum_{\xi=0}^{u}\sum_{\substack{(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}\\(\varsigma\zeta)_2\neq(00)_2}}\left\|\left[\mathcal{H}_{\varsigma}^{(\xi)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{0}^{(\xi-1)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{0}^{(0)}\right]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_{0}^{(0)}\cdots\bar{\mathcal{H}}_{0}^{(\xi-1)}\bar{\mathcal{H}}_{\zeta}^{(\xi)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 \\ &\quad+\left\|\left[\mathcal{H}_{0}^{(\xi)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{0}^{(\xi-1)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{0}^{(0)}\right]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_{0}^{(0)}\cdots\bar{\mathcal{H}}_{0}^{(\xi-1)}\bar{\mathcal{H}}_{0}^{(\xi)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2\end{aligned}$$

其中，对于 $\xi=0,1,\cdots,u$，$(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}$

$$\left\|\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varsigma\zeta)_2}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 = \left\|[\mathcal{H}_{\varsigma}^{(\xi)}]^*\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_{\zeta}^{(\xi)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2$$

或者综合写成

$$\left\|\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varsigma\zeta)_2}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 = \left\|[\mathcal{H}_{\varsigma}^{(\xi)}]^*[\mathcal{H}_{0}^{(\xi-1)}]^*\cdots[\mathcal{H}_{0}^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_{0}^{(0)}\cdots\bar{\mathcal{H}}_{0}^{(\xi-1)}\bar{\mathcal{H}}_{\zeta}^{(\xi)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2$$

而且，相反地，

$$\begin{aligned}&\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 \\ &= \sum_{\xi=0}^{u}\sum_{\substack{(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}\\(\varsigma\zeta)_2\neq(00)_2}}\left\|\mathcal{H}_{0}^{(0)}\cdots\mathcal{H}_{0}^{(\xi-1)}\mathcal{H}_{\varsigma}^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varsigma\zeta)_2}\left[\mathcal{H}_{\zeta}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathcal{H}_{0}^{(\xi-1)}\right]^{\mathrm{T}}\cdots\left[\mathcal{H}_{0}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 \\ &\quad+\left\|\mathcal{H}_{0}^{(0)}\cdots\mathcal{H}_{0}^{(u-1)}\mathcal{H}_{0}^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(0)}\left[\mathcal{H}_{0}^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathcal{H}_{0}^{(u-1)}\right]^{\mathrm{T}}\cdots\left[\mathcal{H}_{0}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2\end{aligned}$$

其中，对于 $\xi=0,1,\cdots,u$，$(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}$，

$$\left\|\mathcal{H}_{0}^{(0)}\cdots\mathcal{H}_{0}^{(\xi-1)}\mathcal{H}_{\varsigma}^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varsigma\zeta)_2}\left[\mathcal{H}_{\zeta}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathcal{H}_{0}^{(\xi-1)}\right]^{\mathrm{T}}\cdots\left[\mathcal{H}_{0}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 = \left\|\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varsigma\zeta)_2}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2$$

证明　这个定理的前半部分比较简单，在后半部分，对于 $\xi=0,1,\cdots,u$，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(00)_2} &= \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(\xi)}]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathcal{H}_0^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(00)_2}[\mathcal{H}_0^{(\xi)}]^{\mathrm{T}} + \sum_{\substack{(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}\\(\varsigma\zeta)_2\neq(00)_2}} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varsigma\zeta)_2}\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

总是把 $\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(00)_2}$ 写成相互正交的四项和，注意，分块矩阵的乘法规则首先得到

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathscr{D}_{j+1-\xi}^{(00)_2}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 &= \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}} \left\|\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(\xi)}]^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 \\
&= \left\|\mathcal{H}_0^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(00)_2}[\mathcal{H}_0^{(\xi)}]^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 + \sum_{\substack{(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}\\(\varsigma\zeta)_2\neq(00)_2}} \left\|\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(\xi)}\mathscr{D}_{j-\xi}^{(\varsigma\zeta)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(\xi)}]^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2
\end{aligned}
$$

之后逐步按照 $\xi = 0,1,\cdots,u$ 迭代即可完成定理的证明. 建议读者写出详细的证明过程.

6.7　有限数字图像小波包理论

本节将在有限维矩阵空间中，研究作为数字矩阵的有限维数字图像的小波包变换理论. 有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} = \{d_{j+1,m,n}^{(p)};(m,n)\in\mathbb{Z}_{N\times N}\}$ 理解为 $N\times N$ 复数矩阵全体构成的线性空间：

$$\mathbb{C}^{N\times N} = \{\mathbb{A} = (a_{r,s})_{N\times N}; a_{r,s}\in\mathbb{C},\ (r,s)\in\mathbb{Z}_{N\times N}\}$$

中的一个点或者向量或者矩阵，其中

$$\mathbb{Z}_{N\times N} = \{(r,s);0\leqslant r\leqslant N-1, 0\leqslant s\leqslant N-1\}$$

表示 $N\times N$ 个二元非负整数组构成的集合. 假设 $N=2^{\Delta}$，Δ 是一个自然数. 在研究过程中出现的 p 是一个自然数，有时为了分解和合成具有对称性表达式，这个 p 允许出现 $p=0$ 这种情况，或者说 0 包含在“自然数中”.

6.7.1　有限数字图像的二维小波包分解

(α) 有限数字图像的小波包分解

有限数字图像的二维小波包分解定义　从 $\{d_{j+1,m,n}^{(p)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}$ 分解为 $\{d_{j,v,w}^{(4p+\ell)};0\leqslant v,w\leqslant(0.5N-1)\},\ell=0,1,2,3$ 的二维小波包分解表示为

$$
\begin{cases}
d_{j;v,w}^{(4p+0)} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} \overline{h}^{(0)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)} \\
d_{j;v,w}^{(4p+1)} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} \overline{h}^{(1)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)} \\
d_{j;v,w}^{(4p+2)} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} \overline{h}^{(2)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)} \\
d_{j;v,w}^{(4p+3)} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} \overline{h}^{(3)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)}
\end{cases}
$$

或者写成紧凑形式：

$$
d_{j;v,w}^{(4p+\ell)} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} \overline{h}^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)}, \quad \ell=0,1,2,3
$$

其中 $v,w=0,1,\cdots,(0.5N-1)$.

引入有限数字图像记号如下：

$$
\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} = \{d_{j+1,m,n}^{(p)}; 0 \leqslant m,n \leqslant (N-1)\} \in \mathbb{C}^{N\times N}
$$
$$
\mathscr{D}_{j}^{(4p+\ell)} = \{d_{j,v,w}^{(4p+\ell)}; 0 \leqslant v,w \leqslant (0.5N-1)\} \in \mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)}, \quad \ell=0,1,2,3
$$

定理 6.47 (有限数字图像的小波包分解)　在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上的任何有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} \in \mathbb{C}^{N\times N}$，它的二维小波包分解是如下表示的四个子图像：

$$
\mathscr{D}_{j}^{(4p+\ell)} \in \mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)}, \quad \ell=0,1,2,3
$$

那么，$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 与 $\mathscr{D}_{j}^{(4p+\ell)}, \ell=0,1,2,3$ 之间具有如下的分块矩阵计算关系：

$$
\left(\begin{array}{c|c} \mathscr{D}_{j}^{(4p+0)} & \mathscr{D}_{j}^{(4p+1)} \\ \hline \mathscr{D}_{j}^{(4p+2)} & \mathscr{D}_{j}^{(4p+3)} \end{array}\right) = \boldsymbol{\mathcal{A}}^{*}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{*} \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{*} \end{array}\right)\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 \,\middle|\, \bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\right)
$$
$$
= \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{*}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 & \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{*}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1 \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{*}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 & \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{*}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1 \end{array}\right)
$$

证明　利用分块矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{\mathcal{H}}_0 \mid \boldsymbol{\mathcal{H}}_1)$ 的定义直接验证即可. 另外，可以参考有限数字图像二维小波分解的矩阵格式. 建议读者写出详细的证明过程.

(β) 有限数字图像小波包分解的正交性

定理 6.48 (有限数字图像小波包分解的正交性)　在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上的任何有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} \in \mathbb{C}^{N\times N}$，将它的二维小波包分解得到的四个子图像表示为

$$
\mathscr{D}_{j}^{(4p+\ell)} \in \mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)}, \quad \ell=0,1,2,3
$$

那么，$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 与 $\mathscr{D}_{j}^{(4p+\ell)}, \ell=0,1,2,3$ 之间保持如下的范数恒等式：

$$\sum_{0\leqslant m,n\leqslant N-1}\left|d_{j+1;m,n}^{(p)}\right|^2=\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\sum_{\ell=0}^{3}\left\|\mathscr{D}_{j}^{(4p+\ell)}\right\|_{\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)}}^2$$

$$=\sum_{\ell=0}^{3}\sum_{0\leqslant v,w\leqslant 0.5N-1}\left|d_{j;v,w}^{(4p+\ell)}\right|^2$$

证明 因为分块矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{A}}=(\mathcal{H}_0\mid\mathcal{H}_1)$ 和它的复数共轭转置 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*$ 都是酉矩阵，所以利用有限数字图像二维小波包分解矩阵计算公式：

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j}^{(4p+0)} & \mathscr{D}_{j}^{(4p+1)}\\ \hline \mathscr{D}_{j}^{(4p+2)} & \mathscr{D}_{j}^{(4p+3)}\end{array}\right)=\boldsymbol{\mathcal{A}}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$$

可得如下范数恒等式：

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2&=\left\|\boldsymbol{\mathcal{A}}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2\\&=\left\|\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j}^{(4p+0)} & \mathscr{D}_{j}^{(4p+1)}\\ \hline \mathscr{D}_{j}^{(4p+2)} & \mathscr{D}_{j}^{(4p+3)}\end{array}\right)\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2\\&=\sum_{\ell=0}^{3}\left\|\mathscr{D}_{j}^{(4p+\ell)}\right\|_{\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)}}^2\end{aligned}$$

这样就完成了定理的证明.

这个定理说明了有限数字图像二维小波包分解的某种正交性，更准确和更严谨的论述将出现在有限数字图像二维小波包合成理论中.

6.7.2 有限数字图像的二维小波包合成

(α) 有限数字图像的小波包合成关系

在这里研究有限数字图像二维小波包分解的逆过程，即二维小波包合成.

定理 6.49 (有限数字图像的小波包合成公式) 在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上的任何有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}=\{d_{j+1,m,n}^{(p)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}\in\mathbb{C}^{N\times N}$，它的二维小波包分解是如下表示的四个子图像：

$$\mathscr{D}_{j}^{(4p+\ell)}=\{d_{j,v,w}^{(4p+\ell)};0\leqslant v,w\leqslant(0.5N-1)\}\in\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)},\quad \ell=0,1,2,3$$

那么，$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 与 $\mathscr{D}_{j}^{(4p+\ell)}, \ell=0,1,2,3$ 之间存在如下的合成计算关系：

$$\begin{aligned}d_{j+1;m,n}^{(p)} = &\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}_{N\times N}} h^{(0)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(4p+0)}\\ &+\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}_{N\times N}} h^{(1)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(4p+1)}\\ &+\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}_{N\times N}} h^{(2)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(4p+2)}\\ &+\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}_{N\times N}} h^{(3)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(4p+3)}\end{aligned}$$

或者详细写成

$$d_{j+1;m,n}^{(p)} = \sum_{\ell=0}^{3}\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}_{N\times N}} h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(4p+\ell)}$$

其中，$(m,n)\in\mathbb{Z}^2, p\in\mathbb{N}$.

证明　这个定理实际上就是有限数字图像二维小波包分解作为线性变换的逆运算，证明思路就是直接验证. 回顾有限数字图像二维小波包分解的如下定义公式

$$\begin{cases}d_{j;v,w}^{(4p+0)} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\overline{h}^{(0)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)}\\ d_{j;v,w}^{(4p+1)} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\overline{h}^{(1)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)}\\ d_{j;v,w}^{(4p+2)} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\overline{h}^{(2)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)}\\ d_{j;v,w}^{(4p+3)} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\overline{h}^{(3)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)}\end{cases}$$

或者写成紧凑形式：

$$d_{j;v,w}^{(4p+\ell)} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\overline{h}^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)},\quad \ell=0,1,2,3$$

其中 $v,w=0,1,\cdots,(0.5N-1)$，将这个计算公式代入

$$\sum_{\ell=0}^{3}\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}_{N\times N}} h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j;v,w}^{(4p+\ell)}$$

直接演算即可完成证明，其中需要利用有限响应二维多分辨率分析低通和三个带通滤波器系数序列的规范正交性质. 建议读者详细写出这个证明.

定理 6.50 (有限数字图像的小波包矩阵合成公式)　在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上的任何有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\in\mathbb{C}^{N\times N}$，它的二维小波包分解是如下表示的四个子图像：

$$\mathscr{D}_{j}^{(4p+\ell)}\in\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)},\quad \ell=0,1,2,3$$

那么，$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 与 $\mathscr{D}_{j}^{(4p+\ell)},\ell=0,1,2,3$ 之间具有如下分块矩阵形式的合成计算关系：

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} &= \boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(4p+0)} & \mathscr{D}_j^{(4p+1)} \\ \hline \mathscr{D}_j^{(4p+2)} & \mathscr{D}_j^{(4p+3)}\end{array}\right)\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_0 \middle| \boldsymbol{\mathcal{H}}_1\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(4p+0)} & \mathscr{D}_j^{(4p+1)} \\ \hline \mathscr{D}_j^{(4p+2)} & \mathscr{D}_j^{(4p+3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}} \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}\end{array}\right) \\ &= \boldsymbol{\mathcal{H}}_0\mathscr{D}_j^{(4p+0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0\mathscr{D}_j^{(4p+1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1\mathscr{D}_j^{(4p+2)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1\mathscr{D}_j^{(4p+3)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

或者表示为

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} = \sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\varsigma\mathscr{D}_j^{(4p+(\varsigma\zeta)_2)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\zeta^{\mathrm{T}}$$

证明　利用分块矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{\mathcal{H}}_0 \mid \boldsymbol{\mathcal{H}}_1)$ 的酉性以及有限数字图像小波包分解矩阵表示公式：

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(4p+0)} & \mathscr{D}_j^{(4p+1)} \\ \hline \mathscr{D}_j^{(4p+2)} & \mathscr{D}_j^{(4p+3)}\end{array}\right) &= \boldsymbol{\mathcal{A}}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^* \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 \middle| \bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 & \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1 \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 & \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^*\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1\end{array}\right)\end{aligned}$$

直接得到如下的分块矩阵演算：

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} &= \boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(4p+0)} & \mathscr{D}_j^{(4p+1)} \\ \hline \mathscr{D}_j^{(4p+2)} & \mathscr{D}_j^{(4p+3)}\end{array}\right)\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}} \\ &= (\boldsymbol{\mathcal{H}}_0 \mid \boldsymbol{\mathcal{H}}_1)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_j^{(4p+0)} & \mathscr{D}_j^{(4p+1)} \\ \hline \mathscr{D}_j^{(4p+2)} & \mathscr{D}_j^{(4p+3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}} \\ \hline \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}\end{array}\right) \\ &= \sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\varsigma\mathscr{D}_j^{(4p+(\varsigma\zeta)_2)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\zeta^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

这样就完成了定理的证明.

(β) 有限数字图像小波包合成的正交性

定理 6.51 (有限数字图像小波包合成的正交性)　在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 上的任何有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} \in \mathbb{C}^{N\times N}$，它的二维小波包分解是如下表示的四个子图像：

$$\mathscr{D}_j^{(4p+\ell)} \in \mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)}, \quad \ell = 0,1,2,3$$

那么，$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 与 $\mathscr{D}_j^{(4p+\ell)}, \ell = 0,1,2,3$ 之间满足如下的勾股定理：

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} = \sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\varsigma\mathscr{D}_j^{(4p+(\varsigma\zeta)_2)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\zeta^{\mathrm{T}}$$

而且

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1}\left\|\boldsymbol{\mathcal{H}}_\varsigma\mathscr{D}_j^{(4p+(\varsigma\zeta)_2)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\zeta^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\sum_{\ell=0}^{3}\left\|\mathscr{D}_j^{(4p+\ell)}\right\|_{\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)}}^2$$

以及，当 $(\varsigma\zeta st)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}$ 时，

$$\left\langle\boldsymbol{\mathcal{H}}_\varsigma\mathscr{D}_j^{(4p+(\varsigma\zeta)_2)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\zeta^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\mathcal{H}}_s\mathscr{D}_j^{(4p+(st)_2)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_t^{\mathrm{T}}\right\rangle_{\mathbb{C}^{N\times N}}=\left\|\boldsymbol{\mathcal{H}}_\varsigma\mathscr{D}_j^{(4p+(\varsigma\zeta)_2)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\zeta^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2\delta(\varsigma-s)\delta(\zeta-t)$$

证明　因为分块矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{A}}=(\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\mid\boldsymbol{\mathcal{H}}_1)$ 和它的复数共轭转置 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*$ 都是酉矩阵，所以利用有限数字图像二维小波包合成计算公式以及直接演算得到的如下结果：

$$\begin{cases}\left\|\mathscr{D}_j^{(4p+0)}\right\|_{\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)}}^2=\left\|\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\mathscr{D}_j^{(4p+0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\sum\limits_{0\leqslant v,w\leqslant 0.5N-1}\left|d_{j;v,w}^{(4p+0)}\right|^2\\ \left\|\mathscr{D}_j^{(4p+1)}\right\|_{\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)}}^2=\left\|\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\mathscr{D}_j^{(4p+1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\sum\limits_{0\leqslant v,w\leqslant 0.5N-1}\left|d_{j;v,w}^{(4p+1)}\right|^2\\ \left\|\mathscr{D}_j^{(4p+2)}\right\|_{\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)}}^2=\left\|\boldsymbol{\mathcal{H}}_1\mathscr{D}_j^{(4p+2)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\sum\limits_{0\leqslant v,w\leqslant 0.5N-1}\left|d_{j;v,w}^{(4p+2)}\right|^2\\ \left\|\mathscr{D}_j^{(4p+3)}\right\|_{\mathbb{C}^{(0.5N)\times(0.5N)}}^2=\left\|\boldsymbol{\mathcal{H}}_1\mathscr{D}_j^{(4p+3)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\sum\limits_{0\leqslant v,w\leqslant 0.5N-1}\left|d_{j;v,w}^{(4p+3)}\right|^2\end{cases}$$

即可完成定理的证明. 建议读者写出完整的证明过程.

6.8　图像金字塔理论

这里研究二维尺度子空间、二维小波子空间、二维小波包子空间以及整个函数空间的金字塔，与这个过程等价地，研究这些二元函数子空间和整个函数空间中某种类型的伸缩平移规范正交基与多个伸缩平移规范正交系组成的规范正交基之间的金字塔转换关系，利用超级数字图像的处理模式，把函数子空间这两种类型的规范正交基之间的转换过程表示成超级数字图像小波分解合成或者小波包分解合成的金字塔结构，从而把函数子空间以及其中规范正交基的金字塔统一表示为“图像小波金字塔或者图像小波包金字塔”结构. 同时，把物理图像和数字图像以及有限数字图像的小波分解合成、小波链分解合成和小波包分解合成统一表示为一种“缺损”的金字塔结构，相应地，把每个尺度级别下的小波包分解都充分展开的金字塔结构称为“完整”的金字塔结构.

6.8.1　超级数字图像小波和小波链

6.5 节从小波光场或抽象数字图像出发引入了类似于数字图像的超级数字图像或者基本物理图像，它们像数字图像那样，按照像素赋予超级数字图像在各个像素

上的"超级灰度值"，即一个特别的函数或者分布甚至还可以是一个算子，在这里把"超级灰度值"只限于函数，而且还是一个具有一定尺度的尺度函数或者小波函数或者小波包函数，使用如下符号表示这样的超级数字图像：

$$\mathscr{Q}_j^{(p)} = \{Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y) = 2^j Q^{(p)}(2^j x - m, 2^j y - n); (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$$

其中 $p = 0,1,2,\cdots$ 表示小波包的级别，任意整数 $j \in \mathbb{Z}$ 表示对应小波包函数的尺度 $s = 2^{-j}$，$(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 表示超级数字图像 $\mathscr{Q}_j^{(p)}$ 的"超级灰度值"

$$Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y) = 2^j Q^{(p)}(2^j x - m, 2^j y - n)$$

在这个超级数字图像 $\mathscr{Q}_j^{(p)}$ 的行列位置或者像素位置，在尺度参数为 $s = 2^{-j}$ 的条件下，这个像素 $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 对应于平面网格 $\{(2^{-j}v, 2^{-j}w); (v,w) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ 的网格点是 $(2^{-j}m, 2^{-j}n)$.

(α) 超级数字图像小波算法

在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j \in \mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，尺度方程和小波方程可以表示为

$$\begin{cases} Q_{j-u;v,w}^{(0)}(x,y) = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(0)}(m-2v, n-2w) Q_{j+1-u;m,n}^{(0)}(x,y) \\ Q_{j-u;v,w}^{(1)}(x,y) = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(1)}(m-2v, n-2w) Q_{j+1-u;m,n}^{(0)}(x,y) \\ Q_{j-u;v,w}^{(2)}(x,y) = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(2)}(m-2v, n-2w) Q_{j+1-u;m,n}^{(0)}(x,y) \\ Q_{j-u;v,w}^{(3)}(x,y) = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(3)}(m-2v, n-2w) Q_{j+1-u;m,n}^{(0)}(x,y) \end{cases}$$

或者综合表示为

$$Q_{j-u;v,w}^{(\ell)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\ell)}(m-2v, n-2w) Q_{j+1-u;m,n}^{(0)}(x,y), \quad \ell = 0,1,2,3$$

其中 $(v,w) \in \mathbb{Z}^2, j \in \mathbb{Z}, J \in \mathbb{N}, u = 0,1,2,\cdots,J$，另外，

$$Q_{j-u;v,w}^{(\ell)}(x,y) = 2^{j-u} Q^{(\ell)}(2^{j-u}x - v, 2^{j-u}y - w), \quad \ell = 0,1,2,3$$

或者等价地，利用超级数字图像符号表示为

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathscr{Q}_{j-u}^{(0)} & \mathscr{Q}_{j-u}^{(1)} \\ \hline \mathscr{Q}_{j-u}^{(2)} & \mathscr{Q}_{j-u}^{(3)} \end{array}\right) = \mathcal{A}^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j-u+1}^{(0)} \mathcal{A} = \left(\begin{array}{c} \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}} \end{array}\right) \mathscr{Q}_{j-u+1}^{(0)} \left(\mathcal{H}_0 \middle| \mathcal{H}_1\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j-u+1}^{(0)} \mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j-u+1}^{(0)} \mathcal{H}_1 \\ \hline \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j-u+1}^{(0)} \mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j-u+1}^{(0)} \mathcal{H}_1 \end{array}\right), \quad u = 0,1,2,\cdots,J$$

或者反过来，对于 $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$，

$$\begin{aligned}Q^{(0)}_{j-u+1;m,n}(x,y)=&\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\bar{h}^{(0)}(m-2v,n-2w)Q^{(0)}_{j-u;v,w}(x,y)\\&+\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\bar{h}^{(1)}(m-2v,n-2w)Q^{(1)}_{j-u;v,w}(x,y)\\&+\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\bar{h}^{(2)}(m-2v,n-2w)Q^{(2)}_{j-u;v,w}(x,y)\\&+\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\bar{h}^{(3)}(m-2v,n-2w)Q^{(3)}_{j-u;v,w}(x,y)\end{aligned}$$

或者

$$Q^{(0)}_{j-u+1;m,n}(x,y)=\sum_{\xi=0}^{3}\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\bar{h}^{(\xi)}(m-2v,n-2w)Q^{(\xi)}_{j-u;v,w}(x,y)$$

等价地，利用超级数字图像符号表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{(0)}_{j+1-u}&=\bar{\mathcal{A}}\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{Q}^{(0)}_{j-u}&\mathcal{Q}^{(1)}_{j-u}\\\hline\mathcal{Q}^{(2)}_{j-u}&\mathcal{Q}^{(3)}_{j-u}\end{array}\right)\mathcal{A}^*=\left(\bar{\mathcal{H}}_0\middle|\bar{\mathcal{H}}_1\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{Q}^{(0)}_{j-u}&\mathcal{Q}^{(1)}_{j-u}\\\hline\mathcal{Q}^{(2)}_{j-u}&\mathcal{Q}^{(3)}_{j-u}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\mathcal{H}^*_0\\\hline\mathcal{H}^*_1\end{array}\right)\\&=\bar{\mathcal{H}}_0\mathcal{Q}^{(0)}_{j-u}\mathcal{H}^*_0+\bar{\mathcal{H}}_0\mathcal{Q}^{(1)}_{j-u}\mathcal{H}^*_1+\bar{\mathcal{H}}_1\mathcal{Q}^{(2)}_{j-u}\mathcal{H}^*_0+\bar{\mathcal{H}}_1\mathcal{Q}^{(3)}_{j-u}\mathcal{H}^*_1,\quad u=0,1,2,\cdots,J\end{aligned}$$

这就是在 6.5 节中研究的超级数字图像的小波分解和合成. 这本质上体现的是在尺度子空间 $\mathbb{Q}^{(0)}_{j-u+1}$ 中，规范正交基 $\{Q^{(0)}_{j-u+1;m,n}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$ 和另一个规范正交基 $\bigcup_{\xi=0}^{3}\{Q^{(\xi)}_{j-u;v,w}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 之间的过渡关系，同时，它也体现了尺度子空间 $\mathbb{Q}^{(0)}_{j-u+1}$ 的如下正交直和分解关系：

$$\mathbb{Q}^{(0)}_{j-u+1}=\mathbb{Q}^{(0)}_{j-u}\oplus\mathbb{Q}^{(1)}_{j-u}\oplus\mathbb{Q}^{(2)}_{j-u}\oplus\mathbb{Q}^{(3)}_{j-u}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^{(0)}_{j-u+1}&=\text{Closespan}\{Q^{(0)}_{j-u+1;m,n}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\}\\&=\text{Closespan}\{Q^{(\xi)}_{j-u;v,w}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\xi=0,1,2,3\}\\\mathbb{Q}^{(\ell)}_{j-u}&=\text{Closespan}\{Q^{(\ell)}_{j-u;m,n}(x,y);(m,n)\in\mathbb{Z}^2\},\quad\ell=1,2,3\end{aligned}$$

(β) 超级数字图像小波链分解

回顾分块矩阵的定义和表示. 首先，在一维多分辨率分析中，由低通滤波器(脉冲响应)系数序列作为列向量以及带通滤波器系数序列作为列向量产生的两个 $\infty\times[0.5\infty]$的“长方形”矩阵为

$$\mathcal{H}_0 = [h_{m,v} = h_{m-2v}; (m,v) \in \mathbb{Z}^2]_{\infty \times \frac{\infty}{2}} = [\mathbf{h}^{(2v)}; v \in \mathbb{Z}]_{\infty \times \frac{\infty}{2}}$$

$$\mathcal{H}_1 = [g_{m,v} = g_{m-2v}; (m,v) \in \mathbb{Z}^2]_{\infty \times \frac{\infty}{2}} = [\mathbf{g}^{(2v)}; v \in \mathbb{Z}]_{\infty \times \frac{\infty}{2}}$$

为了直观起见，可以将这两个 $\infty \times [0.5\infty]$ 矩阵按照列元素示意性表示如下：

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & h_0 & h_{-2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & h_{+1} & h_{-1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & h_{+2} & h_0 & h_{-2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & h_{+1} & h_{-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & h_{+2} & h_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{\infty \times \frac{\infty}{2}}, \quad \mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & g_0 & g_{-2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & g_{+1} & g_{-1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & g_{+2} & g_0 & g_{-2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & g_{+1} & g_{-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & g_{+2} & g_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{\infty \times \frac{\infty}{2}}$$

而且，它们的复数共轭转置矩阵 $\mathcal{H}_0^*, \mathcal{H}_1^*$ 都是 $[0.5\infty] \times \infty$ 矩阵，可以按照行元素示意性表示为

$$\mathcal{H}_0^* = \begin{pmatrix} \cdots &&&&&&&&&&& \\ \cdots & \overline{h}_{-2} & \overline{h}_{-1} & \overline{h}_0 & \overline{h}_{+1} & \overline{h}_{+2} & \cdots &&&&& \\ && \cdots & \overline{h}_{-2} & \overline{h}_{-1} & \overline{h}_0 & \overline{h}_{+1} & \overline{h}_{+2} & \cdots &&& \\ &&&& \cdots & \overline{h}_{-2} & \overline{h}_{-1} & \overline{h}_0 & \overline{h}_{+1} & \overline{h}_{+2} & \cdots \\ &&&&&&&&&& \cdots \end{pmatrix}_{\frac{\infty}{2} \times \infty}$$

$$\mathcal{H}_1^* = \begin{pmatrix} \cdots &&&&&&&&&&& \\ \cdots & \overline{g}_{-2} & \overline{g}_{-1} & \overline{g}_0 & \overline{g}_{+1} & \overline{g}_{+2} & \cdots &&&&& \\ && \cdots & \overline{g}_{-2} & \overline{g}_{-1} & \overline{g}_0 & \overline{g}_{+1} & \overline{g}_{+2} & \cdots &&& \\ &&&& \cdots & \overline{g}_{-2} & \overline{g}_{-1} & \overline{g}_0 & \overline{g}_{+1} & \overline{g}_{+2} & \cdots \\ &&&&&&&&&& \cdots \end{pmatrix}_{\frac{\infty}{2} \times \infty}$$

利用这些记号定义一个 $\infty \times \infty$ 的分块为 1×2 的矩阵 $\mathcal{A}$：

$$\mathcal{A} = (\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_1) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & h_0 & h_{-2} & \vdots & \vdots & \vdots & g_0 & g_{-2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & h_{+1} & h_{-1} & \vdots & \vdots & \vdots & g_{+1} & g_{-1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & h_{+2} & h_0 & h_{-2} & \vdots & \vdots & g_{+2} & g_0 & g_{-2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & h_{+1} & h_{-1} & \vdots & \vdots & \vdots & g_{+1} & g_{-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & h_{+2} & h_0 & \vdots & \vdots & \vdots & g_{+2} & g_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)_{\infty \times \infty}$$

它的复数共轭转置矩阵是

$$\mathcal{A}^* = \left(\frac{\mathcal{H}_0^*}{\mathcal{H}_1^*}\right) = \left(\begin{array}{cccccccccc} \cdots \\ \cdots & \overline{h}_{-2} & \overline{h}_{-1} & \overline{h}_0 & \overline{h}_{+1} & \overline{h}_{+2} & \cdots \\ & & \cdots & \overline{h}_{-2} & \overline{h}_{-1} & \overline{h}_0 & \overline{h}_{+1} & \overline{h}_{+2} & \cdots \\ & & & & \cdots & \overline{h}_{-2} & \overline{h}_{-1} & \overline{h}_0 & \overline{h}_{+1} & \overline{h}_{+2} & \cdots \\ & & & & & & & & & & \cdots \\ \hline \cdots \\ \cdots & \overline{g}_{-2} & \overline{g}_{-1} & \overline{g}_0 & \overline{g}_{+1} & \overline{g}_{+2} & \cdots \\ & & \cdots & \overline{g}_{-2} & \overline{g}_{-1} & \overline{g}_0 & \overline{g}_{+1} & \overline{g}_{+2} & \cdots \\ & & & & \cdots & \overline{g}_{-2} & \overline{g}_{-1} & \overline{g}_0 & \overline{g}_{+1} & \overline{g}_{+2} & \cdots \\ & & & & & & & & & & \cdots \end{array}\right)_{\infty\times\infty}$$

在此基础上，引入分块矩阵序列符号 $\mathcal{A}_{(u)} = (\mathcal{H}_0^{(u)} \mid \mathcal{H}_1^{(u)})_{[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]}$，按照分块矩阵表示为 1×2 的分块形式，它是 $[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]$ 矩阵，其中，两个“长方形”矩阵 $\mathcal{H}_0^{(u)}, \mathcal{H}_1^{(u)}$ 都是 $[2^{-u}\infty]\times[2^{-(u+1)}\infty]$ 矩阵，其构造方法与 $u=0$ 对应的 $\mathcal{H}_0^{(u)} = \mathcal{H}_0^{(0)} = \mathcal{H}, \mathcal{H}_1^{(u)} = \mathcal{H}_1^{(0)} = \mathcal{G}$ 的构造方法完全相同. 这样，比如当 $u=0$ 时，$\mathcal{A}_{(u)} = (\mathcal{H}_0^{(u)} \mid \mathcal{H}_1^{(u)})_{[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]} = (\mathcal{H}_0^{(0)} \mid \mathcal{H}_1^{(0)})_{\infty\times\infty} = (\mathcal{H} \mid \mathcal{G})_{\infty\times\infty}$. 它们之间唯一的差异仅仅是随着 $u = 0,1,2,\cdots$ 的数值增加，这些矩阵的尺寸或纵横分辨率均减半，即按照 4 倍率递减. 这样得到的矩阵序列 $\mathcal{A}_{(u)} = (\mathcal{H}_0^{(u)} \mid \mathcal{H}_1^{(u)})$ 每个都是酉矩阵，每个矩阵的尺寸相应为 $[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]$.

定理 6.52 (超级数字图像小波链分解)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，“超级数字图像” $\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}$ 的二维小波链分解过程：

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_{j-u}^{(0)} & \mathcal{Q}_{j-u}^{(1)} \\ \hline \mathcal{Q}_{j-u}^{(2)} & \mathcal{Q}_{j-u}^{(3)} \end{array}\right) = \mathcal{A}_{(u)}^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j-u+1}^{(0)} \mathcal{A}_{(u)} = \left(\begin{array}{c} \left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} \\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} \end{array}\right) \mathcal{Q}_{j-u+1}^{(0)} \left(\mathcal{H}_0^{(u)} \middle| \mathcal{H}_1^{(u)}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j-u+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(u)} & \left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j-u+1}^{(0)} \mathcal{H}_1^{(u)} \\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j-u+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(u)} & \left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j-u+1}^{(0)} \mathcal{H}_1^{(u)} \end{array}\right), \quad u = 0,1,2,\cdots,J$$

将会产生 $4(J+1)$ 个“小的子超级数字图像”，这个过程可以示意性表示如下：

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} &\mapsto \mathcal{Q}_{j}^{(0)};\boxed{\mathcal{Q}_{j}^{(1)},\mathcal{Q}_{j}^{(2)},\mathcal{Q}_{j}^{(3)}}\\
\mathcal{Q}_{j}^{(0)} &\mapsto \mathcal{Q}_{j-1}^{(0)};\boxed{\mathcal{Q}_{j-1}^{(1)},\mathcal{Q}_{j-1}^{(2)},\mathcal{Q}_{j-1}^{(3)}}\\
&\vdots\\
\mathcal{Q}_{j-u+1}^{(0)} &\mapsto \boxed{\mathcal{Q}_{j-u}^{(0)}};\boxed{\mathcal{Q}_{j-u}^{(1)},\mathcal{Q}_{j-u}^{(2)},\mathcal{Q}_{j-u}^{(3)}}
\end{aligned}$$

真正必须保留的分解结果可以示意性表示如下：

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} \mapsto \boxed{\mathcal{Q}_{j}^{(1)},\mathcal{Q}_{j}^{(2)},\mathcal{Q}_{j}^{(3)}}\boxed{\mathcal{Q}_{j-1}^{(1)},\mathcal{Q}_{j-1}^{(2)},\mathcal{Q}_{j-1}^{(3)}}\cdots\boxed{\mathcal{Q}_{j-u}^{(1)},\mathcal{Q}_{j-u}^{(2)},\mathcal{Q}_{j-u}^{(3)}}\boxed{\mathcal{Q}_{j-u}^{(0)}}$$

这些被保留的分解所得的“小的子超级数字图像”可以用原始的“大的超级数字图像”直接表达如下：对于 $u=0,1,2,\cdots,J$ ，$(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\},(\varsigma\zeta)_2\neq(00)_2$，

$$\boxed{\mathcal{Q}_{j-u}^{(\varsigma\zeta)_2}=\left[\mathcal{H}_{\varsigma}^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathcal{H}_{0}^{(u-1)}\right]^{\mathrm{T}}\cdots\left[\mathcal{H}_{0}^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathcal{H}_{0}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{H}_{0}^{(0)}\mathcal{H}_{0}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{0}^{(u-1)}\mathcal{H}_{\zeta}^{(u)}}$$

而且

$$\boxed{\mathcal{Q}_{j-J}^{(00)_2}=\left[\mathcal{H}_{0}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathcal{H}_{0}^{(J-1)}\right]^{\mathrm{T}}\cdots\left[\mathcal{H}_{0}^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathcal{H}_{0}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{H}_{0}^{(0)}\mathcal{H}_{0}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{0}^{(J-1)}\mathcal{H}_{0}^{(J)}}$$

证明　根据递推的超级数字图像二维小波分解计算公式:

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{Q}_{j-u}^{(0)} & \mathcal{Q}_{j-u}^{(1)}\\\hline \mathcal{Q}_{j-u}^{(2)} & \mathcal{Q}_{j-u}^{(3)}\end{array}\right)=\mathcal{A}_{(u)}^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j-u+1}^{(0)}\mathcal{A}_{(u)}=\left(\begin{array}{c|c}\left[\mathcal{H}_{0}^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j-u+1}^{(0)}\mathcal{H}_{0}^{(u)} & \left[\mathcal{H}_{0}^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j-u+1}^{(0)}\mathcal{H}_{1}^{(u)}\\\hline \left[\mathcal{H}_{1}^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j-u+1}^{(0)}\mathcal{H}_{0}^{(u)} & \left[\mathcal{H}_{1}^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j-u+1}^{(0)}\mathcal{H}_{1}^{(u)}\end{array}\right)$$

逐步迭代得到

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{j}^{(0)}&=\left[\mathcal{H}_{0}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{H}_{0}^{(0)}\\
\mathcal{Q}_{j}^{(1)}&=\left[\mathcal{H}_{0}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{H}_{1}^{(0)}\\
\mathcal{Q}_{j}^{(2)}&=\left[\mathcal{H}_{1}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{H}_{0}^{(0)}\\
\mathcal{Q}_{j}^{(3)}&=\left[\mathcal{H}_{1}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{H}_{1}^{(0)}
\end{aligned}}$$

可以集中表示为

$$\boxed{\mathcal{Q}_{j}^{(\varsigma\zeta)_2}=\left[\mathcal{H}_{\varsigma}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{H}_{\zeta}^{(0)},(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}}$$

再迭代一次得到

$$\begin{aligned}
\mathscr{Q}_{j-1}^{(0)} &= \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_j^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} = \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} \\
\mathscr{Q}_{j-1}^{(1)} &= \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_j^{(0)} \mathcal{H}_1^{(1)} = \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_1^{(1)} \\
\mathscr{Q}_{j-1}^{(2)} &= \left[\mathcal{H}_1^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_j^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} = \left[\mathcal{H}_1^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} \\
\mathscr{Q}_{j-1}^{(3)} &= \left[\mathcal{H}_1^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_j^{(0)} \mathcal{H}_1^{(1)} = \left[\mathcal{H}_1^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_1^{(1)}
\end{aligned}$$

可以集中表示为

$$\mathscr{Q}_{j-1}^{(\varsigma\zeta)_2} = \left[\mathcal{H}_\varsigma^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_\zeta^{(1)}, (\varsigma\zeta)_2 \in \{0,1\} \times \{0,1\}$$

以此类推，最后得到

$$\begin{aligned}
\mathscr{Q}_{j-J}^{(0)} &= \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j-J+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} = \left[\mathcal{H}_0^{(J)}\right]^{\mathrm{T}} \cdots \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} \cdots \mathcal{H}_0^{(J)} \\
\mathscr{Q}_{j-J}^{(1)} &= \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j-J+1}^{(0)} \mathcal{H}_1^{(1)} = \left[\mathcal{H}_0^{(J)}\right]^{\mathrm{T}} \cdots \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} \cdots \mathcal{H}_1^{(J)} \\
\mathscr{Q}_{j-J}^{(2)} &= \left[\mathcal{H}_1^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j-J+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} = \left[\mathcal{H}_1^{(J)}\right]^{\mathrm{T}} \cdots \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} \cdots \mathcal{H}_0^{(J)} \\
\mathscr{Q}_{j-J}^{(3)} &= \left[\mathcal{H}_1^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j-J+1}^{(0)} \mathcal{H}_1^{(1)} = \left[\mathcal{H}_1^{(J)}\right]^{\mathrm{T}} \cdots \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} \cdots \mathcal{H}_1^{(J)}
\end{aligned}$$

可以集中表示为：对于 $(\varsigma\zeta)_2 \in \{0,1\} \times \{0,1\}$，

$$\mathscr{Q}_{j-J}^{(\varsigma\zeta)_2} = \left[\mathcal{H}_\varsigma^{(J)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(J-1)}\right]^{\mathrm{T}} \cdots \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} \cdots \mathcal{H}_0^{(J-1)} \mathcal{H}_\zeta^{(J)}$$

从这些演算结果中，抽取必须保留的，即得到这个定理的证明.

(γ) 超级数字图像小波链合成

定理 6.53 (超级数字图像小波链合成)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j \in \mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，“超级数字图像” $\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}$ 的二维小波链分解结果如下：

$$\mathscr{Q}_{j-J}^{(00)_2} = \left[\mathcal{H}_0^{(J)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(J-1)}\right]^{\mathrm{T}} \cdots \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} \cdots \mathcal{H}_0^{(J-1)} \mathcal{H}_0^{(J)}$$

而且，当 $u = 0,1,2,\cdots,J$ 时，$(\varsigma\zeta)_2 \in \{0,1\} \times \{0,1\}, (\varsigma\zeta)_2 \neq (00)_2$，

$$\mathscr{Q}_{j-u}^{(\varsigma\zeta)_2} = \left[\mathcal{H}_\varsigma^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(u-1)}\right]^{\mathrm{T}} \cdots \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} \cdots \mathcal{H}_0^{(u-1)} \mathcal{H}_\zeta^{(u)}$$

那么，利用这些“小的超级数字图像”逐步迭代重建原始的“大的超级数字图像” $\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}$ 的递归计算公式是：对于 $u = J, J-1, \cdots, 1, 0$,

$$\mathcal{Q}_{j+1-u}^{(0)} = \bar{\mathcal{A}}_{(u)} \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_{j-u}^{(0)} & \mathcal{Q}_{j-u}^{(1)} \\ \hline \mathcal{Q}_{j-u}^{(2)} & \mathcal{Q}_{j-u}^{(3)} \end{array} \right) \mathcal{A}_{(u)}^{*} = \left(\bar{\mathcal{H}}_0^{(u)} \middle| \bar{\mathcal{H}}_1^{(u)} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_{j-u}^{(0)} & \mathcal{Q}_{j-u}^{(1)} \\ \hline \mathcal{Q}_{j-u}^{(2)} & \mathcal{Q}_{j-u}^{(3)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{*} \\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^{*} \end{array} \right)$$

或者写成

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{j+1-u}^{(0)} &= \bar{\mathcal{H}}_0^{(u)} \mathcal{Q}_{j-u}^{(0)} \left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{*} + \bar{\mathcal{H}}_0^{(u)} \mathcal{Q}_{j-u}^{(1)} \left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^{*} + \bar{\mathcal{H}}_1^{(u)} \mathcal{Q}_{j-u}^{(2)} \left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{*} + \bar{\mathcal{H}}_1^{(u)} \mathcal{Q}_{j-u}^{(3)} \left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^{*} \\ &= \bar{\mathcal{H}}_0^{(u)} \mathcal{Q}_{j-u}^{(0)} \left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{*} + \sum_{\substack{(\varsigma\zeta)_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\} \\ (\varsigma\zeta)_2 \neq (00)_2}} \bar{\mathcal{H}}_{\varsigma}^{(u)} \mathcal{Q}_{j-u}^{(\varsigma\zeta)_2} \left[\mathcal{H}_{\zeta}^{(u)}\right]^{*} \end{aligned}$$

这个递归计算过程可以示意如下：

$$\begin{array}{r} \boxed{\mathcal{Q}_{j-J}^{(0)}} + \boxed{\mathcal{Q}_{j-J}^{(1)}, \mathcal{Q}_{j-J}^{(2)}, \mathcal{Q}_{j-J}^{(3)}} \mapsto \mathcal{Q}_{j-J+1}^{(0)} \\ \mathcal{Q}_{j-J+1}^{(0)} + \boxed{\mathcal{Q}_{j-J+1}^{(1)}, \mathcal{Q}_{j-J+1}^{(2)}, \mathcal{Q}_{j-J+1}^{(3)}} \mapsto \mathcal{Q}_{j-J+2}^{(0)} \\ \vdots \qquad \\ \mathcal{Q}_{j-1}^{(0)} + \boxed{\mathcal{Q}_{j-1}^{(1)}, \mathcal{Q}_{j-1}^{(2)}, \mathcal{Q}_{j-1}^{(3)}} \mapsto \mathcal{Q}_{j}^{(0)} \\ \mathcal{Q}_{j}^{(0)} + \boxed{\mathcal{Q}_{j}^{(1)}, \mathcal{Q}_{j}^{(2)}, \mathcal{Q}_{j}^{(3)}} \mapsto \left\lfloor \mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} \right. \end{array}$$

其中，矩形方框中的“小的子超级数字图像”表示在分解过程中被保留的那些“小图像”，左半框标志最终计算结果，没有附加修饰的“小图像”是递归计算过程中产生的临时中间结果，构成下一步计算的部分输入，使用一次后将被舍去，在最终的计算结果中它们在形式上永远不会出现.

上述这个迭代的计算过程可以综合表示为级数求和形式：

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} = &\sum_{u=0}^{J} \sum_{\substack{(\varsigma\zeta)_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\} \\ (\varsigma\zeta)_2 \neq (00)_2}} \bar{\mathcal{H}}_0^{(0)} \bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} \cdots \bar{\mathcal{H}}_0^{(u-1)} \bar{\mathcal{H}}_{\varsigma}^{(u)} \mathcal{Q}_{j-u}^{(\varsigma\zeta)_2} \left[\mathcal{H}_{\zeta}^{(u)}\right]^{*} \left[\mathcal{H}_0^{(u-1)}\right]^{*} \cdots \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{*} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{*} \\ &+ \bar{\mathcal{H}}_0^{(0)} \bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} \cdots \bar{\mathcal{H}}_0^{(J-1)} \bar{\mathcal{H}}_0^{(J)} \mathcal{Q}_{j-J}^{(0)} \left[\mathcal{H}_0^{(J)}\right]^{*} \left[\mathcal{H}_0^{(J-1)}\right]^{*} \cdots \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^{*} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{*} \end{aligned}$$

这个级数求和过程可以集中示意如下：

$$\left\{ \mathcal{Q}_{j-u}^{(0)} \right\} \cup \left[\bigcup_{u=0}^{J} \left\{ \mathcal{Q}_{j-u}^{(1)}, \mathcal{Q}_{j-u}^{(2)}, \mathcal{Q}_{j-u}^{(3)} \right\} \right] \mapsto \left\lfloor \mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} \right.$$

证明　这个定理的证明过程就是逐步递归表示合成的过程，比如

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} = \bar{\mathcal{A}}_{(0)} \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_{j}^{(0)} & \mathcal{Q}_{j}^{(1)} \\ \hline \mathcal{Q}_{j}^{(2)} & \mathcal{Q}_{j}^{(3)} \end{array} \right) \mathcal{A}_{(0)}^{*} = \left(\bar{\mathcal{H}}_0^{(0)} \middle| \bar{\mathcal{H}}_1^{(0)} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_{j}^{(0)} & \mathcal{Q}_{j}^{(1)} \\ \hline \mathcal{Q}_{j}^{(2)} & \mathcal{Q}_{j}^{(3)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^{*} \\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(0)}\right]^{*} \end{array} \right)$$

$$= \bar{\mathcal{H}}_0^{(0)} \mathcal{Q}_j^{(00)_2} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^* + \sum_{\substack{(\varsigma\zeta)_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\} \\ (\varsigma\zeta)_2 \neq (00)_2}} \bar{\mathcal{H}}_\varsigma^{(0)} \mathcal{Q}_j^{(\varsigma\zeta)_2} \left[\mathcal{H}_\zeta^{(0)}\right]^*$$

$$= \bar{\mathcal{H}}_0^{(0)} \bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} \mathcal{Q}_{j-1}^{(00)_2} \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^* \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^*$$

$$+ \sum_{\substack{(\varsigma\zeta)_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\} \\ (\varsigma\zeta)_2 \neq (00)_2}} \bar{\mathcal{H}}_0^{(0)} \bar{\mathcal{H}}_\varsigma^{(1)} \mathcal{Q}_{j-1}^{(\varsigma\zeta)_2} \left[\mathcal{H}_\zeta^{(1)}\right]^* \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^* + \sum_{\substack{(\varsigma\zeta)_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\} \\ (\varsigma\zeta)_2 \neq (00)_2}} \bar{\mathcal{H}}_\varsigma^{(0)} \mathcal{Q}_j^{(\varsigma\zeta)_2} \left[\mathcal{H}_\zeta^{(0)}\right]^*$$

最后表示为

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} = \bar{\mathcal{H}}_0^{(0)} \bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} \cdots \bar{\mathcal{H}}_0^{(J-1)} \bar{\mathcal{H}}_0^{(J)} \mathcal{Q}_{j-J}^{(0)} \left[\mathcal{H}_0^{(J)}\right]^* \left[\mathcal{H}_0^{(J-1)}\right]^* \cdots \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^* \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^*$$

$$+ \sum_{u=0}^{J} \sum_{\substack{(\varsigma\zeta)_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\} \\ (\varsigma\zeta)_2 \neq (00)_2}} \bar{\mathcal{H}}_0^{(0)} \bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} \cdots \bar{\mathcal{H}}_0^{(u-1)} \bar{\mathcal{H}}_\varsigma^{(u)} \mathcal{Q}_{j-u}^{(\varsigma\zeta)_2} \left[\mathcal{H}_\zeta^{(u)}\right]^* \left[\mathcal{H}_0^{(u-1)}\right]^* \cdots \left[\mathcal{H}_0^{(1)}\right]^* \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^*$$

这样就完成了定理的证明.

6.8.2　超级数字图像小波包

在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j \in \mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 如果在"超级数字图像"的二维小波和小波链理论中, 分解和合成处理的"超级数字图像"是二维小波包函数构成的 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$, 那么, 由此可以建立"超级数字图像"的二维小波包理论和金字塔理论. 这里将研究"小波包超级数字图像" $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的小波包分解和合成计算方法及其矩阵表达方法. "小波包超级数字图像" $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的小波包金字塔方法及其矩阵表达方法留到下一个单元完成研究.

(α) 超级数字图像小波包分解

定理 6.54 (超级数字图像小波包分解)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j \in \mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 按照如下方式表示"超级数字图像" $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$: 对于 $p = 0,1,2,\cdots$,

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)} = \left\{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) = 2^{j+1} Q^{(p)}(2^{j+1}x - m, 2^{j+1}y - n); (m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\}$$

那么, "超级数字图像" $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 与四个"小的超级数字图像" $\mathcal{Q}_j^{(4p+\ell)}$:

$$\mathcal{Q}_j^{(4p+\ell)} = \{Q_{j;v,w}^{(4p+\ell)}(x,y); (v,w) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}, \quad \ell = 0,1,2,3$$

之间存在如下的小波包分解计算关系: 当 $(v,w) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 时,

$$\begin{cases} Q_{j;v,w}^{(4p+0)}(x,y) = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(0)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) \\ Q_{j;v,w}^{(4p+1)}(x,y) = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(1)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) \\ Q_{j;v,w}^{(4p+2)}(x,y) = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(2)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) \\ Q_{j;v,w}^{(4p+3)}(x,y) = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(3)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) \end{cases}$$

或者综合表示为：当 $(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ell=0,1,2,3$ 时，

$$Q_{j;v,w}^{(4p+\ell)}(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h^{(\ell)}(m-2v,n-2w)Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)$$

证明 根据二维小波包函数序列的定义直接得到这个结果.

(β) 超级数字图像小波包矩阵分解

定理 6.55 (超级数字图像小波包矩阵分解) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照如下方式表示“超级数字图像” $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$：对于 $p=0,1,2,\cdots$,

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)} = \{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) = 2^{j+1}Q^{(p)}(2^{j+1}x-m,2^{j+1}y-n);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

那么，“超级数字图像” $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 与四个“小的超级数字图像” $\mathcal{Q}_j^{(4p+\ell)}$：

$$\mathcal{Q}_j^{(4p+\ell)} = \{Q_{j;v,w}^{(4p+\ell)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},\quad \ell=0,1,2,3$$

之间存在如下矩阵形式的小波包分解计算关系：

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_j^{(4p+0)} & \mathcal{Q}_j^{(4p+1)} \\ \hline \mathcal{Q}_j^{(4p+2)} & \mathcal{Q}_j^{(4p+3)} \end{array}\right) = \mathcal{A}^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c} \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathcal{H}_1^{\mathrm{T}} \end{array}\right)\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}\left(\mathcal{H}_0 \middle| \mathcal{H}_1\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}\mathcal{H}_1 \\ \hline \mathcal{H}_1^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_1^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}\mathcal{H}_1 \end{array}\right)$$

证明 建议读者完成这个证明.

(γ) 超级数字图像小波包合成

定理 6.56 (超级数字图像小波包合成) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照如下方式表示“超级数字图像” $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$：对于 $p=0,1,2,\cdots$,

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)} = \{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) = 2^{j+1}Q^{(p)}(2^{j+1}x-m,2^{j+1}y-n);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

那么，“超级数字图像” $\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}$ 与四个“小的超级数字图像” $\mathscr{Q}_j^{(4p+\ell)}$：

$$\mathscr{Q}_j^{(4p+\ell)} = \{Q_{j;v,w}^{(4p+\ell)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},\quad \ell=0,1,2,3$$

之间存在如下的小波包合成计算关系：当 $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 时，

$$\begin{aligned}Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) = &\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(0)}(m-2v,n-2w)Q_{j;v,w}^{(4p+0)}(x,y)\\ &+\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(1)}(m-2v,n-2w)Q_{j;v,w}^{(4p+1)}(x,y)\\ &+\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(2)}(m-2v,n-2w)Q_{j;v,w}^{(4p+2)}(x,y)\\ &+\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(3)}(m-2v,n-2w)Q_{j;v,w}^{(4p+3)}(x,y)\end{aligned}$$

或者

$$Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) = \sum_{\xi=0}^{3}\sum_{(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \overline{h}^{(\xi)}(m-2v,n-2w)Q_{j;v,w}^{(4p+\xi)}(x,y)$$

证明　建议读者完成这个定理的证明.

(δ) 超级数字图像小波包矩阵合成

定理 6.57 (超级数字图像小波包矩阵合成)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照如下方式表示“超级数字图像” $\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}$：对于 $p=0,1,2,\cdots$,

$$\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)} = \{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) = 2^{j+1}Q^{(p)}(2^{j+1}x-m,2^{j+1}y-n);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

那么，“超级数字图像” $\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}$ 与四个“小的超级数字图像” $\mathscr{Q}_j^{(4p+\ell)}$：

$$\mathscr{Q}_j^{(4p+\ell)} = \{Q_{j;v,w}^{(4p+\ell)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},\quad \ell=0,1,2,3$$

之间存在如下矩阵形式的小波包合成计算关系：

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)} &= \bar{\mathcal{A}}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{Q}_j^{(4p+0)} & \mathscr{Q}_j^{(4p+1)}\\ \hline \mathscr{Q}_j^{(4p+2)} & \mathscr{Q}_j^{(4p+3)}\end{array}\right)\mathcal{A}^* = \left(\bar{\mathcal{H}}_0\,\middle|\,\bar{\mathcal{H}}_1\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{Q}_j^{(4p+0)} & \mathscr{Q}_j^{(4p+1)}\\ \hline \mathscr{Q}_j^{(4p+2)} & \mathscr{Q}_j^{(4p+3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\mathcal{H}_0^*\\ \hline \mathcal{H}_1^*\end{array}\right)\\ &= \bar{\mathcal{H}}_0\mathscr{Q}_j^{(4p+0)}\mathcal{H}_0^* + \bar{\mathcal{H}}_0\mathscr{Q}_j^{(4p+1)}\mathcal{H}_1^* + \bar{\mathcal{H}}_1\mathscr{Q}_j^{(4p+2)}\mathcal{H}_0^* + \bar{\mathcal{H}}_1\mathscr{Q}_j^{(4p+3)}\mathcal{H}_1^*\\ &= \sum_{(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}} \bar{\mathcal{H}}_\varsigma\mathscr{Q}_j^{(4p+(\varsigma\zeta)_2)}\mathcal{H}_\zeta^*\end{aligned}$$

证明　根据“超级数字图像”二维小波包矩阵分解公式：

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{Q}_j^{(4p+0)} & \mathscr{Q}_j^{(4p+1)} \\ \hline \mathscr{Q}_j^{(4p+2)} & \mathscr{Q}_j^{(4p+3)}\end{array}\right) = \mathcal{A}^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\end{array}\right)\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}\left(\mathcal{H}_0 \middle| \mathcal{H}_1\right) = \left(\begin{array}{c|c}\mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}\mathcal{H}_1 \\ \hline \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}\mathcal{H}_1\end{array}\right)$$

利用分块矩阵 $\mathcal{A} = (\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_1)$ 的酉性及其逆矩阵的表达形式直接演算即可得到定理所述的结果. 这就完成了定理的证明.

6.8.3 超级数字图像金字塔

在超级数字图像小波包算法逐步计算过程中出现的每个分解子图像, 如果都被按照同样的分解矩阵进行分解, 比如把第一次分解产生的 4 个纵横方向分辨率仅为原始超级数字图像一半的子图像都按照同样的分解格式进行再分解, 那么, 在第二次分解过程中将产生 16 个“小的超级数字图像”, 它们在纵横方向的数字分辨率仅为原始超级数字图像的四分之一, 继续这个过程将产生超级数字图像的金字塔.

考虑到超级小波包数字图像 $\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的上下标 $p,(j+1)$ 共同影响这个超级小波包数字图像的纵横数字分辨率, 即当作为下标的 $(j+1)\to j$ 的同时, 对应的上标 $p\to 4p+0,4p+1,4p+2,4p+3$ 实现一变四的分裂, 相应的超级小波包数字图像的数字分辨率从 $\infty\times\infty$ 变换为 $[0.5\infty]\times[0.5\infty]$, 数字图像由一个变换成四个. 这样, 完成这个变换过程的变换矩阵的分块表示模式也将相应地不断变化以适应这个由大尺寸矩阵转换成 4 个小尺寸矩阵的分裂过程.

在超级数字图像金字塔理论中, 在“一分四”和“四合一”的过程中出现的“大的”和“小的”超级数字图像之间数字分辨率的关系都按照上述解释的方式理解.

(α) 超级数字图像小波包链分解

因为超级小波包数字图像 $\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的上下标 $p,(j+1)$ 共同影响这个超级小波包数字图像的纵横数字分辨率, 即当作为下标的 $(j+1)\to j$ 的同时, 对应的上标 $p\to 4p+0,4p+1,4p+2,4p+3$ 实现一变四的分裂, 相应的超级小波包数字图像的数字分辨率从 $\infty\times\infty$ 变换为 $[0.5\infty]\times[0.5\infty]$, 由此实现超级数字图像由一个“大图像”变换成四个“小子图像”, 所以能够得到如下定理.

定理 6.58 (超级数字图像小波包链分解) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 按照如下方式表示“超级数字图像” $\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}$: 对于 $p=0,1,2,\cdots$,

$$\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)} = \{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) = 2^{j+1}Q^{(p)}(2^{j+1}x-m, 2^{j+1}y-n); (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

那么, 对于 $u=0,1,2,\cdots,J$ 不断重复进行“超级数字图像” $\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的二维小波包分解过程, 可以得到如下的矩阵计算公式:

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+0)} & \mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+1)} \\ \hline \mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+2)} & \mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+3)}\end{array}\right) = \mathcal{A}_{(u)}^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \mathcal{A}_{(u)} = \left(\begin{array}{c}\left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} \\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\end{array}\right) \mathscr{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \left(\mathcal{H}_0^{(u)} \middle| \mathcal{H}_1^{(u)}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c}\left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \mathcal{H}_0^{(u)} & \left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \mathcal{H}_1^{(u)} \\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \mathcal{H}_0^{(u)} & \left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \mathcal{H}_1^{(u)}\end{array}\right)$$

其中，$m = 0,1,2,\cdots,(4^u-1)$．这样当尺度参数从 $s = 2^{-(j+1)}$ 开始直到 $s = 2^{-(j-J)}$，分解过程从最初的原始超级数字图像 $\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}$ 开始，最终得到 $4^{(J+1)}$ 个"小的子超级数字图像"，它们的数字分辨率都是 $[2^{-(J+1)}\infty]\times[2^{-(J+1)}\infty]$：

$$\mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{(J+1)}p+m)}, \quad m = 0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$$

另一方面，如果将 m 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$\begin{aligned}
m &= \varepsilon_1 \times 2^{2J+1} + \varepsilon_0 \times 2^{2J} + \xi_1 \times 2^{2J-1} + \xi_0 \times 2^{2J-2} + \cdots + \varsigma_1 \times 2^1 + \varsigma_0 \\
&= (\varsigma_1\varsigma_0 \cdots \varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0)_2 \in \{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\} \\
&= (\varepsilon_1 \times 2^{2J+1} + \xi_1 \times 2^{2J-1} + \cdots + \varsigma_1 \times 2^1) + (\varepsilon_0 \times 2^{2J} + \xi_0 \times 2^{2J-2} + \cdots + \varsigma_0) \\
&= 2\times(\varepsilon_1 \times 2^{2J} + \xi_1 \times 2^{2J-2} + \cdots + \varsigma_1) + (\varepsilon_0 \times 2^{2J} + \xi_0 \times 2^{2J-2} + \cdots + \varsigma_0) \\
&= 2\times(\varepsilon_1 \times 4^J + \xi_1 \times 4^{J-1} + \cdots + \varsigma_1) + (\varepsilon_0 \times 4^J + \xi_0 \times 4^{J-1} + \cdots + \varsigma_0) \\
&= 2\times(\varepsilon_1\xi_1\cdots\varsigma_1)_4 + (\varepsilon_0\xi_0\cdots\varsigma_0)_4
\end{aligned}$$

那么，当 $m = (\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2 \in \{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}$ 时，成立直接计算公式：

$$\mathscr{Q}_{j-J}^{(m)} = \mathscr{Q}_{j-J}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2} = \left[\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)}\mathcal{H}_{\xi_1}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{\varsigma_1}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(0)} \left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}\mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{\varsigma_0}^{(J)}\right]$$

而且

$$\mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m)} = \mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2)} = \left[\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)}\mathcal{H}_{\xi_1}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{\varsigma_1}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(p)} \left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}\mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{\varsigma_0}^{(J)}\right]$$

注释：随着 $u = 0,1,2,\cdots,J$ 的数值逐步增加，超级小波包数字图像 $\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}$ 被分别分解成 4 个、16 个、64 个，$\cdots$，$4^{(J+1)}$ 个超级小波包数字子图像.

证明　定理的第一部分比较简单，这里详细说明第二部分的证明过程.

设 $\ell = \varepsilon_1 \times 2 + \varepsilon_0 = (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{0,1,2,3\}$ 是 ℓ 按照 2 位的二进制表示，则

$$\mathscr{Q}_{j-u}^{(4p+\ell)} = \mathscr{Q}_{j-u}^{(4p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} = [\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(u)}]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1-u}^{(p)} \mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(u)}, \quad \ell = (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{0,1,2,3\}$$

或者

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{Q}_{j-u}^{(4p+(00)_2)} & \mathcal{Q}_{j-u}^{(4p+(01)_2)} \\ \hline \mathcal{Q}_{j-u}^{(4p+(10)_2)} & \mathcal{Q}_{j-u}^{(4p+(11)_2)}\end{array}\right) = \mathcal{A}_{(u)}^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1-u}^{(p)} \mathcal{A}_{(u)} = \left(\begin{array}{c}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}} \\ \hline [\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}}\end{array}\right) \mathcal{Q}_{j+1-u}^{(p)} \left(\mathcal{H}_0^{(u)} \middle| \mathcal{H}_1^{(u)}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1-u}^{(p)} \mathcal{H}_0^{(u)} & [\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1-u}^{(p)} \mathcal{H}_1^{(u)} \\ \hline [\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1-u}^{(p)} \mathcal{H}_0^{(u)} & [\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1-u}^{(p)} \mathcal{H}_1^{(u)}\end{array}\right)$$

当 $u=0$ 时，为了表示方便，相匹配地取 $p=0$，那么，

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{Q}_j^{(00)_2} & \mathcal{Q}_j^{(01)_2} \\ \hline \mathcal{Q}_j^{(10)_2} & \mathcal{Q}_j^{(11)_2}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}[\mathcal{H}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}} \\ \hline [\mathcal{H}_1^{(0)}]^{\mathrm{T}}\end{array}\right) \mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} (\mathcal{H}_0^{(0)} \mid \mathcal{H}_1^{(0)})$$

或者等价地表示成 4 个等式：

$$\mathcal{Q}_j^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} = [\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)}]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}, \quad (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{0,1,2,3=4-1\}$$

当 $u=1$ 时，此时，相匹配地，$p=(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{0,1,2,3\}$，

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{Q}_{j-1}^{(4(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2+(00)_2)} & \mathcal{Q}_{j-1}^{(4(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2+(01)_2)} \\ \hline \mathcal{Q}_{j-1}^{(4(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2+(10)_2)} & \mathcal{Q}_{j-1}^{(4(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2+(11)_2)}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}[\mathcal{H}_0^{(1)}]^{\mathrm{T}} \\ \hline [\mathcal{H}_1^{(1)}]^{\mathrm{T}}\end{array}\right) \mathcal{Q}_j^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} (\mathcal{H}_0^{(1)} \mid \mathcal{H}_1^{(1)}),$$

或者等价地

$$\mathcal{Q}_{j-1}^{(4(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2+(\xi_1\xi_0)_2)} = [\mathcal{H}_{\xi_1}^{(1)}]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_j^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} \mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}, \quad (\xi_1\xi_0)_2 \in \{0,1,2,3\}$$

再次化简得到 16 个等式：

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{j-1}^{(4(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2+(\xi_1\xi_0)_2)} &= [\mathcal{H}_{\xi_1}^{(1)}]^{\mathrm{T}} [\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)}]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} \mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)} \mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}, \\ &(\xi_1\xi_0)_2 \in \{0,1,2,3\} = \{0,1\} \times \{0,1\}, \\ &(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{0,1,2,3\} = \{0,1\} \times \{0,1\}\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}4(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 + (\xi_1\xi_0)_2 &= 4 \times (\varepsilon_1 \times 2 + \varepsilon_0) + \xi_1 \times 2 + \xi_0 \\ &= \varepsilon_1 \times 2^3 + \varepsilon_0 \times 2^2 + \xi_1 \times 2 + \xi_0 \\ &= (\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0)_2 \in \{0,1,2,\cdots,15=4^2-1\} \\ &= \varepsilon_1 \times 2^3 + \xi_1 \times 2 + \varepsilon_0 \times 2^2 + \xi_0 \\ &= 2 \times (\varepsilon_1 \times 4 + \xi_1) + (\varepsilon_0 \times 4 + \xi_0) \\ &= 2(\varepsilon_1\xi_1)_4 + (\varepsilon_0\xi_0)_4\end{aligned}$$

因此，还可以得到另外一种形式的 16 个等式：

$$\mathcal{Q}_{j-1}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0)_2} = \left[\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)}\mathcal{H}_{\xi_1}^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}\mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)},$$
$$(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0)_2 \in \{0,1,2,\cdots,15=4^2-1\}$$

当 $u=2$ 时，此时，相匹配地，$p=(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0)_2 \in \{0,1,2,\cdots,15=4^2-1\}$，

$$\mathcal{Q}_{j-2}^{4(4(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2+(\xi_1\xi_0)_2)+(\delta_1\delta_0)_2} = \left[\mathcal{H}_{\delta_1}^{(2)}\right]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j-1}^{(4(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2+(\xi_1\xi_0)_2)}\mathcal{H}_{\delta_0}^{(2)}, (\delta_1\delta_0)_2 \in \{0,1,2,3\},$$
$$(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0)_2 \in \{0,1,2,\cdots,15=4^2-1\}$$

这样的等式共有 64 个. 代入 $u=1$ 时的分解公式可以得到：

$$\mathcal{Q}_{j-2}^{4(4(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2+(\xi_1\xi_0)_2)+(\delta_1\delta_0)_2} = \left[\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)}\mathcal{H}_{\xi_1}^{(1)}\mathcal{H}_{\delta_1}^{(2)}\right]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}\mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}\mathcal{H}_{\delta_0}^{(2)}\right],$$
$$(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\delta_1\delta_0)_2 \in \{0,1,2,\cdots,63=4^3-1\}$$

综合这些讨论可知，当 $u=0,1,2,\cdots,J$ 逐渐增加最终到达 $u=J$ 时，上述这样的等式将会有 $4^{(J+1)}$ 个，设 $m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，将 m 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$\begin{aligned}
m &= \varepsilon_1\times 2^{2J+1}+\varepsilon_0\times 2^{2J}+\xi_1\times 2^{2J-1}+\xi_0\times 2^{2J-2}+\cdots+\varsigma_1\times 2^1+\varsigma_0\\
&= (\varsigma_1\varsigma_0\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0)_2 \in \{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}\\
&= (\varepsilon_1\times 2^{2J+1}+\xi_1\times 2^{2J-1}+\cdots+\varsigma_1\times 2^1)+(\varepsilon_0\times 2^{2J}+\xi_0\times 2^{2J-2}+\cdots+\varsigma_0)\\
&= 2\times(\varepsilon_1\times 2^{2J}+\xi_1\times 2^{2J-2}+\cdots+\varsigma_1)+(\varepsilon_0\times 2^{2J}+\xi_0\times 2^{2J-2}+\cdots+\varsigma_0)\\
&= 2\times(\varepsilon_1\times 4^{J}+\xi_1\times 4^{J-1}+\cdots+\varsigma_1)+(\varepsilon_0\times 4^{J}+\xi_0\times 4^{J-1}+\cdots+\varsigma_0)\\
&= 2\times(\varepsilon_1\xi_1\cdots\varsigma_1)_4+(\varepsilon_0\xi_0\cdots\varsigma_0)_4
\end{aligned}$$

这时，相应的 $4^{(J+1)}$ 个分解公式是

$$\mathcal{Q}_{j-J}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2} = \left[\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)}\mathcal{H}_{\xi_1}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{\varsigma_1}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}\mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{\varsigma_0}^{(J)}\right],$$
$$(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2 \in \{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}$$

而且，一般的公式是

$$\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m)} = \mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2)} = \left[\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)}\mathcal{H}_{\xi_1}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{\varsigma_1}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}\mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{\varsigma_0}^{(J)}\right]$$

其中 $m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$. 这 $4^{(J+1)}$ 个超级小波包数字子图像的数字分辨率都是 $[2^{-(J+1)}\infty]\times[2^{-(J+1)}\infty]$.

这样，随着 $u=0,1,2,\cdots,J$ 的数值逐步增加，超级小波包数字图像 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)}$ 被分别分解成 4 个，16 个，64 个，…，$4^{(J+1)}$ 个超级小波包数字子图像. 这就是超级小波包数字图像金字塔分解.

注释：在上述定理的分解公式中，超级数字图像左右两边分别与适当的矩阵进行乘积的这种结构很容易猜想：$(\varepsilon_1\xi_1\cdots\varsigma_1)_2,(\varepsilon_0\xi_0\cdots\varsigma_0)_2$ 是两个 $(J+1)$ 位的二进制整数，取值范围都是 $0,1,2,\cdots,K=(2^{(J+1)}-1)$，可以考虑按照分块矩阵方法定义新的矩阵 $\mathscr{H}^{(J)}$：

$$\mathscr{H}^{(J)}=\left[\mathscr{H}_0^{(J)}\mathscr{H}_1^{(J)}\mathscr{H}_2^{(J)}\cdots\mathscr{H}_K^{(J)}\right]_{\infty\times\infty}$$

其中当 $(\varepsilon_0\xi_0\cdots\varsigma_0)_2\in\{0,1,2,\cdots,K\}$ 时，

$$\mathscr{H}_{(\varepsilon_0\xi_0\cdots\varsigma_0)_2}^{(J)}=\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\xi_0}^{(1)}\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varsigma_0}^{(J)}\right]_{\infty\times[2^{-(J+1)}\infty]}$$

这样，超级小波包数字图像金字塔分解最终得到如下 $2^{(J+1)}\times2^{(J+1)}$ 分块矩阵，其中每个分块都是 $[2^{-(J+1)}\infty]\times[2^{-(J+1)}\infty]$ 的超级小波包数字子图像：

$$\begin{aligned}\left[\mathscr{H}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}\left[\mathscr{H}^{(J)}\right]&=\begin{pmatrix}\left[\mathscr{H}_0^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}\\\left[\mathscr{H}_1^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\left[\mathscr{H}_K^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}\left(\left[\mathscr{H}_0^{(J)}\right]\left[\mathscr{H}_1^{(J)}\right]\cdots\left[\mathscr{H}_K^{(J)}\right]\right)\\&=\left(\mathscr{K}_{m,n}=\left[\mathscr{H}_m^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}\left[\mathscr{H}_n^{(J)}\right];0\leqslant m,n\leqslant K\right)_{K\times K}\end{aligned}$$

这个猜想能够证实吗?

把这个小问题留给读者思考.

(β) 超级数字图像小波包链合成

从超级小波包数字图像 $\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}$ 出发，经过一系列分解，当尺度参数从 $s=2^{-(j+1)}$ 开始直到 $s=2^{-(j-J)}$，原始超级数字图像 $\mathscr{Q}_{j+1}^{(0)}$ 被分解为 $4^{(J+1)}$ 个“小的子超级数字图像” $\mathscr{Q}_{j-J}^{(m)},m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，这就是超级数字图像二维小波包分解过程最终达到的结果. 这里研究这个过程的反过程，即从这些分解得到的 $4^{(J+1)}$ 个“小的子超级数字图像”经过逐步合成最终得到原始的“大的超级数字图像”.

定理 6.59 (超级数字图像小波包链合成)　在二元函数空间 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照如下方式表示“超级数字图像” $\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}$：对于 $p=0,1,2,\cdots,$

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}=\left\{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)=2^{j+1}Q^{(p)}(2^{j+1}x-m,2^{j+1}y-n);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\}$$

如果尺度参数从 $s=2^{-(j+1)}$ 开始直到 $s=2^{-(j-J)}$，分解过程从最初的原始超级数字图像 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 开始，最终得到数字分辨率都是 $[2^{-(J+1)}\infty]\times[2^{-(J+1)}\infty]$ 的 $4^{(J+1)}$ 个“小的子超级数字图像”：

$$\mathcal{Q}_{j-J}^{(m)}=\left\{Q_{j-J;v,w}^{(m)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\},\quad m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$$

那么，如下迭代计算过程可以从 $\{\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{(J+1)}p+m)};m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}$ 出发经过计算重新获得原始超级数字图像 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$：对于 $u=J,(J-1),\cdots,2,1,0,$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)}&=\bar{\mathcal{A}}_{(u)}\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+0)}&\mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+1)}\\\hline\mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+2)}&\mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+3)}\end{array}\right)\mathcal{A}_{(u)}^{*}\\&=\left(\bar{\mathcal{H}}_0^{(u)}\,\middle|\,\bar{\mathcal{H}}_1^{(u)}\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+0)}&\mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+1)}\\\hline\mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+2)}&\mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^*\\\hline\left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^*\end{array}\right)\\&=\sum_{(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}}\bar{\mathcal{H}}_{\varsigma}^{(u)}\mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+(\varsigma\zeta)_2)}\left[\mathcal{H}_{\zeta}^{(u)}\right]^*\end{aligned}$$

其中，$m=0,1,2,\cdots,(4^u-1)$．这说明，当 u 的取值一经固定，把尺度 $s=2^{-(j-u)}$ 的 $4^{(u+1)}$ 个“小的子超级数字图像”：

$$\{\mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+(\varsigma\zeta)_2)};(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\},m=0,1,\cdots,(4^u-1)\}$$

合成为尺度 $s=2^{-(j-u+1)}$ 的 4^u 个“较大的超级数字图像”：

$$\{\mathcal{Q}_{j-u+1}^{(4^u p+m)};m=0,1,\cdots,(4^u-1)\}$$

在合成的过程中，每次把尺度为 $s=2^{-(j-u)}$ 的四个“小的子超级数字图像”：

$$\mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+(\varsigma\zeta)_2)},(\varsigma\zeta)_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}$$

合成为一个尺度 $s=2^{-(j-u+1)}$ 的“较大的超级数字图像” $\mathcal{Q}_{j-u+1}^{(4^u p+m)}$，这样的合并次数是 $m=0,1,2,\cdots,(4^u-1)$ 决定的，共 4^u 次，得到 4^u 个尺度 $s=2^{-(j-u+1)}$ 的图像．

证明　这个定理所述的结果正好是如下过程的逆过程：

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+0)} & \mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+1)} \\ \hline \mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+2)} & \mathcal{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+3)}\end{array}\right) = \mathcal{A}_{(u)}^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \mathcal{A}_{(u)}$$

$$= \left(\begin{array}{c}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}} \\ \hline [\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}}\end{array}\right) \mathcal{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \left(\mathcal{H}_0^{(u)} \middle| \mathcal{H}_1^{(u)}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \mathcal{H}_0^{(u)} & [\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \mathcal{H}_1^{(u)} \\ \hline [\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \mathcal{H}_0^{(u)} & [\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}} \mathcal{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \mathcal{H}_1^{(u)}\end{array}\right)$$

其中，$m = 0,1,2,\cdots,(4^u - 1)$. 利用分块矩阵 $\mathcal{A}_{(u)} = (\mathcal{H}_0^{(u)} \mid \mathcal{H}_1^{(u)})$ 的酉性以及逆矩阵的表达形式容易得到定理的证明. 建议读者完成这个证明.

(γ) 超级数字图像金字塔算法

在超级数字图像小波包和小波包链理论中，分解和合成过程中出现的中间计算结果，尺寸或纵横分辨率低于原始的“最大超级数字图像”，这里将研究这些中间过程产生的“小的子超级数字图像”的另一种表达方法，在这样的表达方法下，这些低分辨率“小图像”将被表示为与原始超级数字图像同分辨率的“超级数字图像”.

定理 6.60 (超级数字图像金字塔算法) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j \in \mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，按照如下方式表示“超级数字图像” $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$：对于 $p = 0,1,2,\cdots,$

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)} = \{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) = 2^{j+1} Q^{(p)}(2^{j+1}x - m, 2^{j+1}y - n); (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$$

如果尺度参数从 $s = 2^{-(j+1)}$ 开始直到 $s = 2^{-(j-J)}$，分解过程从最初的原始超级数字图像 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 开始，最终得到的数字分辨率都是 $[2^{-(J+1)}\infty] \times [2^{-(J+1)}\infty]$ 的 $4^{(J+1)}$ 个“小的子超级数字图像”：

$$\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{(J+1)}p+m)} = \{Q_{j-J;v,w}^{(4^{(J+1)}p+m)}(x,y); (v,w) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}, \quad m = 0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)} - 1)$$

对于 $m = 0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)} - 1)$，将 m 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$\begin{aligned} m &= \varepsilon_1 \times 2^{2J+1} + \varepsilon_0 \times 2^{2J} + \xi_1 \times 2^{2J-1} + \xi_0 \times 2^{2J-2} + \cdots + \varsigma_1 \times 2^1 + \varsigma_0 \\ &= (\varsigma_1 \varsigma_0 \cdots \varepsilon_1 \varepsilon_0 \xi_1 \xi_0)_2 \in \{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)} - 1)\} \\ &= (\varepsilon_1 \times 2^{2J+1} + \xi_1 \times 2^{2J-1} + \cdots + \varsigma_1 \times 2^1) \\ &\quad + (\varepsilon_0 \times 2^{2J} + \xi_0 \times 2^{2J-2} + \cdots + \varsigma_0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\times(\varepsilon_1\times 2^{2J}+\xi_1\times 2^{2J-2}+\cdots+\varsigma_1)\\
&\quad+(\varepsilon_0\times 2^{2J}+\xi_0\times 2^{2J-2}+\cdots+\varsigma_0)\\
&= 2\times(\varepsilon_1\times 4^{J}+\xi_1\times 4^{J-1}+\cdots+\varsigma_1)\\
&\quad+(\varepsilon_0\times 4^{J}+\xi_0\times 4^{J-1}+\cdots+\varsigma_0)\\
&= 2\times(\varepsilon_1\xi_1\cdots\varsigma_1)_4+(\varepsilon_0\xi_0\cdots\varsigma_0)_4
\end{aligned}
$$

利用这种数字表达方法，定义数字分辨率为 $\infty\times\infty$ 的超级小波包数字图像记号：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{R}^{(m)} &= \mathscr{R}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2}\\
&= \left[\bar{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(0)}\right]\left[\bar{\mathcal{H}}_{\xi_1}^{(1)}\right]\cdots\left[\bar{\mathcal{H}}_{\varsigma_1}^{(J)}\right]\mathcal{Q}_{j-J}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2}\left[\mathcal{H}_{\varsigma_0}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}\right]^*
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
\mathscr{R}^{(4^{J+1}+m)} &= \mathscr{R}^{(4^{J+1}+(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2)}\\
&= \left[\bar{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(0)}\right]\left[\bar{\mathcal{H}}_{\xi_1}^{(1)}\right]\cdots\left[\bar{\mathcal{H}}_{\varsigma_1}^{(J)}\right]\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}+(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2)}\left[\mathcal{H}_{\varsigma_0}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}\right]^*
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)} &= \mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2)}\\
&= \left[\bar{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(0)}\right]\left[\bar{\mathcal{H}}_{\xi_1}^{(1)}\right]\cdots\left[\bar{\mathcal{H}}_{\varsigma_1}^{(J)}\right]\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2)}\left[\mathcal{H}_{\varsigma_0}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}\right]^*
\end{aligned}
$$

这样的超级小波包数字图像共有 $4^{(J+1)}$ 个. 利用这些记号，超级小波包数字图像 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的重建公式可以写成

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} &= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\mathscr{R}^{(m)}\\
&= \sum_{m=(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}}\mathscr{R}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2}\\
&= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left[\bar{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(0)}\right]\left[\bar{\mathcal{H}}_{\xi_1}^{(1)}\right]\cdots\left[\bar{\mathcal{H}}_{\varsigma_1}^{(J)}\right]\mathcal{Q}_{j-J}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2}\left[\mathcal{H}_{\varsigma_0}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}\right]^*
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_{j+1}^{(1)} &= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\mathscr{R}^{(4^{J+1}+m)}\\
&= \sum_{m=(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}}\mathscr{R}^{(4^{J+1}+(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2)}\\
&= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left[\bar{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(0)}\right]\left[\bar{\mathcal{H}}_{\xi_1}^{(1)}\right]\cdots\left[\bar{\mathcal{H}}_{\varsigma_1}^{(J)}\right]\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}+(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2)}\left[\mathcal{H}_{\varsigma_0}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}\right]^*
\end{aligned}
$$

或者

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} &= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)} \mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)} \\ &= \sum_{m=(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}} \mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2)} \\ &= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)} \left[\bar{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(0)}\right]\left[\bar{\mathcal{H}}_{\xi_1}^{(1)}\right]\cdots\left[\bar{\mathcal{H}}_{\varsigma_1}^{(J)}\right]\mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0\xi_1\xi_0\cdots\varsigma_1\varsigma_0)_2)}\left[\mathcal{H}_{\varsigma_0}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}\right]^*\end{aligned}$$

证明　为了从 $\mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{(J+1)}p+m)}, m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$ 出发经过迭代计算重新获得原始超级数字图像 $\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}$，可以通过如下过程实现：对于 $u=J,(J-1),\cdots,2,1,0,$

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} &= \bar{\mathcal{A}}_{(u)}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+0)} & \mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+1)} \\ \hline \mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+2)} & \mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+3)}\end{array}\right)\mathcal{A}_{(u)}^* \\ &= (\bar{\mathcal{H}}_0^{(u)} \mid \bar{\mathcal{H}}_1^{(u)})\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+0)} & \mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+1)} \\ \hline \mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+2)} & \mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^* \\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^*\end{array}\right) \\ &= \sum_{(s_1^{(u)}s_0^{(u)})_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}} \bar{\mathcal{H}}_{\varsigma}^{(u)}\mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+(s_1^{(u)}s_0^{(u)})_2)}\left[\mathcal{H}_{\zeta}^{(u)}\right]^*\end{aligned}$$

其中，$m=0,1,2,\cdots,(4^u-1)$.

具体地，当 $u\in\{J,(J-1),\cdots,2,1,0\}$ 固定之后，把尺度 $s=2^{-(j-u)}$ 的 $4^{(u+1)}$ 个"小的子超级数字图像"：

$$\{\mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+(s_1^{(u)}s_0^{(u)})_2)};(s_1^{(u)}s_0^{(u)})_2\in\{0,1\}\times\{0,1\},m=0,1,\cdots,(4^u-1)\}$$

合成为尺度 $s=2^{-(j-u+1)}$ 的 4^u 个"较大的超级数字图像"：

$$\{\mathscr{Q}_{j-u+1}^{(4^u p+m)};m=0,1,\cdots,(4^u-1)\}$$

在合成的过程中，每次把尺度为 $s=2^{-(j-u)}$ 的四个"小的子超级数字图像"：

$$\mathscr{Q}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+(s_1^{(u)}s_0^{(u)})_2)},\quad (s_1^{(u)}s_0^{(u)})_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}$$

合成为一个尺度 $s=2^{-(j-u+1)}$ 的"较大的超级数字图像" $\mathscr{Q}_{j-u+1}^{(4^u p+m)}$，这样的合并次数是 $m=0,1,2,\cdots,(4^u-1)$ 决定的，共 4^u 次，得到 4^u 个尺度 $s=2^{-(j-u+1)}$ 的"小的子超级数字图像".

在上述的重建过程中，出发点是数字分辨率为 $[2^{-(J+1)}\infty]\times[2^{-(J+1)}\infty]$ 的 $4^{(J+1)}$ 个"最小的子超级数字图像"：

$$\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{(J+1)}p+m)}, \quad m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$$

当 $u=J$ 时，启动合成算法，利用如下公式计算：对于 $m=0,1,2,\cdots,(4^J-1)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{j+1-J}^{(4^J p+m)} &= \bar{\mathcal{A}}_{(J)}\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_{j-J}^{(4(4^J p+m)+0)} & \mathcal{Q}_{j-J}^{(4(4^J p+m)+1)} \\ \hline \mathcal{Q}_{j-J}^{(4(4^J p+m)+2)} & \mathcal{Q}_{j-J}^{(4(4^J p+m)+3)} \end{array}\right)\mathcal{A}_{(J)}^* \\
&= (\bar{\mathcal{H}}_0^{(J)} \mid \bar{\mathcal{H}}_1^{(J)})\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_{j-J}^{(4(4^J p+m)+0)} & \mathcal{Q}_{j-J}^{(4(4^J p+m)+1)} \\ \hline \mathcal{Q}_{j-J}^{(4(4^J p+m)+2)} & \mathcal{Q}_{j-J}^{(4(4^J p+m)+3)} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} [\mathcal{H}_0^{(J)}]^* \\ \hline [\mathcal{H}_1^{(J)}]^* \end{array}\right) \\
&= \sum_{(s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\mathcal{Q}_{j-J}^{(4(4^J p+m)+(s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^*
\end{aligned}$$

因为

$$\{4(4^J p+m)+(s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2;(s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2\in\{0,1\}\times\{0,1\},m=0,1,2,\cdots,(4^J-1)\}$$

正好就是

$$\{4^{J+1}p+m';m'=0,1,2,\cdots,(4^{J+1}-1)\}$$

这样，如下的 $4^{(J+1)}$ 个“最小子超级数字图像”：

$$\{\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{(J+1)}p+m')};m'=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}$$

被合并为如下的 4^J 个“较大的子超级数字图像”：

$$\{\mathcal{Q}_{j+1-J}^{(4^J p+m)};m=0,1,2,\cdots,(4^J-1)\}$$

这个过程接下来经过 $u=(J-1),\cdots,2,1,0$ 逐步合并，最后表现为

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)} &= \bar{\mathcal{A}}_{(0)}\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_{j}^{(4p+0)} & \mathcal{Q}_{j}^{(4p+1)} \\ \hline \mathcal{Q}_{j}^{(4p+2)} & \mathcal{Q}_{j}^{(4p+3)} \end{array}\right)\mathcal{A}_{(0)}^* \\
&= (\bar{\mathcal{H}}_0^{(0)} \mid \bar{\mathcal{H}}_1^{(0)})\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_{j}^{(4p+0)} & \mathcal{Q}_{j}^{(4p+1)} \\ \hline \mathcal{Q}_{j}^{(4p+2)} & \mathcal{Q}_{j}^{(4p+3)} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} [\mathcal{H}_0^{(0)}]^* \\ \hline [\mathcal{H}_1^{(0)}]^* \end{array}\right) \\
&= \sum_{(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\mathcal{Q}_{j}^{(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^*
\end{aligned}$$

需要强调的是，在这个迭代计算过程中，为了得到 4^u 个尺度 $s=2^{-(j-u+1)}$ 的“小的子超级数字图像”，必须利用此前已经计算得到的(或者计算过程最开始的已知的) 4^{u+1} 个尺度 $s=2^{-(j-u)}$ 的“更小的子超级数字图像”，所以，上述过程只能够从 $u=J$ 开始，

逐步地 $u = J-1$, $\cdots, 2, 1, 0$ 直到最后重建得到原始的超级数字图像 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$.

但是, 这里将要给出的关于这个定理的证明过程正好与此相反, 可以理解为上述过程已经完成, 而且计算过程中得到的全部中间结果, 即各种数字分辨率的"小的子超级数字图像"都被保留可以再次使用. 下面给出的计算过程可以理解为原始超级数字图像 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 从 $u=0$ 开始递增地直到 $u=J$ 被逐步地重新表达, 在这个重新表达 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的过程中, 必须使用此前得到的全部中间结果, 但是到最后 $u=J$ 时, 却只需要数字分辨率为 $[2^{-(J+1)}\infty]\times[2^{-(J+1)}\infty]$ 的 $4^{(J+1)}$ 个"最小的子超级数字图像":

$$\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{(J+1)}p+m)}, \quad m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$$

从而实现只使用这 $4^{(J+1)}$ 个"最小的子超级数字图像"重构 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的目的.

现在从 $u=0$ 开始重新表达 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的过程:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)} &= \bar{\mathcal{A}}_{(0)}\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{Q}_j^{(4p+0)} & \mathcal{Q}_j^{(4p+1)}\\ \hline \mathcal{Q}_j^{(4p+2)} & \mathcal{Q}_j^{(4p+3)}\end{array}\right)\mathcal{A}_{(0)}^*\\
&= (\bar{\mathcal{H}}_0^{(0)} \mid \bar{\mathcal{H}}_1^{(0)})\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{Q}_j^{(4p+0)} & \mathcal{Q}_j^{(4p+1)}\\ \hline \mathcal{Q}_j^{(4p+2)} & \mathcal{Q}_j^{(4p+3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}[\mathcal{H}_0^{(0)}]^*\\ \hline [\mathcal{H}_1^{(0)}]^*\end{array}\right)\\
&= \sum_{(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\mathcal{Q}_j^{(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^*
\end{aligned}$$

这就是在尺度 $s=2^{-j}$ 上 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的重新表达, 而且, 其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_j^{(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)} &= \bar{\mathcal{A}}_{(1)}\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{Q}_{j-1}^{(4(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)+0)} & \mathcal{Q}_{j-1}^{(4(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)+1)}\\ \hline \mathcal{Q}_{j-1}^{(4(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)+2)} & \mathcal{Q}_{j-1}^{(4(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)+3)}\end{array}\right)\mathcal{A}_{(1)}^*\\
&= (\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} \mid \bar{\mathcal{H}}_1^{(1)})\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{Q}_{j-1}^{(4(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)+0)} & \mathcal{Q}_{j-1}^{(4(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)+1)}\\ \hline \mathcal{Q}_{j-1}^{(4(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)+2)} & \mathcal{Q}_{j-1}^{(4(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)+3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}[\mathcal{H}_0^{(1)}]^*\\ \hline [\mathcal{H}_1^{(1)}]^*\end{array}\right)\\
&= \sum_{(s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\mathcal{Q}_{j-1}^{(4(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)+(s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2)}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^*\\
&= \sum_{(s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2\in\{0,1\}\times\{0,1\}} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\mathcal{Q}_{j-1}^{(4^2p+4(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2+(s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2)}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^*
\end{aligned}$$

于是得到如下演算:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)} &= \bar{\mathcal{A}}_{(0)} \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_j^{(4p+0)} & \mathcal{Q}_j^{(4p+1)} \\ \hline \mathcal{Q}_j^{(4p+2)} & \mathcal{Q}_j^{(4p+3)} \end{array} \right) \mathcal{A}_{(0)}^* \\
&= (\bar{\mathcal{H}}_0^{(0)} \mid \bar{\mathcal{H}}_1^{(0)}) \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_j^{(4p+0)} & \mathcal{Q}_j^{(4p+1)} \\ \hline \mathcal{Q}_j^{(4p+2)} & \mathcal{Q}_j^{(4p+3)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\right]^* \\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(0)}\right]^* \end{array} \right) \\
&= \sum_{(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\}} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)} \sum_{(s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\}} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)} \mathcal{Q}_{j-1}^{(4^2 p+4(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2+(s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2)} \left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^* \left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^* \\
&= \sum_{(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\}} \sum_{(s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\}} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)} \mathcal{Q}_{j-1}^{(4^2 p+4(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2+(s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2)} \left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^* \left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^* \\
&= \sum_{(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2 \in \{0,1\}^4} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)} \mathcal{Q}_{j-1}^{(4^2 p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2)} \left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^* \left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^*
\end{aligned}$$

从而得到在尺度 $s=2^{-(j-1)}$ 上 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的重新表达结果：

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)} = \sum_{(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2 \in \{0,1\}^4} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)} \mathcal{Q}_{j-1}^{(4^2 p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2)} \left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^* \left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^*$$

这时，$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2 \in \{0,1\}^4 = \{0,1,\cdots,(4^2-1)\}$，所以，实际用于重新表达 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的“小的子超级数字图像”是 16 个尺度为 $s=2^{-(j-1)}$ 的图像：

$$\mathcal{Q}_{j-1}^{(4^2 p+m)} = \mathcal{Q}_{j-1}^{(4^2 p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2)}, \quad m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2 = 0,1,2,\cdots,15$$

继续这个过程直到 $u=J$，得到对应尺度 $s=2^{-(j-J)}$ 的 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的重新表达：

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)} = \sum_{m=0}^{(4^{J+1}-1)} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)} \cdots \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(J)}}^{(J)} \mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{J+1} p+m)} \left[\mathcal{H}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^* \cdots \left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^* \left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^*$$

其中 $m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2 = 0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$. 这时候，为了重新表达原始超级数字图像 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$，使用了尺度 $s=2^{-(j-J)}$ 的全部共 $4^{(J+1)}$ 个“最小的子超级数字图像”：

$$\left\{\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{J+1} p+m)}; m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2 = 0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1) \in \{0,1\}^{2(J+1)}\right\}$$

更重要的结论是，只需要使用全部这些“最小的子超级数字图像”就足够了，中间过程使用过的那些“子超级数字图像”保存与否都不影响这个关键结论.

在上述过程中，对数字 p 没有特殊要求，按照它本身的意义取值即可. 这样，当 $p=0$ 时，得到如下结果：定义

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{(m)} &= \mathscr{R}^{(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2}\\ &= \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\cdots\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\mathcal{Q}_{j-J}^{(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^*\end{aligned}$$

其中，$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，超级数字图像金字塔表现为

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} &= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\mathscr{R}^{(m)}\\ &= \sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}}\mathscr{R}^{(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2}\\ &= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\cdots\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\mathcal{Q}_{j-J}^{(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^*\end{aligned}$$

这就是尺度函数构成的超级数字图像的金字塔结构.

当 $p=1$ 时，得到如下结果：定义

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{(4^{J+1}+m)} &= \mathscr{R}^{(4^{J+1}+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\\ &= \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\cdots\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^*\end{aligned}$$

其中，$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，超级数字图像金字塔表现为

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{j+1}^{(1)} &= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\mathscr{R}^{(4^{J+1}+m)}\\ &= \sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}}\mathscr{R}^{(4^{J+1}+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\\ &= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\cdots\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^*\end{aligned}$$

这就是小波函数构成的超级数字图像的金字塔结构.

当 $p=2,3,\cdots$ 时，得到如下结果：定义

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)} &= \mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\\ &= \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\cdots\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^*\end{aligned}$$

其中，$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，超级数字图像金字塔表现为

$$\begin{aligned}
\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)} &= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)} \mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)} \\
&= \sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2\in\left\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\right\}} \mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)} \\
&= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\cdots\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^*\left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^*
\end{aligned}$$

这就是小波包函数构成的超级数字图像的金字塔结构.

(δ) 超级数字图像金字塔的光场意义

在超级数字图像金字塔理论中, 前述重要定理本质上揭示了光场转换的内在制约关系, 可以抽象理解为光场传播的特殊模式, 或者光场叠加的特殊模式.

定理 6.61 (超级数字图像金字塔光场意义)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上, 当 $p=0,1,2,\cdots$ 且 $j\in\mathbb{Z}$ 是任意整数时, 按照如下方式表示“超级数字图像” $\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}$:

$$\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}=\{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)=2^{j+1}Q^{(p)}(2^{j+1}x-m,2^{j+1}y-n);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

那么, 对于任意的非负整数 J, 原始的数字分辨率为 $\infty\times\infty$ 的超级数字图像 $\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}$ 可以与如下形式的数字分辨率同为 $[2^{-(J+1)}\infty]\times[2^{-(J+1)}\infty]$ 的 $4^{(J+1)}$ 个“小的子超级数字图像”可以相互表示:

$$\mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{(J+1)}p+m)}=\{Q_{j-J;v,w}^{(4^{(J+1)}p+m)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},\quad m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$$

如果将 $m\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}$ 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$$

那么, 它们之间相互转换的关系是

$$\begin{aligned}
\mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m)} &= \mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)} \\
&= \left[\mathcal{H}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\mathcal{H}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]
\end{aligned}$$

而且

$$\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}=\sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)}$$

$$= \sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}} \mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}$$

$$= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)} \bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\cdots\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^*\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^*$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)} &= \mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\\ &= \bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\cdots\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\mathcal{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^*\cdots\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^*\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^*\end{aligned}$$

证明　根据超级数字图像金字塔理论可以直接得到这个定理的证明.

注释：无论关于超级小波包数字图像金字塔分解的猜想是否成立，容易证明超级小波包数字图像的金字塔重建公式总可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{j+1}^{(0)} &= \left[\overline{\mathscr{H}}^{(J)}\right]\mathscr{K}\left[\mathscr{H}^{(J)}\right]^*\\ &= \left(\left[\overline{\mathscr{H}}_0^{(J)}\right]\left[\overline{\mathscr{H}}_1^{(J)}\right]\cdots\left[\overline{\mathscr{H}}_{(2^{(J+1)}-1)}^{(J)}\right]\right)\mathscr{K}\begin{pmatrix}\left[\mathscr{H}_0^{(J)}\right]^*\\ \left[\mathscr{H}_1^{(J)}\right]^*\\ \vdots\\ \left[\mathscr{H}_{(2^{(J+1)}-1)}^{(J)}\right]^*\end{pmatrix}\\ &= \sum_{n=0}^{(2^{(J+1)}-1)}\sum_{m=0}^{(2^{(J+1)}-1)}\left[\overline{\mathscr{H}}_m^{(J)}\right]\mathscr{K}_{m,n}\left[\mathscr{H}_1^{(J)}\right]^*\end{aligned}$$

建议读者按照这种模式表示定理给出的结果并确定这种表达形式中各个分块矩阵的含义.

定理 6.62 (超级数字图像金字塔光场意义)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，当 $p=0,1,2,\cdots$ 且 $j\in\mathbb{Z}$ 是任意整数时，按照如下方式表示“超级数字图像” $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$：

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)} = \{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) = 2^{j+1}Q^{(p)}(2^{j+1}x-m, 2^{j+1}y-n); (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

对于任意的非负整数 J，如果将 $m\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}$ 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$m = (s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2 = 0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$$

那么，成立如下的恒等式：

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)} &= \sum_{\substack{(s_1^{(t)}s_0^{(t)})_2\in\{0,1\}^2\\ t=0,1,\cdots,J}} \left[\coprod_{j=0}^{J} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(p)} \left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]^{*}\\ &= \sum_{\substack{s_1^{(t)}\in\{0,1\}\\ t=0,1,\cdots,J}} \left[\coprod_{j=0}^{J} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(p)} \sum_{\substack{s_0^{(t)}\in\{0,1\}\\ t=0,1,\cdots,J}} \left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]^{*}\end{aligned}$$

证明　将 $m\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}$ 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$$

那么,

$$\mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m)}=\mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}=\left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(p)} \left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]$$

而且,

$$\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}=\sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0}^{(4^{(J+1)}-1)} \left[\coprod_{j=0}^{J} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right] \mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)} \left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]^{*}$$

将两者合并最终得到恒等式:

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)} &= \sum_{\substack{(s_1^{(t)}s_0^{(t)})_2\in\{0,1\}^2\\ t=0,1,\cdots,J}} \mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\\ &= \sum_{\substack{(s_1^{(t)}s_0^{(t)})_2\in\{0,1\}^2\\ t=0,1,\cdots,J}} \left[\coprod_{j=0}^{J} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(p)} \left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]^{*}\\ &= \sum_{\substack{s_1^{(t)}\in\{0,1\}\\ t=0,1,\cdots,J}} \left[\coprod_{j=0}^{J} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(p)} \sum_{\substack{s_0^{(t)}\in\{0,1\}\\ t=0,1,\cdots,J}} \left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]^{*}\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)} &= \mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\\ &= \left[\coprod_{j=0}^{J} \bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{Q}_{j+1}^{(p)} \left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J} \mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]^{*}\end{aligned}$$

这样就完成了定理的证明.

推论 6.1 (矩阵空间单位算子正交分解)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分

析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 基础上，当 $p=0,1,2,\cdots$ 且 $j\in\mathbb{Z}$ 是任意整数时，按照如下方式表示“超级数字图像” $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$：

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}=\{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)=2^{j+1}Q^{(p)}(2^{j+1}x-m,2^{j+1}y-n);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

对于任意的非负整数 J，如果将 $m\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}$ 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$$

那么，“超级数字图像”恒等式：

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}=\sum_{\substack{s_1^{(t)}\in\{0,1\}\\ t=0,1,\cdots,J}}\left[\coprod_{j=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}\sum_{\substack{s_0^{(t)}\in\{0,1\}\\ t=0,1,\cdots,J}}\left[\coprod_{j=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]^{*}$$

对于任意的“超级数字图像” $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 都成立.

这个推论表明，超级数字图像金字塔关系为

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}=\sum_{\substack{(s_1^{(t)}s_0^{(t)})_2\in\{0,1\}^2\\ t=0,1,\cdots,J}}\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}$$

其中，

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)}&=\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\\&=\left[\coprod_{j=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(j)}}^{(j)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}\left[\coprod_{j=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]\left[\coprod_{j=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(j)}}^{(j)}\right]^{*}\end{aligned}$$

实际上提供了“超级数字图像空间”上单位算子的正交分解，在非负整数 J 给定之后，这个单位算子被分解为 $4^{(J+1)}$ 个算子的和.

(ε) 超级数字图像金字塔与空间的基

回顾超级数字图像的定义，以及与二维尺度函数、二维小波函数和二维小波包函数的关系可知，如果 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 是二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上的一个多分辨率分析，当 $p=0,1,2,\cdots$ 且 $j\in\mathbb{Z}$ 是任意整数时，按照如下方式表示“超级数字图像” $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$：

$$\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}=\{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)=2^{j+1}Q^{(p)}(2^{j+1}x-m,2^{j+1}y-n);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

那么，对于任意的非负整数 J，原始的数字分辨率为 $\infty\times\infty$ 的超级数字图像 $\mathcal{Q}_{j+1}^{(p)}$ 可以与如下表示的数字分辨率同为 $[2^{-(J+1)}\infty]\times[2^{-(J+1)}\infty]$ 的 $4^{(J+1)}$ 个“小的子超级数

字图像”相互表示：

$$\mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{(J+1)}p+m)} = \{Q_{j-J;v,w}^{(4^{(J+1)}p+m)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},\quad m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$$

将 $m\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}$ 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2$$

那么，成立如下转换关系：对于 $m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$,

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m)} &= \mathscr{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\\ &=\left[\mathcal{H}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\mathcal{H}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}\mathscr{Q}_{j+1}^{(p)}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]\end{aligned}$$

如果将超级数字图像转换为一个函数系，那么，这个转换关系也是一个酉变换关系，同时，它指明小波包函数空间 $\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)}$ 的两个规范正交基,

$$\left\{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)=2^{j+1}Q^{(p)}(2^{j+1}x-m,2^{j+1}y-n);(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\}$$

和

$$\bigcup_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\{Q_{j-J;v,w}^{(4^{(J+1)}p+m)}(x,y);(v,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

前述超级数字图像金字塔保证了在小波包函数空间 $\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)}$ 中这两个规范正交基之间的等价性.

6.8.4　数字图像金字塔理论

如果物理图像 $f(x,y)$ 在空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的任意小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(p)}$ 上的正交投影记为 $f_j^{(p)}(x,y)$, $j\in\mathbb{Z},p=0,1,2,\cdots$，那么，它可以写成如下的正交级数：

$$f_j^{(p)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j;m,n}^{(p)}Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y),\quad j\in\mathbb{Z},\quad p=0,1,2,\cdots$$

其中

$$\begin{aligned}d_{j;m,n}^{(p)} &= \int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}f_j^{(p)}(x,y)\overline{Q}_{j;m,n}^{(p)}(x,y)dxdy\\ &=\int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}f(x,y)\overline{Q}_{j;m,n}^{(p)}(x,y)dxdy\end{aligned}$$

称为图像 $f(x,y)$ 在尺度基函数或小波基函数或小波包基函数 $Q_{j;m,n}^{(p)}(x,y)$ 下，尺度级别为 $s=2^{-j}$ 的尺度变换系数或小波变换系数或小波包变换系数，$j\in\mathbb{Z}$, $p=0,1,2,\cdots$，它们之间存在如下恒等式：

$$\left\|f_j^{(p)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j;m,n}^{(p)}\right|^2,\quad j\in\mathbb{Z},\quad p=0,1,2,\cdots$$

形象地说，$\{d_{j;m,n}^{(p)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},p=0,1,2,\cdots$ 是无穷维矩阵序列，其中每个矩阵无论是上下或左右都按照整数方式延伸到无穷远. 在规范正交基已经选定的条件下，物理图像 $f_j^{(p)}(x,y)$ 和数字图像 $\{d_{j;m,n}^{(p)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$, $j\in\mathbb{Z}$, $p=0,1,2,\cdots$ 被完全等同看待.

(α) 物理图像小波金字塔

定理 6.63 (物理图像小波金字塔) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 以及正交二维小波包理论基础上，物理图像 $f(x,y)$ 在二元函数小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(p)}$ 上的正交投影 $f_j^{(p)}(x,y)$ 及其正交级数展开表达式满足如下关系：对于 $j\in\mathbb{Z},J\in\mathbb{N}$, $p=0,1,2,\cdots$,

$$
\begin{aligned}
f_{j+1}^{(p)}(x,y)&=f_j^{(4p)}(x,y)+\sum_{\ell=1}^{3}f_j^{(4p+\ell)}(x,y)\\
&=f_{j-1}^{(4^2p)}(x,y)+\sum_{\ell=1}^{3}f_{j-1}^{(4^2p+\ell)}(x,y)+\sum_{\ell=1}^{3}f_j^{(4p+\ell)}(x,y)\\
&\ \ \vdots\\
&=f_{j-J}^{(4^{J+1}p)}(x,y)+\sum_{\ell=1}^{3}f_{j-J}^{(4^{J+1}p+\ell)}(x,y)+\cdots+\sum_{\ell=1}^{3}f_j^{(4p+\ell)}(x,y)\\
&=f_{j-J}^{(4^{J+1}p)}(x,y)+\sum_{u=0}^{J}\sum_{\ell=1}^{3}f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)
\end{aligned}
$$

而且

$$
\begin{aligned}
\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j+1;m,n}^{(p)}Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)=&\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j-J;m,n}^{(4^{J+1}p)}Q_{j-J;m,n}^{(4^{J+1}p)}(x,y)\\
&+\sum_{u=0}^{J}\sum_{\ell=1}^{3}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}Q_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)
\end{aligned}
$$

证明 基本思想是利用小波包函数子空间的小波金字塔正交直和分解关系以及这个过程中出现的各个小波包函数子空间的规范正交基.

首先，二维小波包函数子空间存在如下小波金字塔正交直和分解关系：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)}&=\mathbb{Q}_j^{(4p+0)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(4p+1)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(4p+2)}\oplus\mathbb{Q}_j^{(4p+3)}\\
&=\mathbb{Q}_j^{(4p+0)}\oplus\left[\bigoplus_{\ell=1}^{3}\mathbb{Q}_j^{(4p+\ell)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{Q}_{j-1}^{(4^2p+0)} \oplus \left[\bigoplus_{\ell=1}^{3} \mathbb{Q}_{j-1}^{(4^2p+\ell)}\right] \oplus \left[\bigoplus_{\ell=1}^{3} \mathbb{Q}_{j}^{(4p+\ell)}\right] \\
&\vdots \\
&= \mathbb{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+0)} \oplus \left[\bigoplus_{\ell=1}^{3} \mathbb{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+\ell)}\right] \oplus \cdots \oplus \left[\bigoplus_{\ell=1}^{3} \mathbb{Q}_{j-1}^{(4^2p+\ell)}\right] \oplus \left[\bigoplus_{\ell=1}^{3} \mathbb{Q}_{j}^{(4p+\ell)}\right] \\
&= \mathbb{Q}_{j-J}^{(4^{J+1}p+0)} \oplus \left[\bigoplus_{u=0}^{J} \bigoplus_{\ell=1}^{3} \mathbb{Q}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}\right]
\end{aligned}
$$

其次，二维小波包函数子空间 $\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)}$ 和 $\mathbb{Q}_{j-\xi}^{(4^{\xi+1}p+\ell)}, \xi = 0,1,2,\cdots,J, \ell = 0,1,2,3$ 存在如下规范正交小波包基张成表示：对于 $\xi = 0,1,2,\cdots,(J+1), \ell = 0,1,2,3,$

$$
\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)} = \text{Closespan}\left\{Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y);(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\}
$$

$$
\mathbb{Q}_{j-\xi}^{(4^{\xi+1}p+\ell)} = \text{Closespan}\{Q_{j-\xi;m,n}^{(4^{\xi+1}p+\ell)}(x,y);(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}
$$

这样就完成了定理的证明.

(β) 物理图像小波包金字塔

定理 6.64 (物理图像小波包金字塔)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j \in \mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y))$ 以及正交二维小波包理论基础上，物理图像 $f(x,y)$ 在二元函数小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(p)}$ 上的正交投影 $f_j^{(p)}(x,y)$ 及其正交级数展开表达式满足如下关系：对于 $u \geqslant 0, p \geqslant 0, j \in \mathbb{Z}$,

$$
f_{j+1}^{(p)}(x,y) = \sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1} f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y) = \sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)} f_{j-u}^{(\ell)}(x,y)
$$

或者等价地表示为

$$
\begin{aligned}
\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;m,n}^{(p)} Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) &= \sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)} Q_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y) \\
&= \sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-u;m,n}^{(\ell)} Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y)
\end{aligned}
$$

证明　基本思想是利用小波包函数子空间的小波包金字塔正交直和分解关系以及这个过程中出现的各个小波包函数子空间的规范正交基.

首先，二维小波包函数子空间存在如下小波金字塔正交直和分解关系：

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)} &= \left[\bigoplus_{\ell=0}^{3} \mathbb{Q}_{j}^{(4p+\ell)}\right]\\ &= \left[\bigoplus_{\ell=0}^{15} \mathbb{Q}_{j-1}^{(4^2 p+\ell)}\right]\\ &\vdots\\ &= \left[\bigoplus_{\ell=0}^{(4^{u+1}-1)} \mathbb{Q}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}\right] = \left[\bigoplus_{\xi=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)} \mathbb{Q}_{j-u}^{(\xi)}\right]\end{aligned}$$

其次，二维小波包函数子空间 $\mathbb{Q}_{j-\xi}^{(4^{\xi+1}p+\ell)}, \ell = 0,1,2,\cdots,(4^{\xi+1}-1), \xi = 0,1,2,\cdots$ 和 $\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)}$ 存在如下规范正交小波包基张成表示：对于 $\xi = 0,1,2,\cdots$,

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{j+1}^{(p)} &= \text{Closespan}\{ Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y);(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}\\ \mathbb{Q}_{j-\xi}^{(4^{\xi+1}p+\ell)} &= \text{Closespan}\{ Q_{j-\xi;m,n}^{(4^{\xi+1}p+\ell)}(x,y);(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}\\ \ell &= 0,1,2,\cdots,(4^{\xi+1}-1)\end{aligned}$$

这样就完成了定理的证明.

(γ) 数字图像小波金字塔正交性

定理 6.65 (数字图像小波金字塔正交性) 在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)}; j\in\mathbb{Z}\}, Q^{(0)}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y))$ 以及正交二维小波包理论基础上，物理图像 $f(x,y)$ 在二元函数小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(p)}$ 上的正交投影 $f_j^{(p)}(x,y)$ 及其正交级数展开表达式满足如下关系：对于 $j\in\mathbb{Z}, J\in\mathbb{N}$，$p = 0,1,2,\cdots$,

$$f_{j+1}^{(p)}(x,y) = f_{j-J}^{(4^{J+1}p)}(x,y) + \sum_{u=0}^{J}\sum_{\ell=1}^{3} f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)$$

而且

$$\begin{aligned}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j+1;m,n}^{(p)} Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) =& \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-J;m,n}^{(4^{J+1}p)} Q_{j-J;m,n}^{(4^{J+1}p)}(x,y)\\ &+ \sum_{u=0}^{J}\sum_{\ell=1}^{3}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)} Q_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)\end{aligned}$$

在无穷维矩阵空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中引入无穷维矩阵记号：

$$\mathscr{D}_j^{(\ell)} = \{d_{j;v,w}^{(\ell)}; (v,w)\in\mathbb{Z}^2\} \in \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}), \quad j\in\mathbb{Z}, \quad \ell = 0,1,2,\cdots$$

那么，因为上述过程完全是正交投影，所以，在无穷维矩阵空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中成立如下的范数恒等式：

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\left\|\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2+\sum_{u=0}^{J}\sum_{\ell=1}^{3}\left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

其中

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j+1;m,n}^{(p)}\right|^2$$

$$\left\|\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j-J;m,n}^{(4^{J+1}p)}\right|^2$$

$$\left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}\right|^2,\quad \ell=1,2,3,\quad u=0,1,2,\cdots,J$$

证明　建议读者完成这个定理的证明.

(δ) 数字图像小波包金字塔正交性

定理 6.66 (数字图像小波包金字塔正交性)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 以及正交二维小波包理论基础上，物理图像 $f(x,y)$ 在二元函数小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(p)}$ 上的正交投影 $f_j^{(p)}(x,y)$ 及其正交级数展开表达式满足如下关系：对于 $u\geqslant 0,p\geqslant 0,j\in\mathbb{Z}$，

$$f_{j+1}^{(p)}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)}f_{j-u}^{(\ell)}(x,y)$$

或者等价地表示为

$$\begin{aligned}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j+1;m,n}^{(p)}Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)&=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}Q_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)\\&=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j-u;m,n}^{(\ell)}Q_{j-u;m,n}^{(\ell)}(x,y)\end{aligned}$$

那么，因为上述过程完全是正交投影，所以，在无穷维矩阵空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中成立如下的范数恒等式：

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{\ell=0}^{4^{u+1}-1}\left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{\ell=4^{u+1}p}^{4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)}\left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

其中

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2 = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j+1;m,n}^{(p)}\right|^2$$

$$\left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2 = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}\right|^2,\quad \ell=0,1,2,\cdots,(4^{u+1}-1)$$

证明　建议读者完成这个定理的证明.

(ε) 数字图像小波金字塔表示方法

引入符号：$\mathcal{A}_{(u)}=(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})_{[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]}$ 是 $[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]$ 矩阵，按照分块矩阵表示为 1×2 的分块形式，$\mathcal{H}_0^{(u)},\mathcal{H}_1^{(u)}$ 都是 $[2^{-u}\infty]\times[2^{-(u+1)}\infty]$ 矩阵，其构造方法与 $u=0$ 对应的 $\mathcal{H}_0^{(u)}=\mathcal{H}_0^{(0)}=\mathcal{H},\mathcal{H}_1^{(u)}=\mathcal{H}_1^{(0)}=\mathcal{G}$ 的构造方法完全相同，这样，比如当 $u=0$ 时，

$$\mathcal{A}_{(u)}=(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})_{[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]}=(\mathcal{H}_0^{(0)}\mid\mathcal{H}_1^{(0)})_{\infty\times\infty}=(\mathcal{H}\mid\mathcal{G})_{\infty\times\infty}$$

它们之间唯一的差异仅仅只是这些矩阵的尺寸将随着 $u=0,1,2,\cdots,J$ 的数值不同而发生变化. 这样得到的矩阵 $\mathcal{A}_{(u)}=(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})_{[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]}$ 是酉矩阵. 实际上，

$$\mathcal{A}_{(u)}\mathcal{A}_{(u)}^*=\left(\mathcal{H}_0^{(u)}\middle|\mathcal{H}_1^{(u)}\right)\left(\begin{array}{c}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^*\\ \hline [\mathcal{H}_1^{(u)}]^*\end{array}\right)=\mathcal{H}_0^{(u)}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^*+\mathcal{H}_1^{(u)}[\mathcal{H}_1^{(u)}]^*=\mathcal{I}_{[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]}$$

$$\mathcal{A}_{(u)}^*\mathcal{A}_{(u)}=\left(\begin{array}{c}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^*\\ \hline [\mathcal{H}_1^{(u)}]^*\end{array}\right)(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})=\left(\begin{array}{c|c}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^*\mathcal{H}_0^{(u)} & [\mathcal{H}_0^{(u)}]^*\mathcal{H}_1^{(u)}\\ \hline [\mathcal{H}_1^{(u)}]^*\mathcal{H}_0^{(u)} & [\mathcal{H}_1^{(u)}]^*\mathcal{H}_1^{(u)}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{I} & \mathcal{O}\\ \hline \mathcal{O} & \mathcal{I}\end{array}\right)$$

其中 $\mathcal{I},\mathcal{O}$ 分别是 $[2^{-(u+1)}\infty]\times[2^{-(u+1)}\infty]$ 的单位矩阵和零矩阵，$\mathcal{H}_0^{(u)}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^*$ 和 $\mathcal{H}_1^{(u)}[\mathcal{H}_1^{(u)}]^*$ 都是 $[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]$ 的矩阵，而且，它们的和是 $[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]$ 的单位矩阵 $\mathcal{H}_0^{(u)}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^*+\mathcal{H}_1^{(u)}[\mathcal{H}_1^{(u)}]^*=\mathcal{I}$.

回顾数字图像小波分解和合成算法公式：对于 $u=0,1,2,\cdots,J$,

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-u}^{(0)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(1)}\\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(3)}\end{array}\right)=\mathcal{A}_{(u)}^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}\bar{\mathcal{A}}_{(u)}=\left(\begin{array}{c|c}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_0^{(u)} & [\mathcal{H}_0^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_1^{(u)}\\ \hline [\mathcal{H}_1^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_0^{(u)} & [\mathcal{H}_1^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_1^{(u)}\end{array}\right)$$

$$\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}=\mathcal{A}_{(u)}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-u}^{(0)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(1)}\\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(3)}\end{array}\right)\mathcal{A}_{(u)}^{\mathrm{T}}=(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-u}^{(0)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(1)}\\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}}\\ \hline [\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}}\end{array}\right)$$

$$=\sum_{\zeta=0}^{1}\sum_{\varsigma=0}^{1}\mathcal{H}_\varsigma^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(\varsigma\zeta)_2}[\mathcal{H}_\zeta^{(u)}]^{\mathrm{T}}$$

现在逐步给出数字图像小波金字塔表达式.

设 $\ell=\varepsilon_1\times 2+\varepsilon_0=(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$ 是 ℓ 按照 2 位的二进制表示，$u=0,1,2,\cdots,J$，将数字图像小波分解表示为

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-u}^{(0)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(1)}\\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(3)}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-u}^{(00)_2} & \mathscr{D}_{j-u}^{(01)_2}\\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(10)_2} & \mathscr{D}_{j-u}^{(11)_2}\end{array}\right)=\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(u)}^{*}\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{(u)}$$
$$=\left(\begin{array}{c}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}]^*\\ \hline [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}]^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}\left(\begin{array}{c|c}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(u)} & \bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(u)}\end{array}\right)$$
$$=\left(\begin{array}{c|c}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(u)} & [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(u)}\\ \hline [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(u)} & [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(u)}\end{array}\right)$$

或者等价地写成：对于 $\ell=\varepsilon_1\times 2+\varepsilon_0=(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$，

$$\mathscr{D}_{j-u}^{(\ell)}=\mathscr{D}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}=[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{\varepsilon_0}^{(u)}$$
$$=\begin{cases}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(u)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(00)_2=0\\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(u)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(01)_2=1\\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(u)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(10)_2=2\\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(u)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(11)_2=3\end{cases}$$

随着 $u=0,1,2,\cdots,J$ 逐次迭代可得：对于 $\ell=\varepsilon_1\times 2+\varepsilon_0=(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$，

$$\mathscr{D}_{j-J}^{(\ell)}=\mathscr{D}_{j-J}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}$$
$$=[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(J)}]^*[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}]^*\cdots[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}]\cdots[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J-1)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{\varepsilon_0}^{(J)}]$$
$$=\begin{cases}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J)}]^*[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}]^*\cdots[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}]\cdots[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J-1)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(00)_2=0\\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J)}]^*[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}]^*\cdots[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}]\cdots[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J-1)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(J)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(01)_2=1\\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(J)}]^*[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}]^*\cdots[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}]\cdots[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J-1)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(10)_2=2\\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(J)}]^*[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}]^*\cdots[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}]\cdots[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J-1)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(J)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(11)_2=3\end{cases}$$

这是 4 个尺寸为 $[2^{-(J+1)}\infty]\times[2^{-(J+1)}\infty]$ 的数字图像. 比如，当 $J=0$ 时，

$$\mathscr{D}_j^{(\ell)}=\mathscr{D}_j^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}=\begin{cases}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(00)_2=0\\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(0)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(01)_2=1\\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(10)_2=2\\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(0)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(11)_2=3\end{cases}$$

这是 4 个尺寸为 $[2^{-1}\infty]\times[2^{-1}\infty]$ 的数字图像，当 $J=1$ 时,

$$\mathscr{D}_{j-1}^{(\ell)}=\mathscr{D}_{j-1}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}=\begin{cases}[\mathcal{H}_0^{(1)}]^*[\mathcal{H}_0^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}[\bar{\mathcal{H}}_0^{(0)}][\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(00)_2=0\\ [\mathcal{H}_0^{(1)}]^*[\mathcal{H}_0^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}[\bar{\mathcal{H}}_0^{(0)}][\bar{\mathcal{H}}_1^{(1)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(01)_2=1\\ [\mathcal{H}_1^{(1)}]^*[\mathcal{H}_0^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}[\bar{\mathcal{H}}_0^{(0)}][\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(10)_2=2\\ [\mathcal{H}_1^{(1)}]^*[\mathcal{H}_0^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}[\bar{\mathcal{H}}_0^{(0)}][\bar{\mathcal{H}}_1^{(1)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=(11)_2=3\end{cases}$$

这是 4 个尺寸为 $[2^{-2}\infty]\times[2^{-2}\infty]$ 的数字图像.

这种图像小波金字塔分解式本质上是一种不完全的塔式结构，需要保留的分解图像，在 $u=0,1,\cdots,J-1$ 时，只需要保留 $\ell=\varepsilon_1\times 2+\varepsilon_0=(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\neq 0$ 对应的 3 个尺寸为 $[2^{-(u+1)}\infty]\times[2^{-(u+1)}\infty]$ 的子图像，但是，在 $u=J$ 时，需要保留 4 个尺寸是 $[2^{-(J+1)}\infty]\times[2^{-(J+1)}\infty]$ 的全部子图像，因此，如果不计较子图像的尺寸，只关心子图像的个数，那么，这个分解过程必须保留 $(3J+4)$ 个分解子图像.

反过来，论述数字图像小波金字塔的合成过程.

设 $\ell=\varepsilon_1\times 2+\varepsilon_0=(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$ 是 ℓ 按照 2 位的二进制表示，$u=0,1,2,\cdots,J$，将数字图像小波合成公式写为

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j+1-u}^{(00)_2}&=\mathcal{A}_{(u)}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-u}^{(00)_2}&\mathscr{D}_{j-u}^{(01)_2}\\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(10)_2}&\mathscr{D}_{j-u}^{(11)_2}\end{array}\right)\mathcal{A}_{(u)}^{\mathrm{T}}\\ &=\left(\mathcal{H}_0^{(u)}\middle|\mathcal{H}_1^{(u)}\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-u}^{(00)_2}&\mathscr{D}_{j-u}^{(01)_2}\\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(10)_2}&\mathscr{D}_{j-u}^{(11)_2}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}}\\ \hline [\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}}\end{array}\right)\\ &=\mathcal{H}_0^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(00)_2}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}}+\mathcal{H}_0^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(01)_2}[\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}}\\ &\quad+\mathcal{H}_1^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(10)_2}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}}+\mathcal{H}_1^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(11)_2}[\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

或者等价地写成：对于 $\ell=\varepsilon_1\times 2+\varepsilon_0=(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$,

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j+1-u}^{(0)}&=\mathcal{H}_0^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(00)_2}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}}+\mathcal{H}_0^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(01)_2}[\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}}\\ &\quad+\mathcal{H}_1^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(10)_2}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}}+\mathcal{H}_1^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(11)_2}[\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}}\\ &=\sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{0,1,2,3\}}\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(u)}]^{\mathrm{T}}\\ &=\mathcal{H}_0^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(00)_2}[\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}}+\sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}}\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(u)}]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

随着 $u=J,(J-1),\cdots,1,0$ 逐次迭代可得：对于 $\ell=\varepsilon_1\times 2+\varepsilon_0=(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} &= \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{0,1,2,3\}} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)}\mathscr{D}_j^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathcal{H}_0^{(0)}\mathscr{D}_j^{(00)_2}[\mathcal{H}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}} + \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)}\mathscr{D}_j^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}]^{\mathrm{T}} \\
&= \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{0,1,2,3\}} \mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(1)}\mathscr{D}_{j-1}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(1)}]^{\mathrm{T}}[\mathcal{H}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}} + \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)}\mathscr{D}_j^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_0^{(1)}\mathscr{D}_{j-1}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_0^{(1)}]^{\mathrm{T}}[\mathcal{H}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}} \\
&\quad + \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}} \mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(1)}\mathscr{D}_{j-1}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(1)}]^{\mathrm{T}}[\mathcal{H}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}} \\
&\quad + \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)}\mathscr{D}_j^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}]^{\mathrm{T}} \\
&\ \ \vdots \\
&= \mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_0^{(1)}\cdots\mathcal{H}_0^{(J)}\mathscr{D}_{j-J}^{(00)_2}[\mathcal{H}_0^{(J)}]^{\mathrm{T}}\cdots[\mathcal{H}_0^{(1)}]^{\mathrm{T}}[\mathcal{H}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}} \\
&\quad + \sum_{u=0}^{J}\sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}} \mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_0^{(1)}\cdots\mathcal{H}_0^{(u-1)}\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(u)}]^{\mathrm{T}}[\mathcal{H}_0^{(u-1)}]^{\mathrm{T}} \\
&\quad \cdots[\mathcal{H}_0^{(1)}]^{\mathrm{T}}[\mathcal{H}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

或者改写为

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} &= \mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_0^{(1)}\cdots\mathcal{H}_0^{(J)}\mathscr{D}_{j-J}^{(00)_2}[\mathcal{H}_0^{(J)}]^{\mathrm{T}}\cdots[\mathcal{H}_0^{(1)}]^{\mathrm{T}}[\mathcal{H}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}} \\
&\quad + \sum_{u=0}^{J}\sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}} \left(\prod_{\zeta=0}^{(u-1)} \mathcal{H}_0^{(\zeta)} \left[\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(u)}]^{\mathrm{T}} \right] \prod_{\zeta=u-1}^{0} [\mathcal{H}_0^{(\zeta)}]^{\mathrm{T}} \right) \\
&= \left[\prod_{\zeta=0}^{J} \mathcal{H}_0^{(\zeta)} \right] \mathscr{D}_{j-J}^{(00)_2} \left[\prod_{\zeta=0}^{J} \mathcal{H}_0^{(\zeta)} \right]^{\mathrm{T}} \\
&\quad + \sum_{u=0}^{J}\sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}} \left(\left[\prod_{\zeta=0}^{(u-1)} \mathcal{H}_0^{(\zeta)} \right] \left[\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(u)}]^{T} \right] \left[\prod_{\zeta=0}^{(u-1)} \mathcal{H}_0^{(\zeta)} \right]^{\mathrm{T}} \right)
\end{aligned}
$$

这样，数字图像小波金字塔合成利用分解过程得到的 $(3J+4)$ 个低分辨率分解子图像合并产生一个高分辨率数字图像. 在 $u=0,1,\cdots,J-1$ 的取值过程中，每个 u 值对应 3 个数字分辨率是 $[2^{-(u+1)}\infty]\times[2^{-(u+1)}\infty]$ 的子图像，当 $u=J$ 时，对应 4 个数字分辨率是 $[2^{-(J+1)}\infty]\times[2^{-(J+1)}\infty]$ 的分解子图像，最终合成的数字图像是 $\infty\times\infty$ 的图像.

(ζ) 数字图像恒分辨率小波金字塔

设 $\ell=\varepsilon_1\times 2+\varepsilon_0=(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$ 是 ℓ 按照 2 位的二进制表示，$u=0,1,2,\cdots,J$，定义恒

分辨率是 $\infty\times\infty$ 的数字图像系列：对于 $(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}$，

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_j^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} &= \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(0)}\mathscr{D}_j^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(0)}]^{\mathrm{T}}\right]\\
\mathscr{R}_{j-1}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} &= \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(1)}\mathscr{D}_{j-1}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(1)}]^{\mathrm{T}}\right][\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}}\\
&\ \ \vdots\\
\mathscr{R}_{j-J+1}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} &= \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)}\cdots\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(J-1)}\mathscr{D}_{j-J+1}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(J-1)}]^{\mathrm{T}}\right]\cdots[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}}\\
\mathscr{R}_{j-J}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} &= \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)}\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}\right]\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(J)}\mathscr{D}_{j-J}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(J)}]^{\mathrm{T}}\right]\left[[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}]^{\mathrm{T}}\cdots[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}}\right]\\
\mathscr{R}_{j-J}^{(00)_2} &= \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)}\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J)}\right]\mathscr{D}_{j-J}^{(00)_2}\left[[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J)}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}]^{\mathrm{T}}\cdots[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}}\right]
\end{aligned}$$

或者写成：对于 $u=0,1,2,\cdots,J,(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}$，

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} &= \left[\prod_{\zeta=0}^{(u-1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\zeta)}\right]\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(u)}]^{\mathrm{T}}\right]\left[\prod_{\zeta=0}^{(u-1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\zeta)}\right]^{\mathrm{T}}\\
\mathscr{R}_{j-J}^{(00)_2} &= \left[\prod_{\zeta=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\zeta)}\right]\mathscr{D}_{j-J}^{(00)_2}\left[\prod_{\zeta=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\zeta)}\right]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

定理 6.67 (数字图像恒分辨率小波金字塔)　在二元函数空间 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 以及正交二维小波包理论基础上，物理图像 $f(x,y)$ 在二元函数小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(p)}$ 上的正交投影 $f_j^{(p)}(x,y)$ 及其正交级数展开表达式满足如下关系：对于 $j\in\mathbb{Z},J\in\mathbb{N}$， $p=0,1,2,\cdots$，

$$f_{j+1}^{(p)}(x,y)=f_{j-J}^{(4^{J+1}p)}(x,y)+\sum_{u=0}^{J}\sum_{\ell=1}^{3}f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)$$

而且

$$\begin{aligned}
\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j+1;m,n}^{(p)}Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y) &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j-J;m,n}^{(4^{J+1}p)}Q_{j-J;m,n}^{(4^{J+1}p)}(x,y)\\
&\quad+\sum_{u=0}^{J}\sum_{\ell=1}^{3}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}Q_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)
\end{aligned}$$

那么，在无穷维矩阵空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中，数字图像小波金字塔合成具有如下同维格式表示公式：

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\mathscr{R}_{j-J}^{(00)_2}+\sum_{u=0}^{J}\sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}}\mathscr{R}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}$$

这个公式把 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中的任何数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 表示为相同数字分辨率的如下数字图像族的正交和：

$$\{\mathscr{R}_{j-J}^{(00)_2},\mathscr{R}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2};u=0,1,\cdots,J,(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}\}$$

而且

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\left\|\mathscr{R}_{j-J}^{(00)_2}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2+\sum_{u=0}^{J}\sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}}\left\|\mathscr{R}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

这就是数字图像恒分辨率小波金字塔的“数字图像勾股定理”.

证明　容易证明，当 $0\leqslant u,v\leqslant J,(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\},(\xi_1\xi_0)_2\in\{1,2,3\}$ 时，

$$\left\langle\mathscr{R}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2},\mathscr{R}_{j-J}^{(00)_2}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=0$$

$$\left\langle\mathscr{R}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2},\mathscr{R}_{j-v}^{(\xi_1\xi_0)_2}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\left\|\mathscr{R}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2\delta(u-v)\delta(\varepsilon_1-\xi_1)\delta(\varepsilon_0-\xi_0)$$

建议读者补充详细的证明过程并完成这个定理的证明.

实际上，这个勾股定理和物理图像正交投影的勾股定理：

$$\left\|f_{j+1}^{(0)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2=\left\|f_{j-J}^{(0)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2+\sum_{u=0}^{J}\sum_{\ell=1}^{3}\left\|f_{j-u}^{(\ell)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

本质上是一致的，而且，当 $u=0,1,\cdots,J,(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}$ 时，

$$\left\|\mathscr{R}_{j-J}^{(00)_2}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\left\|\mathscr{D}_{j-J}^{(00)_2}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j-J;m,n}^{(00)_2}\right|^2$$

$$\left\|\mathscr{R}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\left|d_{j-u;m,n}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}\right|^2$$

当数字图像是 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 时，还可以得到更一般的数字图像恒分辨率小波金字塔表示方法.

设 $\ell=\varepsilon_1\times2+\varepsilon_0=(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$ 是 ℓ 按照 2 位的二进制表示，$u=0,1,2,\cdots,J$，定义恒分辨率是 $\infty\times\infty$ 的数字图像系列：对于 $(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}$，

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_{j}^{(4p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}&=\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(0)}\mathscr{D}_{j}^{(4p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(0)}]^{\mathrm{T}}\right]\\
\mathscr{R}_{j-1}^{(4^2p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}&=\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(0)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(1)}\mathscr{D}_{j-1}^{(4^2p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(1)}]^{\mathrm{T}}\right][\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(0)}]^{\mathrm{T}}\\
&\ \vdots\\
\mathscr{R}_{j-J+1}^{(4^Jp+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}&=\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(1)}\cdots\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(J-1)}\mathscr{D}_{j-J+1}^{(4^Jp+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(J-1)}]^{\mathrm{T}}\right]\cdots[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(1)}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(0)}]^{\mathrm{T}}\\
\mathscr{R}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}&=\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(1)}\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(J-1)}\right]\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(J)}\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(J)}]^{\mathrm{T}}\right]\\
&\quad\times\left[[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(J-1)}]^{\mathrm{T}}\cdots[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(1)}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(0)}]^{\mathrm{T}}\right]\\
\mathscr{R}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)}&=\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(1)}\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(J-1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(J)}\right]\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)}\\
&\quad\times\left[[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(J)}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(J-1)}]^{\mathrm{T}}\cdots[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(1)}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(0)}]^{\mathrm{T}}\right]
\end{aligned}$$

或者写成：对于 $u=0,1,2,\cdots,J,(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}$,

$$\mathscr{R}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}=\left[\prod_{\zeta=0}^{(u-1)}\mathcal{H}_0^{(\zeta)}\right]\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(u)}]^{\mathrm{T}}\right]\left[\prod_{\zeta=0}^{(u-1)}\mathcal{H}_0^{(\zeta)}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathscr{R}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)}=\left[\prod_{\zeta=0}^{J}\mathcal{H}_0^{(\zeta)}\right]\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)}\left[\prod_{\zeta=0}^{J}\mathcal{H}_0^{(\zeta)}\right]^{\mathrm{T}}$$

定理 6.68 (数字图像恒分辨率小波金字塔)　在二元函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析 $(\{\mathbb{Q}_j^{(0)};j\in\mathbb{Z}\},Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y))$ 以及正交二维小波包理论基础上，物理图像 $f(x,y)$ 在二元函数小波包子空间 $\mathbb{Q}_j^{(p)}$ 上的正交投影 $f_j^{(p)}(x,y)$ 及其正交级数展开表达式满足如下关系：对于 $j\in\mathbb{Z},J\in\mathbb{N}$，$p=0,1,2,\cdots$,

$$f_{j+1}^{(p)}(x,y)=f_{j-J}^{(4^{J+1}p)}(x,y)+\sum_{u=0}^{J}\sum_{\ell=1}^{3}f_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)$$

而且

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j+1;m,n}^{(p)}Q_{j+1;m,n}^{(p)}(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j-J;m,n}^{(4^{J+1}p)}Q_{j-J;m,n}^{(4^{J+1}p)}(x,y)+\sum_{u=0}^{J}\sum_{\ell=1}^{3}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}d_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}Q_{j-u;m,n}^{(4^{u+1}p+\ell)}(x,y)$$

那么，在无穷维矩阵空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中，数字图像小波金字塔合成具有如下同维格式表示公式：

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}=\mathscr{R}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)}+\sum_{u=0}^{J}\sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}}\mathscr{R}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}$$

这个公式把 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中的任何数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 表示为相同数字分辨率的如下数字图像族的正交和：

$$\left\{\mathscr{R}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)},\mathscr{R}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)};u=0,1,\cdots,J,(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}\right\}$$

而且

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\left\|\mathscr{R}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2+\sum_{u=0}^{J}\sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}}\left\|\mathscr{R}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

这就是数字图像恒分辨率小波金字塔的“数字图像勾股定理”.

证明　建议读者完成这个定理的证明.

(η) 有限数字图像小波金字塔

对于任意非负整数 u，引入两个 $[2^{-u}N]\times[2^{-(u+1)}N]$ 矩阵 $\mathcal{H}_0^{(u)},\mathcal{H}_1^{(u)}$，它们分别与二维多分辨率分析构造中的有限响应低通和带通滤波器 $\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$ 的构造方法相同，比如，当 $u=0$ 时，$\mathcal{H}_0^{(0)}=\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1^{(0)}=\mathcal{H}_1$，当 $u=1$ 时，$\mathcal{H}_0^{(\ell)}=\mathcal{H}_0^{(1)},\mathcal{H}_1^{(\ell)}=\mathcal{H}_1^{(1)}$ 都是 $[2^{-1}N]\times[2^{-2}N]$ 矩阵. 利用这些矩阵记号定义尺寸为 $[2^{-u}N]\times[2^{-u}N]$ 的分块矩阵 $\mathcal{A}_{(u)}=(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})$，比如，当 $u=0$ 时，$\mathcal{A}_{(u)}=(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})=\mathcal{A}=(\mathcal{H}_0\mid\mathcal{H}_1)$，容易证明 $[2^{-u}N]\times[2^{-u}N]$ 的矩阵 $\mathcal{A}_{(u)}=(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})$ 是酉矩阵.

这里原始数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}=\{d_{j+1,m,n}^{(p)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}$ 是 $N\times N$ 的有限数字图像，其小波分解子图像的尺寸将是输入图像纵横方向尺寸均减半，比如，从 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 分解一次得到 $\mathscr{D}_j^{(4p+\ell)}=\{d_{j,v,w}^{(4p+\ell)};0\leqslant v,w\leqslant(0.5N-1)\},\ell=0,1,2,3$，这 4 个子图像的尺寸都是 $[0.5N]\times[0.5N]$，进一步将 $\mathscr{D}_j^{(4p)}$ 进行分解，得到的 4 个子图像是 $\mathscr{D}_{j-1}^{(4^2p+\ell)}=\{d_{j-1,v,w}^{(4^2p+\ell)};0\leqslant v,w\leqslant(0.25N-1)\},\ell=0,1,2,3$，它们的尺寸在纵横方向都是 $\mathscr{D}_j^{(4p)}$ 的尺寸减半且为 $[0.25N]\times[0.25N]$，如此等等，$\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)},\ell=0,1,2,3$ 是尺寸为 $[2^{-(u+1)}N]\times[2^{-(u+1)}N]$ 的 4 个子图像.

有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}=\{d_{j+1,m,n}^{(p)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}$ 的二维小波分解是四个纵横分辨率减半的子图像 $\mathscr{D}_j^{(4p+\ell)}=\{d_{j,v,w}^{(4p+\ell)};0\leqslant v,w\leqslant(0.5N-1)\},\ell=0,1,2,3$，按照有限数字图像二维小波分解的定义可以证明如下公式成立：

$$\begin{cases}d_{j;v,w}^{(4p+0)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\overline{h}^{(0)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)}\\d_{j;v,w}^{(4p+1)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\overline{h}^{(1)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)}\\d_{j;v,w}^{(4p+2)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\overline{h}^{(2)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)}\\d_{j;v,w}^{(4p+3)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\overline{h}^{(3)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)}\end{cases}$$

或者写成紧凑形式：对于 $v,w=0,1,\cdots,(0.5N-1)$，

$$d_{j;v,w}^{(4p+\ell)} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} \overline{h}^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j+1;m,n}^{(p)}, \quad \ell = 0,1,2,3$$

随着分解次数的增加，求和运算的总数将按照有限数字图像小波分解子图像尺寸的变化规律而改变. 当利用 $\mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)}$ 计算 $\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)}, \ell = 0,1,2,3$ 时，计算公式右边代数和的项数由 $m,n = 0,1,2,\cdots,(2^{-u}N-1)$ 决定，即求和共有 $[2^{-u}N]\times[2^{-u}N]$ 项，具体可以写成：对于 $v,w = 0,1,\cdots,(2^{-(u+1)}N-1)$，

$$\begin{cases} d_{j-u;v,w}^{(4^{u+1}p+0)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{2^{-u}N-1}\sum_{m=0}^{2^{-u}N-1} \overline{h}^{(0)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-u;m,n}^{(4^u p)} \\ d_{j-u;v,w}^{(4^{u+1}p+1)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{2^{-u}N-1}\sum_{m=0}^{2^{-u}N-1} \overline{h}^{(1)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-u;m,n}^{(4^u p)} \\ d_{j-u;v,w}^{(4^{u+1}p+2)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{2^{-u}N-1}\sum_{m=0}^{2^{-u}N-1} \overline{h}^{(2)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-u;m,n}^{(4^u p)} \\ d_{j-u;v,w}^{(4^{u+1}p+3)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{2^{-u}N-1}\sum_{m=0}^{2^{-u}N-1} \overline{h}^{(3)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-u;m,n}^{(4^u p)} \end{cases}$$

或者写成紧凑形式：对于 $v,w = 0,1,\cdots,(2^{-(u+1)}N-1)$，

$$d_{j-u;v,w}^{(4^{u+1}p+\ell)} = \sum_{n=0}^{(2^{-u}N-1)}\sum_{m=0}^{(2^{-u}N-1)} \overline{h}^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-u;m,n}^{(4^u p)}, \quad \ell = 0,1,2,3$$

设 $\ell = \varepsilon_1 \times 2 + \varepsilon_0 = (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$ 是 ℓ 按照 2 位的二进制表示，$u = 0,1,2,\cdots,J$，那么可以将有限数字图像小波金字塔分解算法公式等价地表示为

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+0)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+1)} \\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+3)} \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{c|c} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(00)_2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(01)_2)} \\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(10)_2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(11)_2)} \end{array}\right) \\ &= \boldsymbol{\mathcal{A}}_{(u)}^{*}\mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)}\overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{(u)} \\ &= \left(\begin{array}{c} [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}]^* \\ \hline [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}]^* \end{array}\right)\mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)}\left(\begin{array}{c|c} \overline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(u)} & \overline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(u)} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)}\overline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(u)} & [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)}\overline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(u)} \\ \hline [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)}\overline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(u)} & [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)}\overline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(u)} \end{array}\right) \end{aligned}$$

或者等价地写成：对于 $\ell = \varepsilon_1 \times 2 + \varepsilon_0 = (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$，

$$\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+\ell)} = \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} = [\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(u)}]^* \mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)} \bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{\varepsilon_0}^{(u)}$$

$$= \begin{cases} [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}]^* \mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(u)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (00)_2 = 0 \\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}]^* \mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(u)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (01)_2 = 1 \\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}]^* \mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(u)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (10)_2 = 2 \\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}]^* \mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(u)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (11)_2 = 3 \end{cases}$$

随着 $u = 0,1,2,\cdots,J$ 逐次迭代，递推可得：对于 $\ell = \varepsilon_1 \times 2 + \varepsilon_0 = (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$，

$$\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+\ell)} = \mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}$$

$$= [\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(J)}]^* [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}]^* \cdots [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}] \cdots [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J-1)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{\varepsilon_0}^{(J)}]$$

$$= \begin{cases} [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J)}]^* [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}]^* \cdots [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}] \cdots [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J-1)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (00)_2 = 0 \\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J)}]^* [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}]^* \cdots [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}] \cdots [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J-1)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(J)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (01)_2 = 1 \\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(J)}]^* [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}]^* \cdots [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}] \cdots [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J-1)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (10)_2 = 2 \\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(J)}]^* [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)}]^* \cdots [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}] \cdots [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(J-1)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(J)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (11)_2 = 3 \end{cases}$$

这是 4 个尺寸为 $[2^{-(J+1)}N] \times [2^{-(J+1)}N]$ 的数字图像. 比如，当 $J = 0$ 时，

$$\mathscr{D}_j^{(4p+\ell)} = \mathscr{D}_j^{(4p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} = \begin{cases} [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (00)_2 = 0 \\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(0)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (01)_2 = 1 \\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(0)}]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (10)_2 = 2 \\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(0)}]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(0)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (11)_2 = 3 \end{cases}$$

这是 4 个尺寸为 $[2^{-1}N] \times [2^{-1}N]$ 的数字图像. 当 $J = 1$ 时，

$$\mathscr{D}_{j-1}^{(4p+\ell)} = \mathscr{D}_{j-1}^{(4p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} = \begin{cases} [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)}]^* [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(1)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (00)_2 = 0 \\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)}]^* [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(1)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (01)_2 = 1 \\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(1)}]^* [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(1)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (10)_2 = 2 \\ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(1)}]^* [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} [\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0^{(0)}][\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_1^{(1)}], & (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = (11)_2 = 3 \end{cases}$$

这是 4 个尺寸为 $[2^{-2}N] \times [2^{-2}N]$ 的数字图像.

这种图像小波金字塔分解式本质上是一种不完全的塔式结构，需要保留的分解图像，在 $u = 0,1,\cdots,J-1$ 时，只需要保留 $\ell = \varepsilon_1 \times 2 + \varepsilon_0 = (\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \neq 0$ 对应的 3 个尺寸为 $[2^{-(u+1)}N] \times [2^{-(u+1)}N]$ 的子图像，但是，在 $u = J$ 时，需要保留 4 个尺寸是 $[2^{-(J+1)}N] \times [2^{-(J+1)}N]$ 的全部子图像，因此，如果不计较子图像的尺寸，只关心子图像的个数，那么，这个分解过程必须保留 $(3J+4)$ 个分解子图像.

有限数字图像小波金字塔合成算法公式可以写成

$$\mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)} = \mathcal{A}_{(u)} \left(\begin{array}{c|c} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(00)_2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(01)_2)} \\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(10)_2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(11)_2)} \end{array}\right) \mathcal{A}_{(u)}^{\mathrm{T}}$$

$$= \left(\mathcal{H}_0^{(u)} \middle| \mathcal{H}_1^{(u)}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(00)_2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(01)_2)} \\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(10)_2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(11)_2)} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} [\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}} \\ \hline [\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}} \end{array}\right)$$

$$= \mathcal{H}_0^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(00)_2)} [\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}} + \mathcal{H}_0^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(01)_2)} [\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}}$$

$$+ \mathcal{H}_1^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(10)_2)} [\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}} + \mathcal{H}_1^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(11)_2)} [\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}}$$

或者等价地写成

$$\mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p)} = \mathcal{H}_0^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(00)_2)} [\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}} + \mathcal{H}_0^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(01)_2)} [\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}}$$

$$+ \mathcal{H}_1^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(10)_2)} [\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}} + \mathcal{H}_1^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(11)_2)} [\mathcal{H}_1^{(u)}]^{\mathrm{T}}$$

$$= \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{0,1,2,3\}} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\mathcal{H}_{\varepsilon_9}^{(u)}]^{\mathrm{T}}$$

$$= \mathcal{H}_0^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p)} [\mathcal{H}_0^{(u)}]^{\mathrm{T}} + \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{1,2,3\}} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\mathcal{H}_{\varepsilon_9}^{(u)}]^{\mathrm{T}}$$

随着 $u = J, (J-1), \cdots, 1, 0$ 逐次迭代可得

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} = \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{0,1,2,3\}} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)} \mathscr{D}_{j}^{(4p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}]^{\mathrm{T}}$$

$$= \mathcal{H}_0^{(0)} \mathscr{D}_{j}^{(4p)} [\mathcal{H}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}} + \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{1,2,3\}} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)} \mathscr{D}_{j}^{(4p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}]^{\mathrm{T}}$$

$$= \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{0,1,2,3\}} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(1)} \mathscr{D}_{j-1}^{(4^2p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(1)}]^{\mathrm{T}} [\mathcal{H}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}}$$

$$+ \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{1,2,3\}} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)} \mathscr{D}_{j}^{(4p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}]^{\mathrm{T}}$$

$$= \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} \mathscr{D}_{j-1}^{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} [\mathcal{H}_0^{(1)}]^{\mathrm{T}} [\mathcal{H}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}}$$

$$+ \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{1,2,3\}} \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(1)} \mathscr{D}_{j-1}^{(4^2p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(1)}]^{\mathrm{T}} [\mathcal{H}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}}$$

$$+ \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{1,2,3\}} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(0)} \mathscr{D}_{j}^{(4p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}]^{\mathrm{T}}$$

$$\vdots$$

$$= \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} \cdots \mathcal{H}_0^{(J)} \mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p)} [\mathcal{H}_0^{(J)}]^{\mathrm{T}} \cdots [\mathcal{H}_0^{(1)}]^{\mathrm{T}} [\mathcal{H}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}}$$

$$+ \sum_{u=0}^{J} \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \in \{1,2,3\}} \left(\prod_{\zeta=0}^{(u-1)} \mathcal{H}_0^{(\zeta)} \left[\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(u)}]^{\mathrm{T}} \right] \prod_{\zeta=u-1}^{0} [\mathcal{H}_0^{(\zeta)}]^{\mathrm{T}} \right)$$

或者改写为

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} = \left[\prod_{\zeta=0}^{J} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\zeta)}\right] \mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p)} \left[\prod_{\zeta=0}^{J} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\zeta)}\right]^{\mathrm{T}}$$
$$+\sum_{u=0}^{J} \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}} \left(\prod_{\zeta=0}^{(u-1)} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\zeta)} \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(u)}]^{\mathrm{T}}\right] \prod_{\zeta=u-1}^{0} [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\zeta)}]^{\mathrm{T}}\right)$$

这样，有限数字图像小波金字塔合成利用分解过程得到的 $(3J+4)$ 个低分辨率分解子图像合并产生一个高分辨率数字图像. 在 $u=0,1,\cdots,J-1$ 的取值过程中，每个 u 值对应 3 个数字分辨率是 $[2^{-(u+1)}N]\times[2^{-(u+1)}N]$ 的分解子图像，当 $u=J$ 时，对应 4 个数字分辨率是 $[2^{-(J+1)}N]\times[2^{-(J+1)}N]$ 的分解子图像，最终合成产生的数字图像是 $N\times N$ 的原始数字图.

设 $\ell=\varepsilon_1\times 2+\varepsilon_0=(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$ 是 ℓ 按照 2 位的二进制表示，$u=0,1,2,\cdots,J$，定义恒分辨率是 $\infty\times\infty$ 的数字图像系列：对于 $(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}$，

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_j^{(4p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} &= \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(0)} \mathscr{D}_j^{(4p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(0)}]^{\mathrm{T}}\right] \\
\mathscr{R}_{j-1}^{(4^2p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} &= \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)} \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(1)} \mathscr{D}_{j-1}^{(4^2p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(1)}]^{\mathrm{T}}\right] [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}} \\
&\ \vdots \\
\mathscr{R}_{j-J+1}^{(4^Jp+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} &= \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)} \cdots \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(J-1)} \mathscr{D}_{j-J+1}^{(4^Jp+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(J-1)}]^{\mathrm{T}}\right] \cdots [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)}]^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}]^{\mathrm{T}} \\
\mathscr{R}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} &= \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)} \cdots \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(J)}\right] \mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)} \cdots \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}} \\
\mathscr{R}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)} &= \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)} \cdots \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J)}\right] \mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)} \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(1)} \cdots \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J-1)} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

或者写成：对于 $u=0,1,2,\cdots,J,(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}$，

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} &= \left[\prod_{\zeta=0}^{(u-1)} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\zeta)}\right] \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(u)} \mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} [\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(u)}]^{\mathrm{T}}\right] \left[\prod_{\zeta=0}^{(u-1)} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\zeta)}\right]^{\mathrm{T}} \\
\mathscr{R}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)} &= \left[\prod_{\zeta=0}^{J} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\zeta)}\right] \mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)} \left[\prod_{\zeta=0}^{J} \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\zeta)}\right]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

定理 6.69 (有限数字图像小波金字塔)　在 $N\times N$ 矩阵 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 中，利用前文的记号，有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}=\{d_{j+1,m,n}^{(p)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}$ 的小波金字塔同维格式表示公式为

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} = \mathscr{R}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)} + \sum_{u=0}^{J} \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}} \mathscr{R}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}$$

而且如下的 $N\times N$ 有限数字图像系是空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 中的正交系：

$$\{\mathscr{R}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)}, \mathscr{R}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}; u=0,1,\cdots,J,(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}\}$$

满足范数恒等式

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 = \left\|\mathscr{R}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 + \sum_{u=0}^{J} \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\{1,2,3\}} \left\|\mathscr{R}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2$$

其中，$u=0,1,2,\cdots,J,(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2\in\left\{1,2,3\right\}$，

$$\left\|\mathscr{R}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 = \left\|\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(00)_2)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2$$

$$\left\|\mathscr{R}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 = \left\|\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+(\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2$$

这就是有限数字图像恒分辨率小波金字塔的“数字图像勾股定理”.

证明 建议读者完成这个定理的证明.

(θ) 数字图像小波包链分解

数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 的二维小波包分解算法连续迭代将产生一系列不断减半地降低纵横分辨率的“小的数字图像”，利用矩阵序列符号 $\mathcal{A}_{(u)} = (\mathcal{H}_0^{(u)} \mid \mathcal{H}_1^{(u)})_{[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]}$，其中 $u=0,1,2,\cdots,J$，这个迭代过程可以表示为如下的定理.

定理 6.70 (数字图像小波包链分解) 在无穷矩阵空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中，利用前文的记号，数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} = \{d_{j+1,m,n}^{(p)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}\in\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 的小波包链分解可以用分块矩阵形式表示为：对于 $u=0,1,2,\cdots,J$，

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+0)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+1)} \\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+3)} \end{array}\right) = \mathcal{A}_{(u)}^* \mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \bar{\mathcal{A}}_{(u)}$$

$$= \left(\begin{array}{c} \left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^* \\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^* \end{array}\right) \mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \left(\bar{\mathcal{H}}_0^{(u)} \middle| \bar{\mathcal{H}}_1^{(u)}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^* \mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \bar{\mathcal{H}}_0^{(u)} & \left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^* \mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \bar{\mathcal{H}}_1^{(u)} \\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^* \mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \bar{\mathcal{H}}_0^{(u)} & \left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^* \mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \bar{\mathcal{H}}_1^{(u)} \end{array}\right)$$

或者

$$\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+(\varsigma\zeta)_2)} = \left[\mathcal{H}_{\varsigma}^{(u)}\right]^* \mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p+m)} \bar{\mathcal{H}}_{\zeta}^{(u)}, \quad (\varsigma\zeta)_2 \in \{0,1\}\times\{0,1\}$$

其中 $m = 0,1,2,\cdots,(4^u - 1)$. 当 $u = 0,1,2,\cdots,J$ 逐渐增加最终到达 $u = J$ 时，上述分解将产生 $4^{(J+1)}$ 个子数字图像.

证明 利用数字图像小波包分解的定义和 $\mathcal{A}_{(u)} = (\mathcal{H}_0^{(u)} \mid \mathcal{H}_1^{(u)})_{[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]}$，$u = 0,1,2,\cdots,J$ 这样的分块矩阵定义，可以直接完成这个定理的证明.

(ι) 数字图像小波包金字塔分解

定理 6.71 (数字图像小波包金字塔分解) 在无穷矩阵空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中，利用前文的记号，数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} = \{d_{j+1,m,n}^{(p)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 的小波包链分解经过 $u = 0,1,2,\cdots,J$ 逐步计算最终得到 $4^{(J+1)}$ 个子数字图像：

$$\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m')}, \quad m' = 0,1,2,\cdots,(4^{J+1}-1)$$

这 $4^{(J+1)}$ 个子数字图像的数字分辨率都是 $[2^{-(J+1)}\infty]\times[2^{-(J+1)}\infty]$.

设 $m = 0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，将 m 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$\begin{aligned}
m &= (s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\ldots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2 \\
&= s_1^{(0)}\times 2^{2J+1} + s_0^{(0)}\times 2^{2J} + s_1^{(1)}\times 2^{2J-1} + s_0^{(1)}\times 2^{2J-2} + \cdots + s_1^{(J)}\times 2^1 + s_0^{(J)} \\
&= (s_1^{(0)}\times 2^{2J+1} + s_1^{(1)}\times 2^{2J-1} + \cdots + s_1^{(J)}\times 2^1) \\
&\quad + (s_0^{(0)}\times 2^{2J} + s_0^{(1)}\times 2^{2J-2} + \cdots + s_0^{(J)}) \\
&= 2\times(s_1^{(0)}\times 2^{2J} + s_1^{(1)}\times 2^{2J-2} + \cdots + s_1^{(J)}) \\
&\quad + (s_0^{(0)}\times 2^{2J} + s_0^{(1)}\times 2^{2J-2} + \cdots + s_0^{(J)}) \\
&= 2\times(s_1^{(0)}\times 4^{J} + s_1^{(1)}\times 4^{J-1} + \cdots + s_1^{(J)}) \\
&\quad + (s_0^{(0)}\times 4^{J} + s_0^{(1)}\times 4^{J-1} + \cdots + s_0^{(J)}) \\
&= 2\times(s_1^{(0)}s_1^{(1)}\cdots s_1^{(J)})_4 + (s_0^{(0)}s_0^{(1)}\cdots s_0^{(J)})_4
\end{aligned}$$

那么，可以得到 $\{\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m')}; m' = 0,1,2,\cdots,(4^{J+1}-1)\}$ 的如下计算公式：

$$\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)} = \left[\mathcal{H}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\mathcal{H}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\right]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\left[\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\cdots\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]$$

$$m = (s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2 \in \{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}$$

证明 把定理 6.70 的逐步迭代表示过程全部集中在一起即可得到这个定理的结果. 建议读者写出详细的证明过程.

(κ) 数字图像小波包链合成

定理 6.72 (数字图像小波包链合成)　在无穷矩阵空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中，利用前文的记号，数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}=\{d_{j+1,m,n}^{(p)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}\in\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 的小波包链分解经过 $u=0,1,2,\cdots,J$ 逐步计算最终得到 $4^{(J+1)}$ 个子数字图像：

$$\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m')},\quad m'=0,1,2,\cdots,(4^{J+1}-1)$$

反过来，利用上述 $4^{(J+1)}$ 个数字分辨率都是 $[2^{-(J+1)}\infty]\times[2^{-(J+1)}\infty]$ 的子数字图像按照如下迭代方法可以重建获得原始的数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$：对于 $u=J,J-1,\cdots,1,0$,

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p+m)}&=\mathcal{A}_{(u)}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+0)}&\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+1)}\\\hline\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+2)}&\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+3)}\end{array}\right)\mathcal{A}_{(u)}^{\mathrm{T}}\\&=\left(\mathcal{H}_0^{(u)}\middle|\mathcal{H}_1^{(u)}\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+0)}&\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+1)}\\\hline\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+2)}&\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\\\hline\left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\end{array}\right)\\&=\mathcal{H}_0^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+0)}\left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}+\mathcal{H}_0^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+1)}\left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\\&\quad+\mathcal{H}_1^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+2)}\left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}+\mathcal{H}_1^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+3)}\left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

或者

$$\mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p+m)}=\sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1}\mathcal{H}_{\varsigma}^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+(\varsigma\zeta)_2)}\left[\mathcal{H}_{\zeta}^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}$$

其中 $m=0,1,2,\cdots,(4^u-1)$. 当 $u=J,(J-1),\cdots,2,1,0$ 逐渐增加最终到达 $u=0$ 时，上述过程最终将得到原始数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$.

证明　利用数字图像小波包分解的定义和 $\mathcal{A}_{(u)}=(\mathcal{H}_0^{(u)}|\mathcal{H}_1^{(u)})_{[2^{-u}\infty]\times[2^{-u}\infty]}$ 的定义及酉性，其中 $u=J,(J-1),\cdots,2,1,0$, 就可以完成这个定理的证明.

(λ) 数字图像小波包金字塔表示法

定理 6.73 (数字图像小波包金字塔表示法)　在无穷矩阵空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中，利用前文的记号，数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}=\{d_{j+1,m,n}^{(p)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}\in\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 的小波包链分解经过 $u=0,1,2,\cdots,J$ 逐步计算最终得到 $4^{(J+1)}$ 个子数字图像：

$$\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m')},\quad m'=0,1,2,\cdots(4^{J+1}-1)$$

设 $m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，如果将 m 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$
\begin{aligned}
m &= (s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2 \\
&= s_1^{(0)}\times 2^{2J+1}+s_0^{(0)}\times 2^{2J}+s_1^{(1)}\times 2^{2J-1}+s_0^{(1)}\times 2^{2J-2}+\cdots+s_1^{(J)}\times 2^1+s_0^{(J)} \\
&= (s_1^{(0)}\times 2^{2J+1}+s_1^{(1)}\times 2^{2J-1}+\cdots+s_1^{(J)}\times 2^1) \\
&\quad +(s_0^{(0)}\times 2^{2J}+s_0^{(1)}\times 2^{2J-2}+\cdots+s_0^{(J)}) \\
&= 2\times(s_1^{(0)}\times 2^{2J}+s_1^{(1)}\times 2^{2J-2}+\cdots+s_1^{(J)}) \\
&\quad +(s_0^{(0)}\times 2^{2J}+s_0^{(1)}\times 2^{2J-2}+\cdots+s_0^{(J)}) \\
&= 2\times(s_1^{(0)}\times 4^{J}+s_1^{(1)}\times 4^{J-1}+\cdots+s_1^{(J)}) \\
&\quad +(s_0^{(0)}\times 4^{J}+s_0^{(1)}\times 4^{J-1}+\cdots+s_0^{(J)}) \\
&= 2\times(s_1^{(0)}s_1^{(1)}\cdots s_1^{(J)})_4+(s_0^{(0)}s_0^{(1)}\cdots s_0^{(J)})_4
\end{aligned}
$$

那么，利用 $\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m')}, m'=0,1,2,\cdots(4^{J+1}-1)$ 按照如下方法可以重建获得原始数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$：

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} \\
&= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\right]\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\right]\cdots\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\right]\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}\cdots\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

证明　根据迭代计算公式：

$$
\mathscr{D}_{j+1-u}^{(4^u p+m)}=\sum_{\varsigma=0}^{1}\sum_{\zeta=0}^{1}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\zeta}^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(4(4^u p+m)+(\varsigma\zeta)_2)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\zeta}^{(u)}\right]^{\mathrm{T}},\quad u=J,(J-1),\cdots,2,1,0
$$

其中 $m=0,1,2,\cdots,(4^u-1)$. 当 $u=J,(J-1),\cdots,2,1,0$ 逐渐减小最终到达 $u=0$ 时，上述过程即可得到原始数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$. 在这个过程中，直接演算可得

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} &= \sum_{s_1^{(0)}=0}^{1}\sum_{s_0^{(0)}=0}^{1}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\mathscr{D}_{j}^{(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \sum_{s_1^{(0)}=0}^{1}\sum_{s_0^{(0)}=0}^{1}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\left[\sum_{s_1^{(1)}=0}^{1}\sum_{s_0^{(1)}=0}^{1}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\mathscr{D}_{j-1}^{(4(4p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2)+(s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}\right]\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \sum_{s_1^{(0)}=0}^{1}\sum_{s_0^{(0)}=0}^{1}\left[\sum_{s_1^{(1)}=0}^{1}\sum_{s_0^{(1)}=0}^{1}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\mathscr{D}_{j-1}^{(4^2p+4(s_1^{(0)}s_0^{(0)})_2+(s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2=0}^{15}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\mathscr{D}_{j-1}^{(4^2p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)})_2)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0}^{4^{J+1}-1} \mathcal{H}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\mathcal{H}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\dots\mathcal{H}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\mathscr{D}_{j-1}^{(4^{J+1}p+m)}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}\dots\left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}$$

最后上式可以写成

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} &= \sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\prod_{\xi=J}^{0}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}} \\ &= \sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

这样就完成了这个定理的证明.

(μ) 数字图像小波包金字塔

在前述各种记号基础上，设 $m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，将 m 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=2\times(s_1^{(0)}s_1^{(1)}\cdots s_1^{(J)})_4+(s_0^{(0)}s_0^{(1)}\cdots s_0^{(J)})_4$$

定义数字分辨率为 $\infty\times\infty$ 的数字图像记号：

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)} &= \mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)} \\ &= \mathcal{H}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\mathcal{H}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\mathcal{H}_{\varsigma_0}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}\cdots\left[\mathcal{H}_{\xi_0}^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \\ &= \left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

其中 $m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$.

定理 6.74 (数字图像小波包金字塔) 在无穷矩阵空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中，利用前文的记号，数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}=\{d_{j+1,m,n}^{(p)};(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}\in\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 的小波包链分解经过 $u=0,1,2,\cdots,J$ 逐步计算最终得到 $4^{(J+1)}$ 个子数字图像：

$$\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m')},\quad m'=0,1,2,\cdots(4^{J+1}-1)$$

设 $m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，将 m 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=2\times(s_1^{(0)}s_1^{(1)}\cdots s_1^{(J)})_4+(s_0^{(0)}s_0^{(1)}\cdots s_0^{(J)})_4$$

那么，原始数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 具有如下的金字塔格式：

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}}\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}$$

其中数字图像族

$$\{\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)};m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}$$

是无穷矩阵空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中的正交系：对于 $0\leqslant m,m'\leqslant(4^{(J+1)}-1)$，

$$\left\langle \mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)},\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m')}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\left\|\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}\delta(m-m')$$

而且满足范数恒等式：

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left\|\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}$$

其中，$m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，

$$\left\|\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\left\|\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}$$

证明　直接验证在无穷矩阵空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中，当 $0\leqslant m,m'\leqslant(4^{(J+1)}-1)$ 时

$$\left\langle \mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)},\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m')}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\left\|\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}\delta(m-m')$$

证明的其余细节建议读者补充.

这个定理说明，数字图像小波包金字塔本质上是无穷矩阵空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中的一种正交分解，能够保持范数恒等式，体现了一种特殊的“数字图像勾股定理”，所以，数字图像小波包金字塔算子是酉算子，它表现为无穷矩阵空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中单位算子的正交分解.

(ν) 小波包金字塔与单位算子正交分解

定理 6.75 (小波包金字塔与单位算子正交分解)　在矩阵空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中，数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\in\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 的小波包链分解经过 $u=0,1,2,\cdots,J$ 逐步计算最终得到 $4^{(J+1)}$ 个子数字图像 $\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m)},m=0,1,2,\cdots(4^{J+1}-1)$.

设 $m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，将 m 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=2\times(s_1^{(0)}s_1^{(1)}\cdots s_1^{(J)})_4+(s_0^{(0)}s_0^{(1)}\cdots s_0^{(J)})_4$$

那么，$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 与 $\{\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m)};m=0,1,2,\cdots(4^{J+1}-1)\}$ 之间存在如下关系：

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}=\sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}$$

而且

$$\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)} = \left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} \left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]$$

其中 $m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2 = 0,1,2,\cdots,(4^{J+1}-1)$. 最终成立如下数字图像恒等式:

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)} = \sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0}^{(4^{(J+1)}-1)} \left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} \left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}$$

其中 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 是无穷矩阵空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中的任意矩阵, 因此上述恒等式本质上体现了单位算子的正交保范分解.

证明　建议读者完成这个定理的证明.

注释：成立如下演算：

$$\sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0}^{(4^{(J+1)}-1)} \left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} \left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$= \sum_{s_1^{(0)}=0}^{1}\sum_{s_0^{(0)}=0}^{1}\cdots\sum_{s_1^{(J)}=0}^{1}\sum_{s_0^{(J)}=0}^{1} \left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} \left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$= \sum_{s_1^{(0)}=0}^{1}\sum_{s_1^{(1)}=0}^{1}\cdots\sum_{s_1^{(J)}=0}^{1} \left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}} \mathscr{D}_{j+1}^{(p)} \sum_{s_0^{(0)}=0}^{1}\sum_{s_0^{(1)}=0}^{1}\cdots\sum_{s_0^{(J)}=0}^{1} \left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}$$

根据定理 6.75 可知

$$\sum_{s_1^{(0)}=0}^{1}\sum_{s_1^{(1)}=0}^{1}\cdots\sum_{s_1^{(J)}=0}^{1} \left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}} = \mathcal{I}_{\infty\times\infty}$$

$$\sum_{s_0^{(0)}=0}^{1}\sum_{s_0^{(1)}=0}^{1}\cdots\sum_{s_0^{(J)}=0}^{1} \left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}} = \mathcal{I}_{\infty\times\infty}$$

这个结果也可以直接演算验证. 它清晰直观地表达单位算子(无穷维单位矩阵)的正交分解：无穷维单位矩阵 $\mathcal{I}_{\infty\times\infty}$ 被分解为 $2^{(J+1)}$ 个正交投影算子

$$\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}},\quad (s_1^{(0)}s_1^{(1)}\cdots s_1^{(J)})_2 = 0,1,2,\cdots,(2^{(J+1)}-1)$$

或者被分解为 $2^{(J+1)}$ 个正交投影算子:

$$\sum_{s_0^{(J)}=0}^{1}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}},\quad (s_0^{(0)}s_0^{(1)}\cdots s_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(2^{(J+1)}-1)$$

这样，对于任意的 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\in\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$，得到 $2^{(J+1)}\times 2^{(J+1)}=4^{(J+1)}$ 个在无穷维矩阵空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中相互正交的投影数字图像：

$$\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}=\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}$$

其中 $m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=2\times(s_1^{(0)}s_1^{(1)}\cdots s_1^{(J)})_4+(s_0^{(0)}s_0^{(1)}\cdots s_0^{(J)})_4$ 的数值正好取遍 $m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$ 这 $4^{(J+1)}$ 个连续自然数.

另外，设 $\tilde{m}=(\tilde{s}_1^{(0)}\tilde{s}_0^{(0)}\tilde{s}_1^{(1)}\tilde{s}_0^{(1)}\cdots\tilde{s}_1^{(J)}\tilde{s}_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，那么可以验证，在无穷矩阵空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中，当 $0\leqslant m\neq\tilde{m}\leqslant(4^{(J+1)}-1)$ 时，

$$\left[\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+m)}\right]\left[\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+\tilde{m})}\right]^{*}=\mathcal{O}_{\infty\times\infty}$$

这说明了各个投影之间的正交性. 一个直接的推论就是

$$\left\langle\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+m)},\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+\tilde{m})}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}=\left\|\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2\delta(m-\tilde{m})$$

以及范数恒等式或“数字图像正交投影的勾股定理”：

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2=\sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left\|\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}^2$$

这样，完成了数字图像小波包金字塔理论的讨论.

6.8.5　有限数字图像金字塔理论

这里将出现的原始数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 是 $N\times N$ 的有限数字图像，而各个分解子图像比如 $\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{(u+1)}p+m)},m=0,1,2,\cdots,(4^{(u+1)}-1)$ 是 $[2^{-(u+1)}N]\times[2^{-(u+1)}N]$ 的子数字图像. 为了确保有限数字图像的数字分辨率满足小波包金字塔的要求，这里假设 $N=2^{N_0}$，而且，在实际论述有限数字图像小波包金字塔的计算公式时，为了保持公式的正确性，总是假定与小波包分解尺度级别相关的参数 $u\leqslant N_0$.

对于任意非负整数 u，引入两个 $[2^{-u}N]\times[2^{-(u+1)}N]$ 矩阵 $\mathcal{H}_0^{(u)},\mathcal{H}_1^{(u)}$，它们分别与以前的 $\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$ 的构造方法相同，比如，当 $u=0$ 时，$\mathcal{H}_0^{(0)}=\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1^{(0)}=\mathcal{H}_1$，当 $u=1$ 时，$\mathcal{H}_0^{(\ell)}=\mathcal{H}_0^{(1)},\mathcal{H}_1^{(\ell)}=\mathcal{H}_1^{(1)}$ 都是 $[2^{-1}N]\times[2^{-2}N]$ 矩阵. 利用这些矩阵记号定义 $[2^{-u}N]\times[2^{-u}N]$ 矩阵 $\mathcal{A}_{(u)}=(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})$，比如，当 $u=0$ 时，

$$\mathcal{A}_{(u)}=(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})=\mathcal{A}=(\mathcal{H}_0\mid\mathcal{H}_1)$$

容易证明 $[2^{-u}N]\times[2^{-u}N]$ 的矩阵 $\mathcal{A}_{(u)}=(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})$ 是酉矩阵.

(α) 有限数字图像小波包链

有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}=\{d_{j+1,m,n}^{(p)};0\leqslant m,n\leqslant(N-1)\}$ 的二维小波包分解被定义为：u 是非负整数，在尺度级别 $s=2^{-(j-u)}$ 时，$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 被分解为 $4^{(u+1)}$ 个尺寸是 $[2^{-(u+1)}N]\times[2^{-(u+1)}N]$ 的子数字图像：对于 $m=0,1,2,\cdots,(4^{(u+1)}-1)$，

$$\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{(u+1)}p+m)}=\{d_{j-u,v,w}^{(4^{(u+1)}p+m)};0\leqslant v,w\leqslant(2^{-(u+1)}N-1)\}$$

其迭代过程的计算公式是：当 $q=4^u p+0,4^u p+1,\cdots,4^u p+(4^u-1)$ 时，

$$\begin{cases}d_{j-u;v,w}^{(4q+0)}=\sum\limits_{n=0}^{2^{-u}N-1}\sum\limits_{m=0}^{2^{-u}N-1}\overline{h}^{(0)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-u;m,n}^{(q)}\\ d_{j-u;v,w}^{(4q+1)}=\sum\limits_{n=0}^{2^{-u}N-1}\sum\limits_{m=0}^{2^{-u}N-1}\overline{h}^{(1)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-u;m,n}^{(q)}\\ d_{j-u;v,w}^{(4q+2)}=\sum\limits_{n=0}^{2^{-u}N-1}\sum\limits_{m=0}^{2^{-u}N-1}\overline{h}^{(2)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-u;m,n}^{(q)}\\ d_{j-u;v,w}^{(4q+3)}=\sum\limits_{n=0}^{2^{-u}N-1}\sum\limits_{m=0}^{2^{-u}N-1}\overline{h}^{(3)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-u;m,n}^{(q)}\end{cases}$$

或者写成紧凑形式：

$$d_{j-u;v,w}^{(4q+\ell)}=\sum_{n=0}^{2^{-u}N-1}\sum_{m=0}^{2^{-u}N-1}\overline{h}^{(\ell)}(m-2v,n-2w)d_{j+1-u;m,n}^{(q)},\qquad \ell=0,1,2,3$$

其中 $0\leqslant v,w\leqslant(2^{-(u+1)}N-1)$.

利用矩阵序列符号 $\mathcal{A}_{(u)}=(\mathcal{H}_0^{(u)}\mid\mathcal{H}_1^{(u)})_{[2^{-u}N]\times[2^{-u}N]}$，可得到如下有限数字图像单步小波包分解计算公式：当 $q=4^u p+0,4^u p+1,\cdots,4^u p+(4^u-1)$ 时，

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-u}^{(4q+0)}&\mathscr{D}_{j-u}^{(4q+1)}\\\hline\mathscr{D}_{j-u}^{(4q+2)}&\mathscr{D}_{j-u}^{(4q+3)}\end{array}\right)=\mathcal{A}_{(u)}^{*}\mathscr{D}_{j+1-u}^{(q)}\bar{\mathcal{A}}_{(u)}=\left(\begin{array}{c}\left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^*\\\hline\left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{j+1-u}^{(q)}\left(\bar{\mathcal{H}}_0^{(u)}\middle|\bar{\mathcal{H}}_1^{(u)}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|c}\left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(q)}\bar{\mathcal{H}}_0^{(u)}&\left[\mathcal{H}_0^{(u)}\right]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(q)}\bar{\mathcal{H}}_1^{(u)}\\\hline\left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(q)}\bar{\mathcal{H}}_0^{(u)}&\left[\mathcal{H}_1^{(u)}\right]^*\mathscr{D}_{j+1-u}^{(q)}\bar{\mathcal{H}}_1^{(u)}\end{array}\right)$$

其中 $u=0,1,2,\cdots,J$. 这时候，成立如下的取值分布：对于 $\ell=0,1,2,3$，

$$\begin{aligned}4q+\ell &= 4(4^u p+0)+\ell, 4(4^u p+1)+\ell, \cdots, 4(4^u p+(4^u-1))+\ell \\ &= (4^{u+1}p+\ell), 4^{u+1}p+4+\ell, \cdots, 4^{u+1}p+4(4^u-1)+\ell\end{aligned}$$

数值分布正好是从 $4^{u+1}p$ 开始连续地取值直到最大值：其中 $\ell=3$，

$$4^{u+1}p+4(4^u-1)+\ell = 4^{u+1}p+4(4^u-1)+3 = 4^{u+1}p+(4^{u+1}-1)$$

因此，当 $u=0,1,2,\cdots,J$ 逐渐增加到 $u=J$ 时，上述分解将产生 $4^{(J+1)}$ 个数字子图像. 设 $m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，将 m 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2 = 2\times(s_1^{(0)}s_1^{(1)}\cdots s_1^{(J)})_4+(s_0^{(0)}s_0^{(1)}\cdots s_0^{(J)})_4$$

这时，相应的 $4^{(J+1)}$ 个分解所得有限数字图像的直接计算公式是

$$\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)} = \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\right]^* \mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\left[\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\cdots\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]$$

其中 $m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}$. 这 $4^{(J+1)}$ 个数字子图像的数字分辨率都是 $[2^{-(J+1)}N]\times[2^{-(J+1)}N]$.

这就是有限数字图像小波包金字塔算法图像分解的完整过程.

这个有限数字图像金字塔的层级由与小波包分解尺度级别相关的参数 u 标定，随着 $u=0,1,2,\cdots,J$ 逐渐增加，这个有限数字图像金字塔的高度逐渐增加，而塔的底部不断在纵横方向倍增，最终形成一个完美的"金字塔形"的有限数字图像金字塔结构.

在这个由与小波包分解尺度级别相关的参数 u 标定的金字塔的每个塔级层面上，如下的能量守恒关系都成立：

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 &= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left\|\mathscr{D}_{j-J}^{(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 \\ &= \sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}}\left\|\mathscr{D}_{j-J}^{(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 &= \sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left\|\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 \\ &= \sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}}\left\|\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2\end{aligned}$$

反过来，研究有限数字图像小波包金字塔合成算法. 当 $u=J,J-1,\cdots,1,0$ 时，

在上述数字金字塔的第 u 个层面的全部子图像 $\mathscr{D}_{j-u}^{(m)}, m=0,1,2,\cdots,(4^{(u+1)}-1)$ 或者 $\mathscr{D}_{j-u}^{(4^{u+1}p+m)}, m=0,1,2,\cdots,(4^{(u+1)}-1)$ 可以完全重构原始图像. 有限数字图像二维小波包合成算法的逐步迭代公式是：对于 $q=4^u p+0, 4^u p+1,\cdots,4^u p+(4^u-1)$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_{j+1-u}^{(q)} &= \boldsymbol{\mathcal{A}}_{(u)}\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-u}^{(4q+0)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4q+1)}\\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(4q+2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4q+3)}\end{array}\right)\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(u)}^{\mathrm{T}}\\
&= \left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)} \mid \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{D}_{j-u}^{(4q+0)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4q+1)}\\ \hline \mathscr{D}_{j-u}^{(4q+2)} & \mathscr{D}_{j-u}^{(4q+3)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\\ \hline \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\end{array}\right)\\
&= \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(4q+0)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(4q+1)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(4q+2)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(u)}\right]^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}\mathscr{D}_{j-u}^{(4q+3)}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(u)}\right]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

定义数字分辨率为 $N\times N$ 的数字图像记号：

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}^{(4^{u+1}p+m)} &= \mathscr{R}^{(4^{u+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\\
&= \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\right]\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\right]\cdots\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\right]\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{u+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\\
&\quad \times\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}\cdots\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

其中 $m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}$. 这样的有限数字图像共有 $4^{(J+1)}$ 个，它们相互正交而且满足下述的范数恒等式或能量守恒规律：

$$\begin{aligned}
\left\|\mathscr{R}^{(4^{u+1}p+m)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2 &= \left\|\mathscr{R}^{(4^{u+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2\\
&= \left\|\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{u+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2
\end{aligned}$$

其中 $m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2\in(0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1))$.

利用这些记号，可以便利研究和表达有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 的完整重建过程.

(β) 有限数字图像小波包金字塔

定理 6.76 (有限数字图像小波包金字塔)　在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 中，利用前文的记号，有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\in\mathbb{C}^{N\times N}$ 的小波包金字塔分解经过 $u=0,1,2,\cdots,J$ 逐步计算最终得到 $4^{(J+1)}$ 个子数字图像：

$$\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m')},\quad m'=0,1,2,\cdots,(4^{J+1}-1)$$

设 $m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，将 m 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=2\times(s_1^{(0)}s_1^{(1)}\cdots s_1^{(J)})_4+(s_0^{(0)}s_0^{(1)}\cdots s_0^{(J)})_4$$

定义：

$$\begin{aligned}&\mathscr{R}^{(4^{u+1}p+m)}\\&=\mathscr{R}^{(4^{u+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\\&=\left[\mathcal{H}_{s_1^{(0)}}^{(0)}\right]\left[\mathcal{H}_{s_1^{(1)}}^{(1)}\right]\cdots\left[\mathcal{H}_{s_1^{(J)}}^{(J)}\right]\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{u+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(J)}}^{(J)}\right]^{\mathrm{T}}\cdots\left[\mathcal{H}_{s_0^{(1)}}^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathcal{H}_{s_0^{(0)}}^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

那么，原始有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 具有如下的金字塔格式：

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2\in\{0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\}}\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}$$

其中数字图像族

$$\left\{\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)};m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)\right\}$$

在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 中保持正交关系：对于 $0\leqslant m,m'\leqslant(4^{(J+1)}-1)$，

$$\left\langle\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)},\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m')}\right\rangle_{\mathbb{C}^{N\times N}}=\left\|\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2\delta(m-m')$$

而且它们满足范数恒等式：

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left\|\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2$$

其中，$m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$，

$$\left\|\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2=\left\|\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2$$

证明　直接验证在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 中，当 $0\leqslant m,m'\leqslant(4^{(J+1)}-1)$ 时

$$\left\langle\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)},\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m')}\right\rangle_{\mathbb{C}^{N\times N}}=\left\|\mathscr{R}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^2\delta(m-m')$$

证明的其余细节建议读者补充.

这个定理说明，有限数字图像小波包金字塔本质上是矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 中的一种正交分解，能够保持范数恒等，体现了一种特殊的“有限数字图像勾股定理”，所以，有限数字图像小波包金字塔算子是酉算子，它表现为矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 中单位算

子的正交分解.

(γ) 小波包有限金字塔与单位算子正交分解

定理 6.77 (小波包有限金字塔与单位算子正交分解) 在空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 中, 有限数字图像 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\in\mathbb{C}^{N\times N}$ 的小波包链分解经过 $u=0,1,2,\cdots,J$ 逐步计算最终得到 $4^{(J+1)}$ 个子数字图像 $\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m)},m=0,1,2,\cdots(4^{J+1}-1)$.

设 $m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$, 如果将 m 按照 $2(J+1)$ 位的二进制方式表示为

$$m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=2\times(s_1^{(0)}s_1^{(1)}\cdots s_1^{(J)})_4+(s_0^{(0)}s_0^{(1)}\cdots s_0^{(J)})_4$$

那么, $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 与 $\{\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+m)};m=0,1,2,\cdots(4^{J+1}-1)\}$ 之间存在如下关系:

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}=\sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}$$

而且

$$\mathscr{D}_{j-J}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}=\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]$$

其中 $m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(4^{J+1}-1)$. 最终成立如下同维有限数字图像恒等式:

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}=\sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}$$

其中 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}$ 是矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 中的任意矩阵, 因此上述恒等式本质上体现了单位算子的正交保范分解.

证明 建议读者完成这个定理的证明.

注释: 成立如下演算:

$$\begin{aligned}&\sum_{m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\dots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\\
&=\sum_{s_1^{(0)}=0}^{1}\sum_{s_0^{(0)}=0}^{1}\cdots\sum_{s_1^{(J)}=0}^{1}\sum_{s_0^{(J)}=0}^{1}\left\{\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\right\}\\
&=\left\{\sum_{s_1^{(0)}=0}^{1}\sum_{s_1^{(1)}=0}^{1}\cdots\sum_{s_1^{(J)}=0}^{1}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\right\}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\left\{\sum_{s_0^{(0)}=0}^{1}\sum_{s_0^{(1)}=0}^{1}\cdots\sum_{s_0^{(J)}=0}^{1}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\right\}\end{aligned}$$

根据定理 6.77 可知

$$\sum_{s_1^{(0)}=0}^{1}\sum_{s_1^{(1)}=0}^{1}\cdots\sum_{s_1^{(J)}=0}^{1}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}=\mathcal{I}_{N\times N}$$

$$\sum_{s_0^{(0)}=0}^{1}\sum_{s_0^{(1)}=0}^{1}\cdots\sum_{s_0^{(J)}=0}^{1}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}=\mathcal{I}_{N\times N}$$

这个结果可以直接演算验证. 它可清晰直观地表达单位算子(单位矩阵)的正交分解：单位矩阵 $\mathcal{I}_{N\times N}$ 被分解为 $2^{(J+1)}$ 个正交投影算子

$$\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}},\quad (s_1^{(0)}s_1^{(1)}\cdots s_1^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(2^{(J+1)}-1)$$

或者被分解为 $2^{(J+1)}$ 个正交投影算子

$$\sum_{s_0^{(J)}=0}^{1}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}},\qquad (s_0^{(0)}s_0^{(1)}\cdots s_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(2^{(J+1)}-1)$$

这样, 对任意 $\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\in\mathbb{C}^{N\times N}$, 得到 $2^{(J+1)}\times 2^{(J+1)}=4^{(J+1)}$ 个在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 中相互正交的投影数字图像：

$$\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2)}=\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_1^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}\left[\prod_{\xi=0}^{J}\bar{\mathcal{H}}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]\left[\prod_{\xi=0}^{J}\mathcal{H}_{s_0^{(\xi)}}^{(\xi)}\right]^{\mathrm{T}}$$

其中 $m=(s_1^{(0)}s_0^{(0)}s_1^{(1)}s_0^{(1)}\cdots s_1^{(J)}s_0^{(J)})_2=2\times(s_1^{(0)}s_1^{(1)}\cdots s_1^{(J)})_4+(s_0^{(0)}s_0^{(1)}\cdots s_0^{(J)})_4$ 的数值正好取遍 $m=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$ 这 $4^{(J+1)}$ 个连续自然数.

另外, 设 $\tilde{m}=(\tilde{s}_1^{(0)}\tilde{s}_0^{(0)}\tilde{s}_1^{(1)}\tilde{s}_0^{(1)}\cdots\tilde{s}_1^{(J)}\tilde{s}_0^{(J)})_2=0,1,2,\cdots,(4^{(J+1)}-1)$, 那么可以验证, 在矩阵空间 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 中, 当 $0\leqslant m\neq\tilde{m}\leqslant(4^{(J+1)}-1)$ 时,

$$\left[\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+m)}\right]\left[\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+\tilde{m})}\right]^{*}=\mathscr{O}_{N\times N}$$

这说明了各个投影之间的正交性. 一个直接的推论就是

$$\left\langle\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+m)},\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+\tilde{m})}\right\rangle_{\mathbb{C}^{N\times N}}=\left\|\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^{2}\delta(m-\tilde{m})$$

以及范数恒等式或“有限数字图像正交投影勾股定理”或“矩阵正交投影勾股定理”：

$$\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^{2}=\sum_{m=0}^{(4^{(J+1)}-1)}\left\|\mathscr{B}^{(4^{J+1}p+m)}\right\|_{\mathbb{C}^{N\times N}}^{2}$$

这样, 完成了有限数字图像小波包金字塔理论的讨论.

6.9　多分辨率分析与金字塔理论

在一元函数空间多分辨率分析基础上，利用张量积方法建立了二元函数或物理图像或数字图像或有限数字图像的多分辨率分析、二维小波理论、二维小波链理论、二维小波包理论和二维小波包金字塔理论. 实际上，在整个论述过程中，这些内容最终都体现为"金字塔理论"的形式，只是有的表现为只有两层的"金字塔"，有的表现为多层但除了出发点之外每层都只有 4 个"子图像"(小波链)，有的表现为多层但每层并不是"满的"(小波包链)，具体表现各不相同，但是最完美的还是每层都是"满的"金字塔.

需要特别说明，本章的一个重要内容就是建立在二维多分辨率分析基础上的光场小波和光场小波包理论，正文中表现为超级数字图像. 一方面，考虑到物理图像和数字图像的光场本质和光场描述，放弃用脉冲函数(δ-函数)刻画的"经典点光源"，把光场理论建立在各种尺度的"尺度光源"、"小波光源"和"小波包光源"的基础上，构建光场小波理论、光场小波链理论、光场小波包理论和光场小波包金字塔理论，把物理图像处理、数字图像处理理解为"抽象的光场传播过程"，特别是物理图像处理和数字图像处理的小波、小波链、小波包链以及小波包金字塔，各自都表现为一种特殊的小波光场传播方式. 这为光学和光通信提供一种新颖的光场观点，即光场的"小波计算理论"、"小波包计算理论"和"光场金字塔理论"，把光学和光场传播理解为一种计算和计算过程，而计算的理论基础就是小波理论、小波包理论和小波包金字塔理论，完整的理论体系即为光场小波理论和光场小波包理论；另一方面，超级数字图像小波理论、超级数字图像小波包理论和超级数字图像金字塔理论本质上也提供了二元函数空间以及二维尺度子空间、小波子空间和小波包子空间的规范正交基，以及这些函数空间和函数子空间的规范正交基之间的转换关系，如果把这些转换关系看作算子，那么，这些算子都是酉算子. 光场小波理论和光场小波包理论中的"尺度光源"、"小波光源"、"小波包光源"以及"金字塔光源"的概念，其经典对比概念是"点光源，"相关的论述可参考顾德门(1976)，冉启文(1995, 2001)，冉启文和谭立英(2002, 2004)等的研究成果.

参考文献

成礼智，王红霞，罗永. 2004. 小波的理论与应用. 北京：科学出版社

顾德门 J W. 1976. 傅里叶光学导论. 詹达三，董经武，顾本源，译. 北京：科学出版社

迈耶 Y. 1992. 小波与算子（第一卷）. 尤众，译. 北京：世界图书出版公司

迈耶 Y. 1995. 小波与算子（第二卷和第三卷）. 王耀东，译. 北京：世界图书出版公司

冉启文. 1995. 小波分析方法及其应用. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社

冉启文. 2001. 小波变换与分数傅里叶变换理论及应用. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社

冉启文, 谭立英. 2002. 小波分析与分数傅里叶变换及应用. 北京: 国防工业出版社

冉启文, 谭立英. 2004. 分数傅里叶光学导论. 北京: 科学出版社

Coifman R R, Wickerhauser M V. 1992. Entropy-based algorithms for best basis selection. IEEE Transactions on Information Theory, 38(2): 713-718

Daubechies I. 1988. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Communications on Pure and Applied Mathematics, 41(7): 909-996

Daubechies I. 1990. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. IEEE Transactions on Information Theory, 36(5): 961-1005

Daubechies I. 1992. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics

Mallat S G. 1988. Multiresolution Representations and Wavelets. Philadelphia: University of Pennsylvania

Mallat S G. 1989a. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$. Transactions of the American Mathematical Society, 315(1): 69-87

Mallat S G. 1989b. A theory for multi-resolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11(7): 674-693

Mallat S G. 1989c. Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 37(12): 2091-2110

Mallat S G. 1996. Wavelets for a vision. Proceedings of the IEEE, 84(4): 604-614

Mallat S G. 2009. A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way. 3rd ed. New York: Academic Press

Mallat S G, Hwang W L. 1992. Singularity detection and processing with wavelets. IEEE Transactions on Information Theory, 38(2): 617-643

Mallat S G, Zhong S. 1991. Wavelet transform maxima and multiscale edges// Ruskai M B, et al. Wavelets and Their Applications. Boston: Jones and Bartlett, 67-104

Meyer Y. 1990. Ondelettes et Operateurs, Vol.1. Paris: Hermann

Meyer Y, Ryan R. 1993. Wavelets: Algorithms and Applications. Philadelphia: Society for Industrial & Applied Mathematics

Wickerhauser M V. 1992. Acoustic signal compression with wavelet packets//Chui C K, et al. Wavelet Analysis and its Application. New York: Academic Press: 679-700

第 7 章　多分辨率分析理论应用

多分辨率分析小波同时成全了小波理论和多分辨率分析理论. 在多分辨率分析理论框架下, 小波理论、小波包理论和金字塔理论高度融合统一, 代数结构简单一致, 理论体系简洁明了, 函数、算子和分布的连续表达与离散表达高度一致, 表达形式简练优美. 物理图像、数字图像、超级数字图像(抽象光场)以及有限数字图像的二维小波理论、二维小波链理论、二维小波包理论和金字塔理论, 充分体现了多分辨率分析理论的科学思想, 同时, 充分展现了这些科学研究对象在不同分辨率下的表现形式, 以及它们在不同分辨率之间相互转换的优美关联关系. 正是二维多分辨率分析理论, 以这些科学研究对象为载体, 完美诠释了“多分辨率分析的自然真谛”. 虽然利用张量积方法还可以在一维和二维小波理论、小波链理论、小波包理论和金字塔理论的基础上、形式上获得代数结构相似的三维甚至更高维的“多分辨率分析理论”和“小波理论”, 但是, 以通俗的“图像”(包含但不仅限于物理图像、数字图像、超级数字图像和有限数字图像等)为研究对象的二维多分辨率分析理论, 把“多分辨率的分析小波”和“多分辨率的分析思想”两者揭露和释放得足够充分, 更高维数的论述总有重复和累赘的嫌疑.

本章第一部分内容是利用多分辨率分析理论示例性构造几个典型的正交小波, 如 Haar 多分辨率分析小波、Shannon 多分辨率分析小波、Daubechies 多分辨率分析小波、Meyer 多分辨率分析小波等. 这里还涉及在更广泛的多分辨率意义下, 即在变分辨率意义下论述窗形任意和移动步长任意的马尔瓦尔-威尔逊(Malvar- Wilson)小波规范正交基理论.

确实存在没有对应多分辨率分析的正交小波, 也就是说, 这样的正交小波没有对应的尺度函数, 正因为这样, 在有些文献中把尺度函数称为父小波, 而将小波函数称为母小波. 但是实际上,多分辨率分析理论框架几乎能够构造所有常见的正交小波, 而且, 在双正交或对偶正交多分辨率分析框架下产生了解析性质(微分性质)、消失矩性质、速降或正则性能等应用性能极其优越的双正交或对偶正交的对称和近似对称小波理论体系, 更让人意外的是, 借助多分辨率分析理论思想并结合多项式和多项式矩阵的欧几里得(Euclid)分解或辗转相除法, 出现了提升格式小波或被有些文献称为第二代小波的小波构造理论, 显著降低了小波构造和正交小波构造的难度, 极大扩展和丰富了小波理论. 这些小波理论研究的内容十分丰富, 有兴趣深入了解的读者可以参考相应的文献.

本章第二部分内容是针对性地建立多分辨率分析框架下的时频分析理论，其中包含了经典时频分析理论以及小波时频分析理论、小波链时频分析理论、小波包时频分析理论和金字塔时频分析理论，在这部分工作中，最重要的是建立正交小波谱分析理论和正交小波包谱分析理论.

7.1　多分辨率分析

这里简短回顾多分辨率分析.

如果 $(\{V_J;J\in\mathbb{Z}\},\varphi(x))$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的一个多分辨率分析，那么尺度子空间列与函数 $\varphi(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的组合满足如下五个要求，即：

❶ 单调性：$V_J\subseteq V_{J+1},J\in\mathbb{Z}$；

❷ 稠密性：$\overline{\left[\bigcup_{J\in\mathbb{Z}}V_J\right]}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$；

❸ 唯一性：$\bigcap_{J\in\mathbb{Z}}V_J=\{0\}$；

❹ 伸缩性：$f(x)\in V_J\Leftrightarrow f(2x)\in V_{J+1},J\in\mathbb{Z}$;

❺ 构造性：$\{\varphi(x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 构成 V_0 的规范正交基，

其中 $\varphi(x)$ 称为尺度函数，对于任意的整数 $j\in\mathbb{Z}$，V_j 称为第 j 级尺度子空间. 定义空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中的闭线性子空间列 $\{W_j;j\in\mathbb{Z}\}$：对 $\forall j\in\mathbb{Z}$，子空间 W_j 满足 $W_j\perp V_j$，$V_{j+1}=W_j\oplus V_j$，其中，W_j 称为(第 j 级)小波子空间.

根据多分辨率分析理论构造获得的正交小波函数是 $\psi(x)\in W_0$，如下的伸缩平移函数系构成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基：

$$\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

除此之外，多分辨率分析理论还具有如下重要结果：

① 小波子空间序列 $\{W_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 相互正交，而且伸缩依赖：

$$g(x)\in W_j\Leftrightarrow g(2x)\in W_{j+1},\quad W_j\perp W_\ell,\quad \forall j\neq\ell,\quad (j,\ell)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

② 尺度空间列 $\{V_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 和小波空间列 $\{W_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 具有如下关系：

$$\begin{cases}m\geqslant j\Rightarrow W_m\perp V_j\\ m<j\Rightarrow W_m\subseteq V_j\end{cases}$$

③ 子空间正交直和分解关系：对于 $j\in\mathbb{Z},L\in\mathbb{N}$，

$$V_{j+L+1} = W_{j+L} \oplus W_{j+L-1} \oplus \cdots \oplus W_j \oplus V_j = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} W_{j+L-k}$$

而且

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = V_j \oplus (\bigoplus_{m=j}^{+\infty} W_m) = \bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty} W_m$$

④ 尺度方程和小波方程：

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \varphi(2x-n) \\ \psi(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \varphi(2x-n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(\omega) = \mathbb{H}(0.5\omega)\Phi(0.5\omega) \\ \Psi(\omega) = \mathbb{G}(0.5\omega)\Phi(0.5\omega) \end{cases}$$

或者等价地：对于任意的整数 $j \in \mathbb{Z}$，

$$\begin{cases} \varphi_{j,k}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{n-2k}\phi_{j+1,n}(x), k \in \mathbb{Z} \\ \psi_{j,k}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_{n-2k}\phi_{j+1,n}(x), k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(2^{-j}\omega) = \mathbb{H}(2^{-(j+1)}\omega)\Phi(2^{-(j+1)}\omega) \\ \Psi(2^{-j}\omega) = \mathbb{G}(2^{-(j+1)}\omega)\Phi(2^{-(j+1)}\omega) \end{cases}$$

其中低通和带通滤波器表示如下：

$$\mathbb{H}(\omega) = 2^{-0.5}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-i\omega n}, \quad \mathbb{G}(\omega) = 2^{-0.5}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n e^{-i\omega n}$$

而且，低通系数和带通系数当 $n \in \mathbb{Z}$ 时表示为

$$h_n = \left\langle \varphi(\cdot), \sqrt{2}\varphi(2\cdot -n) \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2}\int_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\varphi}(2x-n)dx$$

$$g_n = \left\langle \psi(\cdot), \sqrt{2}\varphi(2\cdot -n) \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2}\int_{x\in\mathbb{R}} \psi(x)\overline{\varphi}(2x-n)dx$$

同时满足 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} | h_n |^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} | g_n |^2 = 1$，其中 $\Phi(\omega)$ 和 $\Psi(\omega)$ 分别是尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换.

⑤ 子空间的规范正交基：

A. $\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$ 是 V_j 的规范正交基；

B. $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$ 是 W_j 的规范正交基；

C. $\{\phi_{j,k}(x), \psi_{j,k}(x); k \in \mathbb{Z}\}$ 是 V_{j+1} 的规范正交基；

D. $\{\phi_{j+1,k}(x) = 2^{(j+1)/2}\phi(2^{j+1} x - k); k \in \mathbb{Z}\}$ 是 V_{j+1} 的规范正交基；

E. $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k); (j,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基.

⑥ 2×2 的构造矩阵：

$$\mathbf{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbb{H}(\omega) & \mathbb{H}(\omega+\pi) \\ \mathbb{G}(\omega) & \mathbb{G}(\omega+\pi) \end{pmatrix}$$

满足如下恒等式:

$$\mathbf{M}(\omega)\mathbf{M}^*(\omega)=\mathbf{M}^*(\omega)\mathbf{M}(\omega)=\mathbf{I}$$

或者等价地, 当 $\omega\in[0,2\pi]$ 时,

$$\begin{cases}|\mathbb{H}(\omega)|^2+|\mathbb{H}(\omega+\pi)|^2=1\\|\mathbb{G}(\omega)|^2+|\mathbb{G}(\omega+\pi)|^2=1\\\mathbb{H}(\omega)\overline{\mathbb{G}}(\omega)+\mathbb{H}(\omega+\pi)\overline{\mathbb{G}}(\omega+\pi)\ =0\end{cases}$$

或者等价地, 对于任意的 $(m,k)\in\mathbb{Z}^2$,

$$\begin{cases}\left\langle \mathbf{h}_0^{(2m)},\mathbf{h}_0^{(2k)}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_{n-2m}\overline{h}_{n-2k}=\delta(m-k)\\\left\langle \mathbf{h}_1^{(2m)},\mathbf{h}_1^{(2k)}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2m}\overline{g}_{n-2k}=\delta(m-k)\\\left\langle \mathbf{h}_1^{(2m)},\mathbf{h}_0^{(2k)}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2m}\overline{h}_{n-2k}=0\end{cases}$$

其中, $\mathbf{h}_0^{(m)}=\{h_{n-m};n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\in\ell^2(\mathbb{Z}),\mathbf{h}_1^{(m)}=\{g_{n-m};n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\in\ell^2(\mathbb{Z}),m\in\mathbb{Z}$, 换言之, $\{\mathbf{h}_0^{(2m)};m\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{\mathbf{h}_1^{(2m)};m\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中相互正交的两个偶数平移平方可和无穷维规范正交向量系, 而且, 它们共同构成 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的规范正交基.

多分辨率分析正交小波构造形式如下:

① 正交小波对应的带通滤波器 $\mathbb{G}(\omega)$ 为

$$\mathbb{G}(\omega)=\overline{\mathbb{H}}(\omega+\pi)\exp(-i\omega(1+2\kappa))$$

其中 $a=2^{-(j-\ell+1)}$ 是一个固定的整数.

② 构造多分辨率分析小波函数 $\psi(x)$, 其傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 表示如下:

$$\Psi(\omega)=\mathbb{G}(0.5\omega)\Phi(0.5\omega)=\overline{\mathbb{H}}(0.5\omega+\pi)\Phi(0.5\omega)e^{-i\omega(0.5+\kappa)}$$

③ 利用尺度函数 $\varphi(x)$ 构成的规范正交函数系 $\{\varphi_{1,k}(x)=\sqrt{2}\phi(2x-k);k\in\mathbb{Z}\}$, 小波函数 $\psi(x)$ 可以表示成正交函数级数:

$$\psi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n\varphi(2x-n)$$

其中

$$g_n=(-1)^{2\kappa+1-n}\overline{h}_{2\kappa+1-n},\ \ n\in\mathbb{Z}$$

或者小波函数 $\psi(x)$ 可以直接表示为

$$\psi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{2\kappa+1-n}\overline{h}_{2\kappa+1-n}\varphi(2x-n)$$

这样, 利用一个多分辨率分析可以分别从带通滤波器、小波函数的傅里叶变换

以及时间域形式构造获得多分辨率分析小波. 多分辨率分析的两个关键部分分别是尺度子空间序列, 即函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的伸缩包含依赖的稠密和唯一的闭子空间序列 $\{V_j; j\in\mathbb{Z}\}$, 以及尺度函数 $\varphi(x)$, 后续构造就遵循这样的模式实现.

7.2　多分辨率分析小波示例

这里将按照多分辨率分析理论框架说明 Haar 多分辨率分析小波、Shannon 多分辨率分析小波、Meyer 多分辨率分析小波和 Daubechies 多分辨率分析小波.

7.2.1　Haar 多分辨率分析小波

(α) Haar 函数和 Haar 小波规范正交基

在多分辨率分析小波中, 最早出现的是 1910 年的 Haar 函数或 Haar 小波. 这个函数非常简单, 直接定义如下:

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0\\ 1, & 0\leqslant x<0.5\\ -1, & 0.5\leqslant x<1\\ 0, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

另外, 按照如下方式定义这个函数的伸缩平移函数系: 当 $(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 时,

$$\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k)=\begin{cases}0, & -\infty<x<2^{-j}k\\ 2^{j/2}, & 2^{-j}k\leqslant x<2^{-j}(k+0.5)\\ -2^{j/2}, & 2^{-j}(k+0.5)\leqslant x<2^{-j}(k+1.0)\\ 0, & 2^{-j}(k+1.0)\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

那么, 这个伸缩平移函数系 $\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k);(j,k)\in\mathbb{Z}^2\}$ 构成平方可积函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基. 这就是 Haar 小波是一个多分辨率分析小波.

(β) Haar 多分辨率分析

定义函数 $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0\\ 1, & 0\leqslant x<1\\ 0, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

它是区间 $[0,1)$ 的特征函数, 另外, 如下定义该函数的伸缩平移: 当 $(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 时,

$$\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^j x-k)=\begin{cases}0, & -\infty<x<2^{-j}k\\ 2^{j/2}, & 2^{-j}k\leqslant x<2^{-j}(k+1)\\ 0, & 2^{-j}(k+1)\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

对于任意的整数 $j\in\mathbb{Z}$, 构造平方可积函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间:

$$V_j=\text{Closespan}\{\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^j x-k);k\in\mathbb{Z}\}$$

容易验证, $(\{V_j;j\in\mathbb{Z}\};\ \varphi(x))$ 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的一个正交多分辨率分析, $\varphi(x)$ 是尺度函数, 这就是 Haar 多分辨率分析.

在函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中, 函数系 $\{\varphi(x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 是规范正交系, 即

$$\left\langle\varphi(x-k),\varphi(x-n)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x-k)\overline{\varphi}(x-n)dx=\delta(k-n)$$

其中 $(k,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. 所以, $\{\varphi(x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_0 的规范正交基.

另外, 按照闭子空间列 $\{V_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 的定义, 显然它们具有伸缩依赖关系:

$$f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1},\quad j\in\mathbb{Z}$$

容易验证, 闭子空间 V_j 具有如下的具体表达形式:

$$V_j=\left\{h(x);h(x)=h_k,2^{-j}k\leqslant x<2^{-j}(k+1),k\in\mathbb{Z},\sum_{k\in\mathbb{Z}}|h_k|^2<+\infty\right\}$$

即 V_j 由能量有限的台阶函数组成, 这些台阶函数的跳跃点至多出现在 $2^{-j}k$ 这样的点上, 其中 k 是任意整数. 利用这个表示方法, 直接推出 $V_j\subseteq V_{j+1},j\in\mathbb{Z}$, 这表明, 子空间 V_j 中函数的全部可能的台阶跳跃点都是 V_{j+1} 中函数的台阶跳跃点, 即这个函数子空间序列是嵌套的.

关于稠密性即 $\overline{\left[\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j\right]}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, 利用平方可积函数的台阶函数逼近方法可以完成证明. 具体地说, 对于任意的函数 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, 如果整数 $j\in\mathbb{Z}$, 构造函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的函数 $f_j(x)$, 对于任意的整数 $k\in\mathbb{Z}$, 当 $2^{-j}k\leqslant x<2^{-j}(k+1)$ 时, 定义 $f_j(x)=f_{j,k}=\xi_{j,k}+i\zeta_{j,k}$, 其中 $(\xi_{j,k},\zeta_{j,k})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 满足

$$\int_{\Omega_{j,k}}|f(x)-f_{j,k}|^2dx=\int_{\Omega_{j,k}}|f(x)-(\xi+i\zeta)|^2dx\to\min$$

其中 $\Omega_{j,k}=\{x;2^{-j}k\leqslant x<2^{-j}(k+1)\}$. 简单计算可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{j,k}} |f(x)-f_{j,k}|^2\, dx &= \int_{\Omega_{j,k}} [f(x)-(\xi_{j,k}+i\zeta_{j,k})][f(x)-(\xi_{j,k}+i\zeta_{j,k})]^* dx \\ &= 2^{-j}(\xi_{j,k}^2+\zeta_{j,k}^2)+\int_{\Omega_{j,k}} |f(x)|^2\, dx \\ &\quad -2\xi_{j,k}\int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Re}\, f(x)]dx - 2\zeta_{j,k}\int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Im}\, f(x)]dx\end{aligned}$$

利用微分方法得到最小值解：

$$\xi_{j,k}=2^j\int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Re}\, f(x)]dx,\quad \zeta_{j,k}=2^j\int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Im}\, f(x)]dx$$

即 $\xi_{j,k}$ 和 $\zeta_{j,k}$ 分别是函数 $f(x)$ 的实部 $\mathrm{Re}\, f(x)$ 和虚部 $\mathrm{Im}\, f(x)$ 在区间 $\Omega_{j,k}$ 上的积分平均值. 这样，得到最小值表达式：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{j,k}} |f(x)-f_{j,k}|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Re}\, f(x)-\xi_{j,k}]^2 dx + \int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Im}\, f(x)-\zeta_{j,k}]^2 dx \\ &= \int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Re}\, f(x)]^2 dx - 2^{-j}\xi_{j,k}^2 + \int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Im}\, f(x)]^2 dx - 2^{-j}\zeta_{j,k}^2 \\ &= \int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Re}\, f(x)]^2 dx - \int_{\Omega_{j,k}} \xi_{j,k}^2 dx + \int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Im}\, f(x)]^2 dx - \int_{\Omega_{j,k}} \zeta_{j,k}^2 dx\end{aligned}$$

显然，这样构造得到的函数 $f_j(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，而且，$f_j(x)\in V_j$，最重要的是函数序列 $\{f_j(x); j\in\mathbb{Z}\}$ 在函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中收敛到函数 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$：

$$\| f(x)-f_j(x)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)-f_j(x)|^2\, dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_{j,k}} |f(x)-f_{j,k}|^2\, dx \to 0$$

实际上，直接计算得到如下演算：

$$\begin{aligned}&\|f(x)-f_j(x)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)-f_j(x)|^2\, dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Re}\, f(x)-\xi_{j,k}]^2 dx + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Im}\, f(x)-\zeta_{j,k}]^2 dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Re}\, f(x)]^2 dx - \int_{\Omega_{j,k}} \xi_{j,k}^2 dx\right] \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{\Omega_{j,k}} [\mathrm{Im}\, f(x)]^2 dx - \int_{\Omega_{j,k}} \zeta_{j,k}^2 dx\right]\end{aligned}$$

利用这个计算表达式以及 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 和 $f_j(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，首先将上述范数计算中的积分限定在有限范围内，之后再考虑在这个有限范围的非负积分，它将随着 $j\in\mathbb{Z}$ 的增大而趋向于零，综合得到当 $j\to+\infty$ 时，$\| f(x)-f_j(x)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}\to 0$. 于是得到当 $j\to+\infty$ 时，在函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中 $f_j(x)\to f(x)$. 这就是稠密性.

最后讨论唯一性，即 $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j=\{0\}$. 一个直观的解释是，如果 $f(x)\in\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j$，那么，因为对于每一个整数 $j\in\mathbb{Z}$，$f(x)\in V_j$，所以，$f(x)$ 是一个只在原点有一个跳跃台阶的台阶函数，又因为 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 是平方可积的，所以，这个只有一个跳跃台阶的平方可积台阶函数的台阶跳跃高度必然是零，而且，这个函数必然是恒零函数，即 $f(x)=0$. 这就是唯一性即 $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j=\{0\}$.

综合上述讨论得到如下的定理.

定理 7.1 (Haar 多分辨率分析)　按照前述论述中定义的函数 $\varphi(x)$ 和函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的闭子空间序列 $\{V_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 的组合 $(\{V_j;j\in\mathbb{Z}\},\varphi(x))$ 构成 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的一个多分辨率分析，即子空间列 $\{V_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 与函数 $\varphi(x)$ 满足如下五个要求，即：

❶ 单调性：$V_J\subseteq V_{J+1}, J\in\mathbb{Z}$;

❷ 稠密性：$\overline{\left[\bigcup_{J\in\mathbb{Z}} V_J\right]}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$；

❸ 唯一性：$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j=\{0\}$;

❹ 伸缩性：$f(x)\in V_J\Leftrightarrow f(2x)\in V_{J+1}, J\in\mathbb{Z}$;

❺ 构造性：$\{\varphi(x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 构成 V_0 的规范正交基，

其中 $\varphi(x)=\chi_{[0,1)}(x)$ 是区间 $[0,1)$ 的特征函数，称为 Haar 尺度函数，多分辨率分析 $(\{V_j;j\in\mathbb{Z}\},\varphi(x))$ 称为 Haar 多分辨率分析.

(γ) Haar 尺度方程和小波方程

利用多分辨率分析理论，在 Haar 多分辨率分析理论中，如下尺度方程和小波方程：

$$\begin{cases}\varphi(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} h_n\varphi(2x-n)\\ \psi(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} g_n\varphi(2x-n)\end{cases}$$

被具体化为

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x-1)\right]$$

其中低通滤波器系数列或低通滤波器脉冲响应系列是

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_n = 0, \quad n \neq 0,1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

而且

$$\psi(x) = \sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x-1)\right]$$

其中带通滤波器系数列或带通滤波器脉冲响应系列是

$$g_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g_n = 0, \quad n \neq 0,1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

这样得到的 $\psi(x)$ 是一个正交小波，与前面的 Haar 函数符号相反.

(δ) Haar 多分辨率分析滤波器组

Haar 多分辨率分析滤波器组十分简单，按照定义，

$$\mathbb{H}(\omega) = 2^{-0.5}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-i\omega n}, \quad \mathbb{G}(\omega) = 2^{-0.5}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n e^{-i\omega n}$$

低通滤波器 $\mathbb{H}(\omega)$ 具体表述为

$$\mathbb{H}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-i\omega n} = \frac{1}{2}(1+e^{-i\omega})$$

带通滤波器 $\mathbb{G}(\omega)$ 可以具体表示为：对于 $\kappa = 0$，

$$\mathbb{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n e^{-i\omega n} = \bar{\mathbb{H}}(\omega+\pi)\exp(-i\omega(1+2\kappa)) = \frac{1}{2}(-1+e^{-i\omega})$$

而且

$$\mathbf{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbb{H}(\omega) & \mathbb{H}(\omega+\pi) \\ \mathbb{G}(\omega) & \mathbb{G}(\omega+\pi) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{-i\omega} & 1-e^{-i\omega} \\ -1+e^{-i\omega} & -1-e^{-i\omega} \end{pmatrix}$$

是酉矩阵，即满足如下恒等式：

$$\mathbf{M}(\omega)\mathbf{M}^*(\omega) = \mathbf{M}^*(\omega)\mathbf{M}(\omega) = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

或者等价地，当 $\omega \in [0,2\pi]$ 时，

$$\begin{cases} \left|\mathbb{H}(\omega)\right|^2 + \left|\mathbb{H}(\omega+\pi)\right|^2 = 1 \\ \left|\mathbb{G}(\omega)\right|^2 + \left|\mathbb{G}(\omega+\pi)\right|^2 = 1 \\ \mathbb{H}(\omega)\bar{\mathbb{G}}(\omega) + \mathbb{H}(\omega+\pi)\bar{\mathbb{G}}(\omega+\pi) = 0 \end{cases}$$

(ε) Haar 多分辨率分析滤波器组脉冲响应

根据带通滤波器 $\mathbb{G}(\omega)$ 与低通滤波器 $\mathbb{H}(\omega)$ 组：

$$\mathbb{H}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_n e^{-i\omega n}=\frac{1}{2}(1+e^{-i\omega})$$

$$\mathbb{G}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n e^{-i\omega n}=\frac{1}{2}(-1+e^{-i\omega})$$

之间的关系：

$$\mathbb{G}(\omega)=\bar{\mathbb{H}}(\omega+\pi)\exp(-i\omega(1+2\kappa)),\quad \kappa=0$$

可以写出滤波器组脉冲响应序列之间的关系：

$$g_n=(-1)^{1-n}\bar{h}_{1-n},\quad n\in\mathbb{Z}$$

而且小波方程可以写成

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n\varphi(2x-n)\\&=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{2\kappa+1-n}\bar{h}_{2\kappa+1-n}\varphi(2x-n)\\&=\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x-1)\right],\quad \kappa=0\end{aligned}$$

小波函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 可以表示为：对于 $\kappa=0$，

$$\Psi(\omega)=\mathbb{G}(0.5\omega)\Phi(0.5\omega)=\bar{\mathbb{H}}(0.5\omega+\pi)\Phi(0.5\omega)e^{-i\omega(0.5+\kappa)}$$

这就是 Haar 多分辨率分析小波的详细构造过程.

7.2.2 Shannon 多分辨率分析小波

这里利用 Shannon 采样定理详细讨论 Shannon 多分辨率分析的构造以及 Shannon 正交小波的构造.

(α) Shannon 多分辨率分析

考虑函数 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，如果存在 $B>0$，使其傅里叶变换 $(\mathscr{F}f)(\omega)$ 满足如下条件：

$$(\mathscr{F}f)(\omega)=(2\pi)^{-0.5}\int_{x\in\mathbb{R}}f(x)e^{-i\omega x}dx=0,\quad |\omega|\geqslant \mathrm{B}$$

则称 $f(x)$ 是 B 频率截断的. 当 $0<\Delta\leqslant\pi/B$ 时，可以利用采样序列 $\{f(n\Delta);n\in\mathbb{Z}\}$ 按照如下公式重建函数 $f(x)$：

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n\Delta)\frac{\sin[(\pi/\Delta)(x-n\Delta)]}{[(\pi/\Delta)(x-n\Delta)]}$$

这个公式称为 Shannon 插值公式. 这就是形式最简单的 Shannon 采样定理.

特别地，在 Shannon 采样定理中，当 $B=\pi$ 时，可得

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\frac{\sin(x-n)\pi}{(x-n)\pi}$$

定义函数 $\varphi(x)=\sin(x\pi)/(x\pi)$，那么，上式可改写为

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\varphi(x-n)$$

这说明，任何 π 频率截断函数 $f(x)$ 都可以被整数平移函数系 $\{\varphi(x-n),n\in\mathbb{Z}\}$ 按照上述公式表示.

利用傅里叶变换的 Parseval 恒等式(即能量守恒定理)，可以直接验证整数平移函数系 $\{\varphi(x-n),n\in\mathbb{Z}\}$ 是函数线性空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交函数系，即对于任意的两个整数 $(n,\ell)\in\mathbb{Z}^2$，

$$\begin{aligned}\left\langle\varphi(\cdot-n)\ ,\ \varphi(\cdot-\ell)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}&=\int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x-n)\overline{\varphi}(x-\ell)\mathrm{d}x\\&=\int_{\omega\in\mathbb{R}}\left|\Phi(\omega)\right|^2 e^{-i\omega(n-\ell)}\mathrm{d}\omega=\delta(n-\ell)\end{aligned}$$

其中利用了函数 $\varphi(x)=\sin(x\pi)/(x\pi)$ 的傅里叶变换 $\Phi(\omega)$ 的如下计算结果：

$$\Phi(\omega)=(2\pi)^{-0.5}\int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x)e^{-i\omega x}dx=\begin{cases}(2\pi)^{-0.5}, & |\,\omega\,|\leqslant\pi\\0, & |\,\omega\,|>\pi\end{cases}$$

按照如下方式定义函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间：

$$V_0=\{f(x);(\mathscr{F}f)(\omega)=0,\left|\omega\right|>\pi\}$$

即函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中全部 π 频率截断函数 $f(x)$ 构成的集合. 可以验证 V_0 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的闭线性子空间，而且，整数平移函数系 $\{\varphi(x-n),n\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_0 的规范正交基.

实际上，函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中任何两个 π 频率截断函数的线性组合仍然是 π 频率截断函数，由此说明 V_0 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的线性子空间. 此外，π 频率截断函数序列的极限(如果存在的话)也必是 π 频率截断函数，这说明 V_0 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭子空间. 此外，因为整数平移函数系 $\{\varphi(x-n),n\in\mathbb{Z}\}$ 是函数线性空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交函数系，所以，它也是 V_0 的规范正交系，这样，要证明 $\{\varphi(x-n),n\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_0 的规范正交基，只需要证明 V_0 中任何函数 $v(x)$ 都可以写成 $\{\varphi(x-n),n\in\mathbb{Z}\}$ 的线性组合：

$$v(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\varphi(x-n)$$

而且其组合系数序列 $\{v_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 满足 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|v_n\right|^2 < +\infty$，这正好从 Shannon 采样定理得到支持.

对于任意的整数 $j \in \mathbb{Z}$，按照如下的频域方式定义函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间序列：

$$V_j = \{f(x);(\mathscr{F}f)(\omega) = 0, \left|\omega\right| > 2^j\pi\}$$

即函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中全部 $2^j\pi$ 频率截断函数构成的集合. 利用 Shannon 采样定理可以验证 V_j 是空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间，而且，$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$，即如果 $f(x)$ 是 $2^j\pi$ 频率截断函数，那么，$f(2x)$ 就是 $2^{j+1}\pi$ 频率截断函数；反之亦然. 这说明前述定义的闭线性子空间序列 $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是伸缩依赖的.

另外，对于任意的 $f(x) \in V_j$，$f(x)$ 是 $2^j\pi$ 频率截断函数，那么，显然它也是 $2^{j+1}\pi$ 频率截断的函数，即 $f(x) \in V_{j+1}$，由此说明，函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间序列 $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是嵌套递增子空间序列，即 $V_j \subseteq V_{j+1}$，$j \in \mathbb{Z}$.

可以证明函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间序列 $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 的公共部分是只包含零函数的平凡子空间 $\{0\}$，即 $\cap\{V_j, j \in \mathbb{Z}\} = \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$. 事实上，利用 V_j 的定义可知，如果 $v(x) \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j$，那么，因为对于任意的整数 $j \in \mathbb{Z}$，$v(x) \in V_j$，即 $v(x)$ 必然是任意频率截断的，所以，它的能量只能集中在零频率处或者它的傅里叶变换 $(\mathscr{F}v)(\omega)$ 只可能在 $\omega = 0$ 处不为 0，这就是说，$v(x)$ 只能是常数函数，但 $v(x) \in V_j \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，即 $\int_{x\in\mathbb{R}}\left|v(x)\right|^2 dx < +\infty$，因此，$v(x) = 0$. 这就证明了唯一性.

现在证明函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间序列 $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 在 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中是稠密的：$\overline{(\cup\{V_j, j \in \mathbb{Z}\})} = \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，即对于任意的函数 $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，存在函数序列 $\{f_j(x), j \in \mathbb{Z}\}$，满足 $f_j(x) \in V_j, j \in \mathbb{Z}$，$\lim_{j\to+\infty}\int_{x\in\mathbb{R}}\left|f_j(x) - f(x)\right|^2 dx = 0$ 或者 $\lim_{j\to+\infty} f_j(x) = f(x)$.

按照构造性方法证明这个结果. 对于任意的函数 $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，定义函数序列 $\{f_j(x), j \in \mathbb{Z}\}$，其傅里叶变换 $(\mathscr{F}f_j)(\omega)$ 如下构造：对于任意整数 $j \in \mathbb{Z}$，

$$(\mathscr{F}f_j)(\omega) = \begin{cases}(\mathscr{F}f)(\omega), & |\,\omega\,| \leqslant 2^j\pi \\ 0, & |\,\omega\,| > 2^j\pi\end{cases}$$

这样，显然 $f_j(x)\in V_j, j\in\mathbb{Z}$，同时，利用傅里叶变换的 Parseval 恒等式(即能量守恒定理)可得

$$\begin{aligned}\lim_{j\to+\infty}\int_{x\in\mathbb{R}}\left|f_j(x)-f(x)\right|^2dx &= \lim_{j\to+\infty}\int_{\omega\in\mathbb{R}}\left|(\mathscr{F}f_j)(\omega)-(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2d\omega\\ &=\lim_{j\to+\infty}\int_{|\omega|\leqslant 2^j\pi}\left|(\mathscr{F}f_j)(\omega)-(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2d\omega\\ &\quad+\lim_{j\to+\infty}\int_{|\omega|>2^j\pi}\left|(\mathscr{F}f_j)(\omega)-(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2d\omega\\ &=\lim_{j\to+\infty}\int_{|\omega|>2^j\pi}\left|(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2d\omega=0\end{aligned}$$

其中因为 $\int_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x)\right|^2dx<+\infty$，从而，$\int_{\omega\in\mathbb{R}}\left|(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2d\omega=\int_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x)\right|^2dx<+\infty$，于是必有 $\lim_{j\to+\infty}\int_{|\omega|>2^j\pi}\left|(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2d\omega=0$.

综合上述讨论得到如下的定理.

定理 7.2 (Shannon 多分辨率分析)　按照前述论述中定义的函数 $\varphi(x)$ 和函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的闭子空间序列 $\{V_j; j\in\mathbb{Z}\}$ 的组合 $(\{V_j; j\in\mathbb{Z}\},\varphi(x))$ 构成 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的一个多分辨率分析，即子空间列 $\{V_j; j\in\mathbb{Z}\}$ 与函数 $\varphi(x)$ 满足如下五个要求，即：

❶ 单调性：$V_J\subseteq V_{J+1}, J\in\mathbb{Z}$；

❷ 稠密性：$\overline{\bigcup_{J\in\mathbb{Z}}V_J}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$；

❸ 唯一性：$\bigcap_{J\in\mathbb{Z}}V_J=\{0\}$；

❹ 伸缩性：$f(x)\in V_J\Leftrightarrow f(2x)\in V_{J+1}, J\in\mathbb{Z}$；

❺ 构造性：$\{\varphi(x-k); k\in\mathbb{Z}\}$ 构成 V_0 的规范正交基，

其中尺度函数 $\varphi(x)=\sin(x\pi)/(x\pi)$ 是 sinc 函数，也称为 Shannon 尺度函数. 函数子空间 V_j 称为 Shannon 尺度子空间. 这个多分辨率分析 $(\{V_j, j\in\mathbb{Z}\},\varphi(x))$ 称为函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的 Shannon 多分辨率分析.

(β) Shannon 小波子空间

引入函数记号：

$$\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^jx-k),\quad (j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

容易证明 $\{\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^jx-k), k\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_j 的规范正交基. 这可以利用公理❹和

❺进行形式证明，现在通过直接计算进行证明，详细演算如下：

$$\begin{aligned}\left\langle \varphi_{j,n}(x),\varphi_{j,\ell}(x)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} &= \left\langle 2^{j/2}\varphi(2^j\cdot -n),2^{j/2}\varphi(2^j\cdot -\ell)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} \\ &= 2^j\int_{x\in\mathbb{R}}\frac{\sin\pi(2^jx-n)}{\pi(2^jx-n)}\frac{\sin\pi(2^jx-\ell)}{\pi(2^jx-\ell)}dx \\ &= \int_{x\in\mathbb{R}}\frac{\sin\pi(x-n)}{\pi(x-n)}\frac{\sin\pi(x-\ell)}{\pi(x-\ell)}dx \\ &= \left\langle\varphi(\cdot-n),\varphi(\cdot-\ell)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} \\ &= \int_{\omega\in\mathbb{R}}\left|\Phi(\omega)\right|^2 e^{-i\omega(n-\ell)}d\omega \\ &= \delta(n-\ell)\end{aligned}$$

除此之外，对于任意 $f(x)\in V_j$，$f(x)$ 是 $2^j\pi$ 频率截断函数，那么，由 Shannon 采样定理可得：对于 $\Delta=2^{-j}$，

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}f(2^{-j}n)\frac{\sin\pi(2^jx-n)}{\pi(2^jx-n)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}2^{-j/2}f(2^{-j}n)\frac{2^{j/2}\sin\pi(2^jx-n)}{\pi(2^jx-n)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[2^{-j/2}f(2^{-j}n)\right]\varphi_{j,n}(x)\end{aligned}$$

因为 $\left\langle \varphi_{j,n}(x),\varphi_{j,\ell}(x)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\delta(n-\ell),(n,\ell)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，所以可得如下结果：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|2^{-j/2}f(2^{-j}n)\right|^2=\int_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x)\right|^2dx<+\infty$$

这也说明 $\{\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^jx-k),k\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_j 的规范正交基.

因为当 $k\in\mathbb{Z}$ 时，函数 $\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^jx-k)$ 的傅里叶变换是

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\varphi_{j,k})(\omega) &= (2\pi)^{-0.5}\int_{x\in\mathbb{R}}\varphi_{j,k}(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= (2\pi)^{-0.5}\int_{x\in\mathbb{R}}2^{j/2}\varphi(2^jx-k)e^{-i\omega x}dx \\ &= (2\pi)^{-0.5}\int_{x\in\mathbb{R}}2^{j/2}\varphi(2^jx-k)e^{-i\omega x}dx \\ &= 2^{-j/2}\Phi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}\end{aligned}$$

利用 Shannon 尺度函数 $\varphi(x)=\sin(x\pi)/(x\pi)$ 的傅里叶变换结果：

$$\Phi(\omega)=\begin{cases}(2\pi)^{-0.5}, & |\omega|\leqslant\pi \\ 0, & |\omega|>\pi\end{cases}$$

可知，V_j 的规范正交基 $\{\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^j x-k),k\in\mathbb{Z}\}$ 在频域表现为：对于 $k\in\mathbb{Z}$，

$$(\mathscr{F}\varphi_{j,k})(\omega)=2^{-j/2}\Phi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}=\begin{cases}2^{-j/2}(2\pi)^{-0.5}e^{-i(2^{-j}\omega)k}, & |\omega|\leqslant 2^j\pi\\ 0, & |\omega|>2^j\pi\end{cases}$$

这就是频带 $[-2^j\pi,+2^j\pi]$ 上的以 $\{2^{-j/2}(2\pi)^{-0.5}e^{-i(2^{-j}\omega)k};k\in\mathbb{Z}\}$ 为规范正交基的傅里叶级数分析. 这时，对于任意 $f(x)\in V_j$，Shannon 插值公式的频域形式为

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}f)(\omega)&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}[2^{-j/2}f(2^{-j}k)](\mathscr{F}\varphi_{j,k})(\omega)\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}[2^{-j/2}f(2^{-j}k)]2^{-j/2}\Phi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}\\&=\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{-j}f(2^{-j}k)e^{-i(2^{-j}\omega)k}\right]\Phi(2^{-j}\omega)\\&=\mathfrak{f}(2^{-j}\omega)\Phi(2^{-j}\omega)\end{aligned}$$

其中

$$\mathfrak{f}(\omega)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{-j}f(2^{-j}k)e^{-i\omega k}$$

是 2π 周期的平方可积函数. 因此，$(\mathscr{F}f)(\omega)\in\mathcal{L}^2[-2^j\pi,+2^j\pi]$.

这些分析说明，在频域中，子空间 V_j 体现为以 $\{2^{-j/2}(2\pi)^{-0.5}e^{-i(2^{-j}\omega)k};k\in\mathbb{Z}\}$ 为规范正交基的频带 $[-2^j\pi,+2^j\pi]$ 的傅里叶级数分析，而且，函数子空间 V_{j+1} 体现为以 $\{2^{-(j+1)/2}(2\pi)^{-0.5}e^{-i(2^{-(j+1)}\omega)k};k\in\mathbb{Z}\}$ 为规范正交基的频带 $\{-2^{j+1}\pi,+2^{j+1}\pi\}$ 的傅里叶级数分析.

利用这些研究结果，可以十分自然地按照如下频域方式定义 Shannon 小波子空间序列 $\{W_j;j\in\mathbb{Z}\}$.

定义空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间列 $\{W_j;j\in\mathbb{Z}\}$：对 $\forall j\in\mathbb{Z}$，

$$W_j=\{g(x);(\mathscr{F}g)(\omega)=0,\ |\omega|\leqslant 2^j\pi \text{ 或 } |\omega|\geqslant 2^{j+1}\pi\}$$

容易验证，对 $\forall j\in\mathbb{Z}$，W_j 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间，即 $\forall j\in\mathbb{Z}$，函数空间 W_j 中任何两个函数的线性组合仍然是函数空间 W_j 中的函数，由此说明 W_j 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的线性子空间. 此外，函数空间 W_j 中函数序列的极限(如果存在的话)也必是函数空间 W_j 中的函数，这说明 W_j 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭子空间.

另外，由定义直接得到对 $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$，为 $j \neq k$ 时，$W_j \perp W_k$，最重要的结果是，空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间序列 $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 和闭线性子空间列 $\{W_j; j \in \mathbb{Z}\}$ 满足如下关系：对 $\forall j \in \mathbb{Z}$，

$$W_j \perp V_k, \quad V_{j+1} = W_j \oplus V_j$$

其中，V_j 就是(第 j 级)Shannon 尺度子空间，W_j 就是(第 j 级)Shannon 小波子空间.

实际上，对 $\forall j \in \mathbb{Z}$，以及任意 $w(x) \in W_j, v(x) \in V_j$，根据子空间 W_j, V_j 的定义直接计算：

$$\begin{aligned}\left\langle w(x), v(x)\right\rangle &= \int_{x\in\mathbb{R}} w(x)\overline{v}(x)dx \\ &= \int_{\omega\in\mathbb{R}} \left[(\mathscr{F}w)(\omega)\right]\left[(\mathscr{F}v)(\omega)\right]^* d\omega \\ &= \int_{-2^j\pi}^{+2^j\pi} \left[(\mathscr{F}w)(\omega)\right]\left[(\mathscr{F}v)(\omega)\right]^* d\omega \\ &= 0\end{aligned}$$

这说明 $W_j \perp V_j$. 为了证明 $V_{j+1} = W_j \oplus V_j$，只需要证明，对于任意的 $p(x) \in V_{j+1}$ 和 $v(\omega)$，能够找到 $w(x) \in W_j, v(x) \in V_j$，保证 $w(x) \perp v(x)$，$p(\omega) = w(\omega)+v(\omega)$. 根据 V_{j+1}, W_j, V_j 的定义可知，$w(\omega)$ 和 $v(\omega)$ 可以按照其傅里叶变换构造如下：

$$(\mathscr{F}w)(\omega) = \begin{cases}(\mathscr{F}p)(\omega), & 2^j\pi \leqslant |\omega| \leqslant 2^{j+1}\pi \\ 0, & 0 \leqslant |\omega| \leqslant 2^j\pi \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

而且

$$(\mathscr{F}v)(\omega) = \begin{cases}0, & 2^j\pi \leqslant |\omega| \leqslant 2^{j+1}\pi \\ (\mathscr{F}p)(\omega), & 0 \leqslant |\omega| \leqslant 2^j\pi \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

满足 $(\mathscr{F}p)(\omega) = (\mathscr{F}w)(\omega) + (\mathscr{F}v)(\omega)$，从而由傅里叶逆变换得 $p(\omega) = w(\omega) + v(\omega)$. 另外，由 $w(\omega)$ 和 $v(\omega)$ 的构造方法可知

$$\left\langle w(x), v(x)\right\rangle = \left\langle (\mathscr{F}w)(\omega), (\mathscr{F}v)(\omega)\right\rangle = \int_{\omega\in\mathbb{R}} \left[(\mathscr{F}w)(\omega)\right]\left[(\mathscr{F}v)(\omega)\right]^* d\omega = 0$$

其中 $[(\mathscr{F}v)(\omega)]^*$ 表示 $(\mathscr{F}v)(\omega)$ 的复数共轭转置，而且 $[(\mathscr{F}w)(\omega)][(\mathscr{F}v)(\omega)]^* = 0$. 因

此，$w(x) \perp v(x)$.

(γ) Shannon 小波

在 Shannon 多分辨率分析中, Shannon 尺度函数 $\varphi(x)=\sin(x\pi)\big/(x\pi)$ 的整数平移函数系 $\{\varphi(x-n), n\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间 V_0 的规范正交基. 函数系 $\{\varphi(x-n), n\in\mathbb{Z}\}$ 的傅里叶变换函数系是 $\{\Phi(\omega)e^{-i\omega n}; n\in\mathbb{Z}\}$，它本质上是在频域上提供了函数空间 $\mathcal{L}^2(-\pi,+\pi)$ (即在闭区间 $[-\pi,+\pi]$ 上的能量有限或平方可积函数空间)的规范正交傅里叶级数基 $\{(2\pi)^{-0.5}e^{-i\omega n}; n\in\mathbb{Z}\}$，即在带宽是 2π 的频带 $[-\pi,+\pi]$ 上的傅里叶分析或频谱分析.

类似地，函数系 $\{\sqrt{2}\varphi(2x-n), n\in\mathbb{Z}\}$ 是闭线性子空间 V_1 的规范正交基. 它的傅里叶变换函数系是 $\{2^{-0.5}\Phi(0.5\omega)e^{-i(0.5\omega)n}; n\in\mathbb{Z}\}$，它本质上是在频域上提供了函数空间 $\mathcal{L}^2(-2\pi,+2\pi)$ 的规范正交傅里叶级数基 $\{(4\pi)^{-0.5}e^{-i(0.5\omega)n}; n\in\mathbb{Z}\}$，即在带宽是 4π 的频带上的傅里叶分析或频谱分析.

根据线性子空间 W_0 的定义可知，W_0 本质上是在频域支撑在带宽为 2π 的频带

$$\{\omega;\pi\leqslant|\omega|\leqslant 2\pi\}=[\omega;-2\pi\leqslant\omega\leqslant-\pi]\cup[\omega;\pi\leqslant\omega\leqslant 2\pi]$$

上的能量有限或平方可积函数构成的函数空间：

$$\mathcal{L}^2(\omega;\pi\leqslant|\omega|\leqslant 2\pi)=\mathcal{L}^2([-2\pi,-\pi]\cup[\pi,2\pi])$$

如果由某个函数 $\psi(x)$ 产生的整数平移函数系 $\{\psi(x-n), n\in\mathbb{Z}\}$ 是闭线性子空间 W_0 的规范正交基，利用傅里叶变换的性质，函数系 $\{\psi(x-n), n\in\mathbb{Z}\}$ 的傅里叶变换函数系 $\{\Psi(\omega)e^{-i\omega n}; n\in\mathbb{Z}\}$ 将构成子空间 $\mathcal{L}^2(\omega;\pi\leqslant|\omega|\leqslant 2\pi)$ 的规范正交基. 显然，满足这些要求的最简单的函数 $\psi(x)$，其傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 应该能够把线性空间 $\mathcal{L}^2(-2\pi,+2\pi)$ 限制成其子空间 $\mathcal{L}^2([-2\pi,-\pi]\cup[\pi,2\pi])$，即把在闭区间 $[-2\pi,+2\pi]$ 上的能量有限或平方可积的函数限制变成闭区间 $[-2\pi,-\pi]\cup[\pi,2\pi]$ 上的能量有限或平方可积的函数，简洁地说，把函数的定义域 $[-2\pi,+2\pi]$ 的中心对称子区间 $[-\pi,+\pi]$ 抠除，使函数的有效定义域变成 $[-2\pi,-\pi]\cup[\pi,2\pi]$.

因为 Shannon 尺度函数 $\varphi(x)$ 的频域形式或其傅里叶变换 $\Phi(\omega)$ 是矩形函数，所以，在频域中，满足这些要求的最简单的函数 $\psi(x)$，应该是频域中如下的“矩形”函数：

$$\Psi(\omega)=\Phi(0.5\omega)-\Phi(\omega)=\begin{cases}0, & 0\leqslant|\omega|<\pi\\ (2\pi)^{-0.5}, & \pi\leqslant|\omega|<2\pi\\ 0, & 2\pi\leqslant|\omega|<+\infty\end{cases}$$

可以直接计算来证明整数平移函数系 $\{\psi(x-n),n\in\mathbb{Z}\}$ 是闭线性子空间 W_0 的规范正交基，而且，对于 $j\in\mathbb{Z}$，$\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 构成子空间 W_j 的规范正交基，最终函数系 $\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k);(j,k)\in\mathbb{Z}^2\}$ 构成 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基，因此，$\psi(x)$ 是正交小波函数. 这样的小波 $\psi(x)$ 称为 Shannon 小波，其时间形式可表示为

$$\psi(x)=2\varphi(2x)-\varphi(x)=\frac{\sin(2x\pi)-\sin(x\pi)}{x\pi}$$

这时，函数系 $\{\Psi(\omega)e^{-i\omega n};n\in\mathbb{Z}\}$ 提供了函数空间 $\mathcal{L}^2([-2\pi,-\pi]\cup[\pi,2\pi])$ (即在闭区间 $[-2\pi,-\pi]\cup[\pi,2\pi]$ 上的能量有限或平方可积函数空间)的规范正交傅里叶级数基，即在带宽是 2π 的频带 $[-2\pi,-\pi]\cup[\pi,2\pi]$ 上的傅里叶频谱分析.

(δ) 多分辨率分析 Shannon 小波

在函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的 Shannon 多分辨率分析中，$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_n\varphi(2x-n)$ 的频域形式可以表述为

$$\Phi(\omega)=\mathrm{H}(0.5\omega)\Phi(0.5\omega)$$

因 Shannon 尺度函数 $\varphi(x)=\sin(x\pi)/(x\pi)$ 的频域形式或其傅里叶变换 $\Phi(\omega)$ 是矩形函数，将尺度方程的频域形式改写如下：

$$\Phi(2\omega)=\mathrm{H}(\omega)\Phi(\omega),\quad \omega\in[-\pi,+\pi]$$

可以直接得到低通滤波器 $\mathrm{H}(\omega)$ 的表达形式：当 $\omega\in[-\pi,+\pi]$ 时，

$$\mathrm{H}(\omega)=2^{-0.5}\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_n e^{-i\omega n}=\frac{\Phi(2\omega)}{\Phi(\omega)}=\begin{cases}1, & 0\leqslant|\omega|<0.5\pi\\ 0, & 0.5\pi\leqslant|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

并可以直接验证低通滤波器 $\mathrm{H}(\omega)$ 满足如下规范化条件：

$$|\mathrm{H}(\omega)|^2+|\mathrm{H}(\omega+\pi)|^2=1,\quad \omega\in[0,2\pi]$$

另外，定义 2×2 矩阵

$$\mathbf{M}(\omega)=\begin{pmatrix}\mathrm{H}(\omega) & \mathrm{H}(\omega+\pi)\\ \mathrm{G}(\omega) & \mathrm{G}(\omega+\pi)\end{pmatrix}$$

其中 $\mathrm{G}(\omega)=e^{-i\omega\alpha}\overline{\mathrm{H}}(\omega+\pi)$，$\alpha$ 是任意实数，那么容易验证矩阵 $\mathbf{M}(\omega)$ 是酉矩阵，即矩阵 $\mathbf{M}(\omega)$ 满足如下等式：

$$\mathbf{M}(\omega)\mathbf{M}^*(\omega)=\mathbf{M}^*(\omega)\mathbf{M}(\omega)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

其中矩阵 $\mathbf{M}^*(\omega)$ 表示矩阵 $\mathbf{M}(\omega)$ 的复数共轭转置：

$$\mathbf{M}^*(\omega)=\begin{pmatrix}\overline{\mathrm{H}}(\omega)&\overline{\mathrm{G}}(\omega)\\\overline{\mathrm{H}}\left(\omega+\pi\right)&\overline{\mathrm{G}}\left(\omega+\pi\right)\end{pmatrix}$$

而且，$\overline{\mathrm{H}}(\omega),\overline{\mathrm{G}}(\omega)$ 分别表示 $\mathrm{H}(\omega),\mathrm{G}(\omega)$ 的复数共轭.

根据多分辨率分析理论，如果函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 具有如下形式：

$$\Psi(\omega)=\mathrm{G}(0.5\omega)\Phi(0.5\omega)=e^{-0.5\alpha\omega i}\overline{\mathrm{H}}(0.5\omega+\pi)\Phi(0.5\omega)$$

那么，$\psi(x)$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的正交小波函数，α 是任意实数. 这样构造得到的正交小波都称为多分辨率分析 Shannon 小波.

在这种频域构造形式下，小波 $\psi(x)$ 的时间域表示方法是

$$\begin{aligned}\psi(x)&=2\varphi(2(x-0.5\alpha))-\varphi(x-0.5\alpha)\\&=\frac{\sin 2\pi(x-0.5\alpha)-\sin\pi(x-0.5\alpha)}{\pi(x-0.5\alpha)}\end{aligned}$$

其中 α 是任意实数.

实际上，将函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 改写为

$$\Psi(2\omega)=e^{-\alpha\omega i}\overline{\mathrm{H}}(\omega+\pi)\Phi(\omega)=e^{-\alpha\omega i}[\Phi(\omega)-\Phi(2\omega)]$$

这样，可以得到如下结果：

$$\Psi(\omega)=e^{-0.5\alpha\omega i}[\Phi(0.5\omega)-\Phi(\omega)]=e^{-0.5\alpha\omega i}\Phi(0.5\omega)-e^{-0.5\alpha\omega i}\Phi(\omega)$$

直接演算函数 $2\varphi(2x-\alpha)=2\varphi(2(x-0.5\alpha))$ 的傅里叶变换：

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-0.5}\int_{x\in\mathbb{R}}[2\varphi(2x-\alpha)]e^{-i\omega x}dx\\&=(2\pi)^{-0.5}\int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(2x-\alpha)e^{-i\omega x}d(2x-\alpha)\quad(t=2x-\alpha,x=0.5(t+\alpha))\\&=(2\pi)^{-0.5}\int_{t\in\mathbb{R}}\varphi(t)e^{-0.5(t+\alpha)\omega i}dt\\&=e^{-0.5\alpha\omega i}(2\pi)^{-0.5}\int_{t\in\mathbb{R}}\varphi(t)e^{-0.5\omega ti}dt\\&=e^{-0.5\alpha\omega i}\Phi(0.5\omega)\end{aligned}$$

另外函数 $\varphi(x-0.5\alpha)$ 的傅里叶变换是

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^{-0.5}\int_{x\in\mathbb{R}}[\varphi(x-0.5\alpha)]e^{-i\omega x}dx\\
&=(2\pi)^{-0.5}\int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x-0.5\alpha)e^{-i\omega x}d(x-0.5\alpha)\quad(t=x-0.5\alpha,x=t+0.5\alpha)\\
&=(2\pi)^{-0.5}\int_{t\in\mathbb{R}}\varphi(t)e^{-(t+0.5\alpha)\omega i}dt\\
&=e^{-0.5\alpha\omega i}(2\pi)^{-0.5}\int_{t\in\mathbb{R}}\varphi(t)e^{-\omega ti}dt\\
&=e^{-0.5\alpha\omega i}\Phi(\omega)
\end{aligned}
$$

于是得到

$$
\begin{aligned}
\psi(x)&=2\varphi(2(x-0.5\alpha))-\varphi(x-0.5\alpha)\\
&=\frac{2\sin 2\pi(x-0.5\alpha)}{2\pi(x-0.5\alpha)}-\frac{\sin\pi(x-0.5\alpha)}{\pi(x-0.5\alpha)}\\
&=\frac{\sin 2\pi(x-0.5\alpha)-\sin\pi(x-0.5\alpha)}{\pi(x-0.5\alpha)}
\end{aligned}
$$

注释：在函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的 Shannon 多分辨率分析中，定义在闭区间 $[-\pi,+\pi]$ 内的低通滤波器 $\mathrm{H}(\omega)$ 是周期为 2π 的函数，在支撑 $[-0.5\pi,+0.5\pi]$ 上恒等于 1，所以 $\mathrm{H}(\omega)$ 是理想低通滤波器. 这个特殊性决定了由 Shannon 多分辨率分析可以构造出许多不同的 Shannon 小波. 实际上，构造过程中的任意实数 α 的不同取值将产生不同的正交小波，即 Shannon 小波. 如果定义记号：

$$
\psi^{(\alpha)}(x)=\frac{\sin 2\pi(x-0.5\alpha)-\sin\pi(x-0.5\alpha)}{\pi(x-0.5\alpha)}
$$

那么，规范正交函数系

$$
\{\psi_{j,k}^{(0)}(x)=2^{j/2}\psi^{(0)}(2^jx-k);(j,k)\in\mathbb{Z}^2\}
$$

和规范正交函数系

$$
\{\psi_{j,k}^{(1)}(x)=2^{j/2}\psi^{(1)}(2^jx-k);(j,k)\in\mathbb{Z}^2\}
$$

将是线性空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的两个完全不同的规范正交基. 其实，只要 $\alpha\neq 0$，多分辨率分析 Shannon 小波就为线性空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 提供完全不同的规范正交基.

(ε) Shannon 多分辨率分析脉冲响应

在函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的 Shannon 多分辨率分析中，根据 Shannon 插值公式可以将尺度方程 $\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_n\varphi(2x-n)$ 具体化为

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \varphi(2x-n) \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}\times(-1)^n}{(2n+1)\pi}\varphi(2x-(2n-1))\right]\end{aligned}$$

这样 Shannon 多分辨率分析低通滤波器脉冲响应序列 $\{h_n; n\in\mathbb{Z}\}$ 可以表示为

$$h_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin(0.5n\pi)}{(0.5n\pi)} = \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & n=0 \\ 0, & n=2k, k\neq 0, k\in\mathbb{Z} \\ \dfrac{\sqrt{2}\times(-1)^k}{(2k+1)\pi}, & n=2k+1, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

这时，低通滤波器 $\mathrm{H}(\omega)$ 可表示为：当 $\omega\in[-\pi,+\pi]$ 时，

$$\mathrm{H}(\omega) = 2^{-0.5}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-i\omega n} = \begin{cases}1, & 0\leqslant|\omega|<0.5\pi \\ 0, & 0.5\pi\leqslant|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

而相应的带通滤波器 $\Gamma(\omega)$ 选择最简单的形式：当 $\omega\in[-\pi,+\pi]$ 时，

$$\Gamma(\omega) = e^{-i\omega}\overline{\mathrm{H}}(\omega+\pi) = \begin{cases}0 & 0\leqslant|\omega|\leqslant 0.5\pi \\ e^{-i\omega} & 0.5\pi<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

相应的 $\mathrm{M}(\omega)$ 矩阵

$$\mathbf{M}(\omega) = \begin{pmatrix}\mathrm{H}(\omega) & \Gamma(\omega) \\ \mathrm{H}(\omega+\pi) & \Gamma(\omega+\pi)\end{pmatrix}$$

必为酉矩阵，即

$$\mathbf{M}(\omega)\mathbf{M}^*(\omega) = \mathbf{M}^*(\omega)\mathbf{M}(\omega) = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

在这样选择的前提下，带通滤波器脉冲响应序列 $\{g_n; n\in\mathbb{Z}\}$ 可写成

$$g_n = (-1)^{1-n}h_{1-n} = \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & n=1 \\ 0, & n=2k+1, k\neq 0, k\in\mathbb{Z} \\ \dfrac{\sqrt{2}\times(-1)^k}{(1-2k)\pi}, & n=2k, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

由小波方程 $\psi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\varphi(2x-n)$ 构造得到的正交小波 $\psi(x)$ 为

$$\psi(x) = 2\varphi\Big(2(x-0.5)\Big) - \varphi\Big(x-0.5\Big)$$
$$= \frac{\sin 2\pi(x-0.5) - \sin \pi(x-0.5)}{\pi(x-0.5)}$$

它和前述 Shannon 小波函数相比较，只是在时间轴上有半个单位的移动. 但它们是完全不同的两个 Shannon 小波，为函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 提供了两个完全不同的规范正交小波基.

此外，这个正交小波 $\psi(x)$ 和当 $\alpha=1$ 时的多分辨率分析 Shannon 小波 $\psi^{(\alpha)}(x)$ 是一样的，为函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 提供同为 $\{\psi^{(1)}_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi^{(1)}(2^j x - k); (j,k)\in\mathbb{Z}^2\}$ 的规范正交小波基.

7.2.3　Meyer 多分辨率分析小波

(α) Meyer 尺度函数

选取具有如下形式的非负实对称函数 $\Theta(\omega)\in\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ (即只在有限区间范围内取值不为零而且任意次可微函数全体构成的族：紧支撑光滑函数族)：

$$\begin{cases} 1 = \Theta(\omega), & 0 \leqslant |\omega| \leqslant \dfrac{2\pi}{3} \\ 1 = \Theta^2(\omega) + \Theta^2(2\pi - \omega), & -2\pi \leqslant \omega \leqslant 2\pi \\ 0 = \Theta(\omega), & \dfrac{4\pi}{3} \leqslant |\omega| < \infty \end{cases}$$

显然，在整个实数轴 $\mathbb{R}$ 上，$0\leqslant\Theta(\omega)\leqslant 1$. 利用 $\Theta(\omega)$ 的傅里叶逆变换定义函数

$$\theta(x) = (\mathcal{F}^{-1}\Theta)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Theta(\omega)e^{ix\omega}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{4\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\Theta(\omega)e^{ix\omega}\mathrm{d}\omega$$

那么，$\theta(x)$ 的傅里叶变换就是

$$\Theta(\omega) = (\mathcal{F}\theta)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)e^{-ix\omega}dx$$

定义函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\theta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Theta(\omega)e^{ix\omega}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{4\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\Theta(\omega)e^{ix\omega}\mathrm{d}\omega$$

那么，$\varphi(x)$ 的傅里叶变换 $\Phi(\omega) = (\mathcal{F}\varphi)(\omega)$ 可以表示为

$$\Phi(\omega) = (\mathcal{F}\varphi)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}\theta)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Theta(\omega)$$

而且满足如下规范正交条件:

$$2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\Phi(\omega+2n\pi)\right|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\Theta(\omega+2n\pi)\right|^2=1$$

这说明整数平移函数系 $\{\varphi(x-n);n\in\mathbb{Z}\}$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交函数系，如果将这个规范正交函数系张成的闭线性子空间记为 V_0，即

$$V_0=\text{Closespan}\{\varphi(x-n);n\in\mathbb{Z}\}$$

那么，$\{\varphi(x-n);n\in\mathbb{Z}\}$ 构成函数子空间 V_0 的规范正交基. 函数 $\varphi(x)$ 称为 Meyer 尺度函数.

(β) Meyer 尺度子空间序列

对于任意的整数 $j\in\mathbb{Z}$, 定义函数子空间序列 $\{V_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 如下:

$$V_j=\{f(2^jx);f(x)\in V_0\}$$

可以证明，$(\{V_j;j\in\mathbb{Z}\};\varphi(x))$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的一个多分辨率分析，把它称为 Meyer 多分辨率分析.

(γ) Meyer 多分辨率分析

由函数子空间序列 $\{V_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 的定义方式直接得到如下伸缩依赖关系:

$$f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1},\quad j\in\mathbb{Z}$$

这就是伸缩性公理. 另外，通过直接演算即可证明函数子空间 V_j 可以表示为

$$V_j=\text{Closespan}\{\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$$

而且 $\{\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 是规范正交函数系，构成 V_j 的规范正交基. 对于任意的整数 $k\in\mathbb{Z}$，函数 $\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^jx-k)$ 的傅里叶变换是

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\varphi_{j,k})(\omega)&=2^{-j/2}\Phi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}\\&=2^{-j/2}(2\pi)^{-0.5}\Theta(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}\end{aligned}$$

对于任意的函数 $f_j^{(0)}(x)\in V_j$，存在如下正交级数表达式:

$$f_j^{(0)}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_{j,k}^{(0)}\varphi_{j,k}(x)$$

其中

$$d_{j,k}^{(0)}=\int_{x\in\mathbb{R}}f_j^{(0)}(x)\overline{\varphi}_{j,k}(x)dx$$

而且

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|d_{j,k}^{(0)}\right|^2=\int_{x\in\mathbb{R}}\left|f_j^{(0)}(x)\right|^2dx=\left\|f_j^{(0)}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}^2<+\infty$$

在傅里叶变换域中，$f_j^{(0)}(x)\in V_j$ 可以表示为

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}f_j^{(0)})(\omega)&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_{j,k}^{(0)}(\mathscr{F}\varphi_{j,k})(\omega)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_{j,k}^{(0)}2^{-j/2}\Phi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_{j,k}^{(0)}2^{-j/2}(2\pi)^{-0.5}\Theta(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}\\&=2^{-j/2}(2\pi)^{-0.5}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_{j,k}^{(0)}e^{-i(2^{-j}\omega)k}\right]\Theta(2^{-j}\omega)\\&=\mathfrak{f}(2^{-j}\omega)\Theta(2^{-j}\omega)\end{aligned}$$

其中

$$\mathfrak{f}(2^{-j}\omega)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_{j,k}^{(0)}[(2^{j+1}\pi)^{-0.5}e^{-i(2^{-j}\omega)k}]$$

是周期为 $(2^{j+1}\pi)$ 的平方可积函数. 因此，在傅里叶变换域中，$f_j^{(0)}(x)\in V_j$ 的表现形式就是周期 $(2^{j+1}\pi)$ 的加窗傅里叶级数分析形式，而窗函数正好就是 $\Theta(2^{-j}\omega)$，即原始定义的频率窗函数 $\Theta(\omega)$ 在水平方向拉伸比例为 2^j 的扩张. 利用频率窗函数 $\Theta(\omega)$ 的原始定义可以在傅里叶变换域直接得到 $V_j\subseteq V_{j+1}, j\in\mathbb{Z}$. 这就是 Meyer 尺度子空间序列的嵌套关系或单调性.

现在说明函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间序列 $\{V_j, j\in\mathbb{Z}\}$ 的公共部分是只包含零函数的平凡子空间 $\{0\}$，即 $\cap\{V_j, j\in\mathbb{Z}\}=\bigcap_{j\in\mathbb{Z}}V_j=\{0\}$. 事实上，利用 V_j 的定义可知，如果 $v(x)\in\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j$，那么，在傅里叶变换域中，对于任意的整数 $j\in\mathbb{Z}$，$v(x)\in V_j$ 是 $2^j[4\pi/3]$ 频率截断的，当 $j\to-\infty$ 时，说明 $v(x)$ 是任意频率截断的，因此，它的能量只能集中在零频率处或者它的傅里叶变换 $(\mathscr{F}v)(\omega)$ 只可能在 $\omega=0$ 处不为 0，这就是说，$v(x)$ 只能是常数函数，但 $v(x)\in V_j\subseteq\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，即

$$\int_{x\in\mathbb{R}}\left|v(x)\right|^2dx<+\infty$$

因此，$v(x)=0$. 这就证明了唯一性.

现在证明函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间序列 $\{V_j, j\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中是稠密的：$\overline{(\cup\{V_j, j\in\mathbb{Z}\})}=\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，即对于任意的函数 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，存在函数序列 $\{f_j(x), j\in\mathbb{Z}\}$，满足 $f_j(x)\in V_j, j\in\mathbb{Z}$，$\lim_{j\to+\infty}\int_{x\in\mathbb{R}}\left|f_j(x)-f(x)\right|^2dx=0$ 或者 $\lim_{j\to+\infty}f_j(x)=$

$f(x)$. 按照构造性方法完成这个证明.

对于任意的函数 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, 定义函数序列 $\{f_j(x),j\in\mathbb{Z}\}$, 其傅里叶变换 $(\mathscr{F}f_j)(\omega)$ 如下构造：对于任意整数 $j\in\mathbb{Z}$,

$$(\mathscr{F}f_j)(\omega)=(\mathscr{F}f)(\omega)\Theta(2^{-j}\omega)$$

这样, 显然 $f_j(x)\in V_j, j\in\mathbb{Z}$, 同时, 利用傅里叶变换的 Parseval 恒等式(即能量守恒定理)可得

$$\begin{aligned}\int_{x\in\mathbb{R}}\left|f_j(x)-f(x)\right|^2dx&=\int_{\omega\in\mathbb{R}}\left|(\mathscr{F}f_j)(\omega)-(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2d\omega\\&=\int_{0\leqslant|\omega|\leqslant 2^j[2\pi/3]}\left|(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2\left|\Theta(2^{-j}\omega)-1\right|^2d\omega\\&\quad+\int_{2^j[2\pi/3]<|\omega|\leqslant 2^j[4\pi/3]}\left|(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2\left|\Theta(2^{-j}\omega)-1\right|^2d\omega\\&\quad+\int_{2^j[4\pi/3]<|\omega|<+\infty}\left|(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2\left|\Theta(2^{-j}\omega)-1\right|^2d\omega\\&=\int_{2^j[2\pi/3]<|\omega|\leqslant 2^j[4\pi/3]}\left|(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2\left|\Theta(2^{-j}\omega)-1\right|^2d\omega\\&\quad+\int_{2^j[4\pi/3]<|\omega|<+\infty}\left|(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2d\omega\\&\leqslant\int_{2^j[2\pi/3]<|\omega|<+\infty}\left|(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2d\omega\end{aligned}$$

因此直接得到

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{x\in\mathbb{R}}\left|f_j(x)-f(x)\right|^2dx=\lim_{j\to+\infty}\int_{2^j[2\pi/3]<|\omega|<+\infty}\left|(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2d\omega=0$$

其中因为 $\int_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x)\right|^2dx<+\infty$, 从而

$$\int_{\omega\in\mathbb{R}}\left|(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2d\omega=\int_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x)\right|^2dx<+\infty$$

于是必有 $\lim\limits_{j\to+\infty}\int_{2^j[2\pi/3]<|\omega|<+\infty}\left|(\mathscr{F}f)(\omega)\right|^2d\omega=0$.

稠密性得到证明.

综合上述讨论得到如下的定理.

定理 7.3 (Meyer 多分辨率分析)　前述论述中定义的函数 $\varphi(x)$ 和函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的闭子空间序列 $\{V_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 的组合 $(\{V_j;j\in\mathbb{Z}\},\varphi(x))$ 构成 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的一个多分辨率分析, 即子空间列 $\{V_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 与函数 $\varphi(x)$ 满足如下五个要求, 即：

❶ 单调性：$V_J\subseteq V_{J+1}, J\in\mathbb{Z}$；

❷ 稠密性：$\overline{[\bigcup\limits_{J\in\mathbb{Z}}V_J]}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$；

❸ 唯一性：$\bigcap\limits_{J\in\mathbb{Z}} V_J=\{0\}$；

❹ 伸缩性：$f(x)\in V_J \Leftrightarrow f(2x)\in V_{J+1}, J\in\mathbb{Z}$；

❺ 构造性：$\{\varphi(x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 构成 V_0 的规范正交基，

其中尺度函数 $\varphi(x)=(2\pi)^{-0.5}\theta(x)$ 称为 Meyer 尺度函数. 函数子空间 V_j 称为 Meyer 尺度子空间. 这个多分辨率分析 $(\{V_j, j\in\mathbb{Z}\},\varphi(x))$ 称为函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的 Meyer 多分辨率分析.

(δ) Meyer 小波

在 Meyer 多分辨率分析中，利用如下频域方程构造正交镜像滤波器组低通滤波器的频率响应函数 $\mathbb{H}(\omega)$：

$$\Phi(2\omega)=\mathbb{H}(\omega)\Phi(\omega),\quad -\pi\leqslant\omega\leqslant+\pi$$

或者等价地表示为

$$\Theta(2\omega)=\mathbb{H}(\omega)\Theta(\omega),\quad -\pi\leqslant\omega\leqslant+\pi$$

利用原始定义的频域窗函数 $\Theta(\omega)$ 的特殊构造可知，当 $-2\pi/3\leqslant\omega\leqslant+2\pi/3$ 时，$\Theta(\omega)=1$，于是，$\mathbb{H}(\omega)=\Theta(2\omega)$；当 $-\pi\leqslant\omega\leqslant-2\pi/3$ 或 $+2\pi/3\leqslant\omega\leqslant+\pi$ 时，因为 $|2\omega|\geqslant 4\pi/3$，所以 $\Theta(2\omega)=0$，此时，可以选取 $\mathbb{H}(\omega)=0=\Theta(2\omega)$. 这样，经过简单演算得到周期 2π 的低通滤波器频率响应函数(即传递函数) $\mathbb{H}(\omega)$ 的显式计算公式：

$$\mathbb{H}(\omega)=\frac{\Theta(2\omega)}{\Theta(\omega)}=\Theta(2\omega),\quad -\pi\leqslant\omega\leqslant+\pi$$

正交镜像滤波器组相应的带通滤波器频率响应函数 $\mathbb{G}(\omega)$ 选择如下：

$$\mathbb{G}(\omega)=e^{-i\omega}\mathbb{H}(\omega+\pi)=e^{-i\omega}\Theta(2\pi-2\,|\,\omega\,|),\quad -\pi\leqslant\omega\leqslant+\pi$$

此时，正交镜像滤波器组低通滤波器频率响应函数 $\mathbb{H}(\omega)$ 和带通滤波器频率响应函数 $\mathbb{G}(\omega)$ 构成的 2×2 矩阵：

$$\mathbf{M}(\omega)=\begin{pmatrix}\mathbb{H}(\omega) & \mathbb{H}(\omega+\pi)\\ \mathbb{G}(\omega) & \mathbb{G}(\omega+\pi)\end{pmatrix}$$

是一个酉矩阵，即满足如下恒等式：

$$\mathbf{M}(\omega)\mathbf{M}^*(\omega)=\mathbf{M}^*(\omega)\mathbf{M}(\omega)=\mathbf{I}$$

或者等价地，当 $\omega\in[0,2\pi]$ 时，

$$\begin{cases} \left|\mathbb{H}(\omega)\right|^2 + \left|\mathbb{H}(\omega+\pi)\right|^2 = 1 \\ \left|\mathbb{G}(\omega)\right|^2 + \left|\mathbb{G}(\omega+\pi)\right|^2 = 1 \\ \mathbb{H}(\omega)\overline{\mathbb{G}}(\omega) + \mathbb{H}(\omega+\pi)\overline{\mathbb{G}}(\omega+\pi) = 0 \end{cases}$$

这时, Meyer 小波函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 可以取为

$$\Psi(\omega) = \mathbb{G}(0.5\omega)\Theta(0.5\omega) = e^{-0.5i\omega}\Theta(0.5\omega)\Theta(2\pi - |\,\omega\,|)$$

而且如下的伸缩平移函数系

$$\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k); (j,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

是平方可积函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基, 即 Meyer 规范正交小波函数基.

由 $\Theta(\omega) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ 知 $\Psi(\omega) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, 而且容易证明, 对于任意自然数 n,

$$\begin{cases} \Psi^{(n)}(0) = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \psi(x) dx = 0 \end{cases}$$

这说明 Meyer 小波 $\psi(x)$ 是光滑的而且具有任意阶的消失矩, 即 $\psi(x)$ 是具有良好波动性的光滑函数. 这些性质保证 Meyer 小波在函数空间分析和其他一些对光滑性和消失矩有特殊要求的理论分析中具有重要作用. 关于 Meyer 小波的更多讨论, 可以参考 Meyer 和 Coifman(1991a, 1991b), Meyer 等(1997), Coifman 和 Wickerhauser (1992), Coifman 等(1992) , Coifman 和 Meyer(1991) 等重要文献.

7.2.4 Daubechies 紧支撑小波

这里介绍 Daubechies 紧支撑正则正交小波理论.

(α) Daubechies 尺度函数和多分辨率分析

在正交多分辨率分析中, 尺度函数是最重要的部分. 虽然在一些著名的多分辨率分析例子中尺度函数比较简单, 但是, 在一般的情况下构造尺度函数仍然是一个困难问题. 比利时数学家 Daubechies(1988)给出了尺度函数的一般迭代算法, 特别是紧支撑尺度函数的构造方法, 从而得到了以她的名字命名的 Daubechies 系列小波. 这些都基于如下定理(证明略).

定理 7.4 (Daubechies, 1988)(Daubechies 多分辨率分析)　设低通滤波器的频率响应函数

$$\mathrm{H}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \mathrm{e}^{-i\omega n}$$

是共轭滤波器, 即

$$\left|\mathrm{H}(\omega)\right|^2+\left|\mathrm{H}(\omega+\pi)\right|^2=1$$

而且 $\mathrm{H}(0)=1$. 如果它具有如下分解形式:

$$\mathrm{H}(\omega)=\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N B(\omega)$$

其中 $B(\omega)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}b_k e^{-i\omega k}$, 满足 $\sup_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi}\left|B(\omega)\right|<2^{N-1}$, 同时存在 $\varepsilon>0$, 使得 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|b_k\right|\left|k\right|^{\varepsilon}<+\infty$, 那么, 如下递归定义的函数序列 $\{\lambda_n(x);n\in\mathbb{N}\}$

$$\begin{cases}\lambda_0(x)=\chi_{(-0.5\ ,+0.5)}(x)\\ \lambda_{n+1}(x)=\sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k\lambda_n(2x-k),\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

按函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的范数收敛, 同时也逐点收敛于连续函数 $\varphi(x)$, 而且, $\varphi(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的傅里叶变换是

$$\Phi(\omega)=\prod_{j=1}^{+\infty}\mathrm{H}(2^{-j}\omega)$$

对任何整数 $j\in\mathbb{Z}$, 引入记号:

$$V_j=\mathrm{Closespan}\{\varphi_{j,n}(x)=2^{j/2}\varphi(2^j x-n);n\in\mathbb{Z}\}$$

那么, $(\{V_j;j\in\mathbb{Z}\},\ \varphi(x))$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的正交多分辨率分析.

(β) Daubechies 小波

函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的正交多分辨率分析 $(\{V_j;j\in\mathbb{Z}\},\ \varphi(x))$ 对应的尺度方程可以写成

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k\varphi(2x-k)$$

定义函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的闭线性子空间序列 $\{W_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 满足如下条件:

$$W_j\perp V_j \text{ 而且 } V_{j+1}=V_j\oplus W_j$$

并按照如下方程定义函数

$$\psi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-n}\,\overline{h}_{2\kappa+1-n}\varphi(2x-k)$$

其中 κ 是任意固定整数, 那么可以证明 $\psi(x)$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的一个正交小波函数, 称为 Daubechies 小波, 满足如下关系式:

$$\begin{cases} W_j = \text{Closespan}\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\} \\ \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j = \text{span}\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k); (j,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\} \end{cases}$$

(γ) Daubechies 紧支撑尺度函数

对于任意函数 $\xi(x)$，它的支撑(集合)定义为如下闭集：

$$\text{Supp}\xi = \text{Close}\{x; \xi(x) \neq 0\}$$

对于任意函数 $\xi(x)$，它的支撑(集合) $\text{Supp}\xi = \text{Close}\{x; \xi(x) \neq 0\}$ 是紧集，则称函数 $\xi(x)$ 是紧支撑的. 显然，如果函数 $\xi(x)$ 的支撑是有界集合，即它的支撑包含在有限长度闭区间中，或者存在 $T > 0$，当 $|x| > T$ 时，$\xi(x) = 0$，那么，这样的函数必然是紧支撑的，反之亦然.

定理 7.5 (有限响应紧支撑定理)　如果 $(\{V_j; j \in \mathbb{Z}\}, \varphi(x))$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的正交多分辨率分析，$\varphi(x)$ 是尺度函数，那么，$\varphi(x)$ 是紧支撑函数(即存在 $T > 0$，当 $|x| > T$ 时，$\varphi(x) = 0$)的充分必要条件是，滤波器 $\mathrm{H}(\omega)$ 的脉冲响应序列 $\{h_n; n \in \mathbb{Z}\}$ 是有限长度的或者只有有限项非零，即存在 N，当 $|n| > N$ 时，$h_n = 0$.

证明　从尺度函数的紧支撑性质以及尺度函数时间压缩和平移的紧支撑性质，容易证明，在如下的尺度方程：

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k)$$

中，右边函数项级数的求和项系数：

$$h_k = \left\langle \varphi(\cdot), \sqrt{2}\varphi(2\cdot - k) \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = \int_{t\in\mathbb{R}} \varphi(x)[\sqrt{2}\varphi(2x - k)]^* dx$$

至多只有有限项系数非零，这就是这个条件的必要性.

下面讨论充分性. 设当 $n < N_-$ 或者 $n > N_+$ 时，$h_{N_-} h_{N_+} \neq 0$ 而且 $h_n = 0$. 利用递归迭代公式：

$$\begin{cases} \lambda_0(x) = \chi_{(-0.5\ ,+0.5)}(x) \\ \lambda_{n+1}(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \lambda_n(2x - k) \end{cases}$$

产生函数序列 $\{\lambda_n(x); n \in \mathbb{N}\}$，假设 $[N_\ell^-, N_\ell^+]$ 是包含闭集

$$\text{Supp}\lambda_\ell = \text{Close}\{x; \lambda_\ell(x) \neq 0\}$$

的最小整数区间，则根据如下公式：

$$\lambda_\ell(x)=\sqrt{2}[h_{N_-}\lambda_{\ell-1}(2x-N_-)+\cdots+h_{N_+}\lambda_{\ell-1}(2x-N_+)]$$

可知：当 $\lambda_\ell(x)\neq 0$ 时，必然存在整数 k，满足 $N_{\ell-1}^-\leqslant 2x-k\leqslant N_{\ell-1}^+$ 或等价地表示为 $0.5(N_{\ell-1}^-+k)\leqslant x\leqslant 0.5(N_{\ell-1}^++k)$，同时满足 $N_-\leqslant k\leqslant N_+$. 综合这两个不定式可得到，$0.5(N_{\ell-1}^-+N_-)\leqslant x\leqslant 0.5(N_{\ell-1}^++N_+)$. 反之，当 $x<0.5(N_{\ell-1}^-+N_-)$ 或者 $x>0.5(N_{\ell-1}^++N_+)$ 时，必有 $\lambda_\ell(x)=0$. 所以,

$$\mathrm{Supp}\lambda_\ell\subseteq[0.5(N_{\ell-1}^-+N_-),\ 0.5(N_{\ell-1}^++N_+)]$$

从而得

$$0.5(N_{\ell-1}^-+N_-)\leqslant N_\ell^-\leqslant N_\ell^+\leqslant 0.5(N_{\ell-1}^++N_+)$$

由于前述递归迭代公式的迭代初始函数选择为示性函数 $\lambda_0(x)=\chi_{(-0.5\ ,+0.5)}(x)$，因此，初始支撑参数 $N_0^-=-0.5,N_0^+=0.5$. 当 $\ell\to+\infty$ 时，得

$$\mathrm{Supp}\varphi\subseteq[N_-,\ N_+]$$

即尺度函数 $\varphi(x)$ 是支撑在区间 $[N_-,\ N_+]$ 上的紧支撑函数. 这样就证明了前述条件的充分性. 定理证明完成.

推论 7.1 (紧支撑正交小波构造定理)　如果 $(\{V_j;j\in\mathbb{Z}\},\ \varphi(x))$ 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的正交多分辨率分析，$\varphi(x)$ 是尺度函数且 $\mathrm{Supp}\varphi\subseteq[N_-,\ N_+]$，则由公式

$$\psi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-n}\overline{h}_{2\kappa+1-n}\varphi(2x-k)$$

构造得到的小波函数 $\psi(x)$ 也必然是紧支撑的，而且

$$\mathrm{Supp}\psi\subseteq[0.5-0.5(N_+-N_-),\ 0.5+0.5(N_+-N_-)]$$

另外，通过选择构造方程 $\psi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-n}\overline{h}_{2\kappa+1-n}\varphi(2x-k)$ 中整数 κ 的数值，可以假定 $N_-=0$，这时

$$\begin{cases}\mathrm{Supp}\phi\subseteq[0,\ N_+]\\ \mathrm{Supp}\psi\subseteq[0.5(1-N_+),\ 0.5(1+N_+)]\end{cases}$$

这样，紧支撑尺度函数和紧支撑小波函数的构造问题转化为构造只有有限个系数非零的共轭滤波器，这样的滤波器称为有限响应或者有限系数共轭滤波器.

(δ) 有限响应共轭滤波器

设滤波器 $\mathrm{H}(\omega)$ 被表示成如下三角级数：

$$\mathrm{H}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_n e^{-i\omega n}$$

如果其系数序列 $\{h_n;n\in\mathbb{Z}\}$ 至多只有有限项数值不为零，则称 $\mathrm{H}(\omega)$ 是有限响应或者有限系数滤波器.

设 $\omega=\pi$ 是有限系数共轭滤波器 $\mathrm{H}(\omega)$ 的 N 重根，而且

$$\mathrm{H}(\omega)=\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N Q(e^{-i\omega})$$

其中 $Q(z)$ 是变量 z 的实系数多项式. 这时，$|Q(e^{-i\omega})|^2=Q(e^{-i\omega})Q(e^{i\omega})$ 一定可以写成正弦函数 $\sin^2(0.5\omega)$ 的实系数多项式，简记为 $P(\sin^2(0.5\omega))$，即

$$|Q(e^{-i\omega})|^2=P(\sin^2(0.5\omega))=P(1-\cos^2(0.5\omega))$$

同时得

$$|Q(e^{-i(\omega+\pi)})|^2=P(\sin^2(0.5(\omega+\pi)))=P(\cos^2(0.5\omega))$$

作变量替换

$$y=\cos^2(0.5\omega)$$

利用如下的演算：

$$\left|\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right|^2=\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\frac{1+e^{i\omega}}{2}=\frac{e^{i\omega/2}+e^{-i\omega/2}}{2}\frac{e^{i\omega/2}+e^{-i\omega/2}}{2}=\cos^2(0.5\omega)=y$$

$$\left|\frac{1+e^{-i(\omega+\pi)}}{2}\right|^2=\cos^2(0.5(\omega+\pi))=\sin^2(0.5\omega)=1-\cos^2(0.5\omega)=1-y$$

可以将 $\mathrm{H}(\omega)$ 是共轭滤波器的条件

$$|\mathrm{H}(\omega)|^2+|\mathrm{H}(\omega+\pi)|^2=1$$

等价地改写为

$$\begin{cases}y^N P(1-y)+(1-y)^N P(y)=1\\ P(y)\geqslant 0,\quad y\in[0,1]\end{cases}$$

(ε) 有限共轭滤波器正实系数多项式

这里给出满足有限响应共轭滤波器条件的正实系数多项式构造形式.

引理 7.1 (连和组合恒等式)　对任何非负整数 n 和 k, 成立如下恒等式

$$\sum_{j=0}^{k} C_{n+j}^{j} = C_{n+k+1}^{k}$$

证明　重复使用简单组合恒等式 $C_{n+k+1}^{k} = C_{n+k}^{k} + C_{n+k}^{k-1}$ 容易得到上述结果.

引理 7.2 (多项式连和恒等式)　当 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 时, 成立如下恒等式

$$\sum_{j=0}^{n} C_{n+j}^{j}[y^{j}(1-y)^{n+1} + y^{n+1}(1-y)^{j}] \equiv 1$$

证明　用数学归纳法验证这个恒等式. 令

$$s_n(y) = \sum_{j=0}^{n} C_{n+j}^{j}[y^{j}(1-y)^{n+1} + y^{n+1}(1-y)^{j}]$$

首先, 当 $n=0$ 时, $s_0(y) = (1-y)+y = 1$. 其次, 假设 $s_{n-1}(y)=1$, 下面推证恒等式 $s_n(y) = s_{n-1}(y)$. 实际上, 如下演算成立:

$$\begin{aligned}
s_{n-1}(y) &= \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1+j}^{j}[y^{j}(1-y)^{n} + y^{n}(1-y)^{j}] \\
&= C_{n-1+0}^{0}[(1-y)^{n} + y^{n}] + C_{n-1+1}^{1}[y^{1}(1-y)^{n} + y^{n}(1-y)^{1}] \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n-1} C_{n-1+j}^{j}[y^{j}(1-y)^{n} + y^{n}(1-y)^{j}] \\
&= C_{n}^{0}\{(1-y)^{n}[(1-y)+y] + y^{n}[(1-y)+y]\} \\
&\quad + C_{n}^{1}[y(1-y)^{n} + y^{n}(1-y)] + \sum_{j=2}^{n-1} C_{n-1+j}^{j}[y^{j}(1-y)^{n} + y^{n}(1-y)^{j}] \\
&= C_{n}^{0}[(1-y)^{n+1} + y^{n+1}] + (C_{n}^{0} + C_{n}^{1})[y(1-y)^{n} + y^{n}(1-y)] \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n-1} C_{n-1+j}^{j}[y^{j}(1-y)^{n} + y^{n}(1-y)^{j}] \\
&= C_{n}^{0}[(1-y)^{n+1} + y^{n+1}] + C_{n+1}^{1}[y(1-y)^{n} + y^{n}(1-y)] \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n-1} C_{n-1+j}^{j}[y^{j}(1-y)^{n} + y^{n}(1-y)^{j}] \\
&= C_{n}^{0}[(1-y)^{n+1} + y^{n+1}] \\
&\quad + C_{n+1}^{1}\{y(1-y)^{n}[(1-y)+y] + y^{n}(1-y)[(1-y)+y]\} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n-1} C_{n-1+j}^{j}[y^{j}(1-y)^{n} + y^{n}(1-y)^{j}]
\end{aligned}$$

连续演算到第 $u < n-2$ 步骤时, 得到如下等式:

$$
\begin{aligned}
s_{n-1}(y) &= \mathrm{C}_n^0[(1-y)^{n+1}+y^{n+1}]+\mathrm{C}_{n+1}^1[y(1-y)^{n+1}+y^{n+1}(1-y)] \\
&\quad +\mathrm{C}_{n+1}^1[y^2(1-y)^n+y^n(1-y)^2]+\sum_{j=2}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1+j}^j[y^j(1-y)^n+y^n(1-y)^j] \\
&= \sum_{j=0}^{u}\mathrm{C}_{n+j}^j[y^j(1-y)^{n+1}+y^{n+1}(1-y)^j] \\
&\quad +\mathrm{C}_{n+u}^u[y^{u+1}(1-y)^n+y^n(1-y)^{u+1}] \\
&\quad +\sum_{j=u+1}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1+j}^j[y^j(1-y)^n+y^n(1-y)^j]
\end{aligned}
$$

当 $u=n-2$ 时，得到如下等式：

$$
\begin{aligned}
s_{n-1}(y) &= \sum_{j=0}^{n-2}\mathrm{C}_{n+j}^j[y^j(1-y)^{n+1}+y^{n+1}(1-y)^j] \\
&\quad +\mathrm{C}_{n+n-2}^{n-2}[y^{n-1}(1-y)^n+y^n(1-y)^{n-1}] \\
&\quad +\mathrm{C}_{n-1+n-1}^{n-1}[y^{n-1}(1-y)^n+y^n(1-y)^{n-1}] \\
&= \sum_{j=0}^{n-2}\mathrm{C}_{n+j}^j[y^j(1-y)^{n+1}+y^{n+1}(1-y)^j] \\
&\quad +(\mathrm{C}_{n+n-2}^{n-2}+\mathrm{C}_{n+n-2}^{n-1})[y^{n-1}(1-y)^n+y^n(1-y)^{n-1}] \\
&= \sum_{j=0}^{n-2}\mathrm{C}_{n+j}^j[y^j(1-y)^{n+1}+y^{n+1}(1-y)^j] \\
&\quad +\mathrm{C}_{n+n-1}^{n-1}[y^{n-1}(1-y)^n+y^n(1-y)^{n-1}]
\end{aligned}
$$

对上式中的最后一项 $\mathrm{C}_{n+n-1}^{n-1}[y^{n-1}(1-y)^n+y^n(1-y)^{n-1}]$ 进行整理，得到如下等式：

$$
\begin{aligned}
s_{n-1}(y) &= \sum_{j=0}^{n-2}\mathrm{C}_{n+j}^j[y^j(1-y)^{n+1}+y^{n+1}(1-y)^j] \\
&\quad +\mathrm{C}_{n+n-1}^{n-1}\{y^{n-1}(1-y)^n[(1-y)+y]+y^n(1-y)^{n-1}[(1-y)+y]\} \\
&= \sum_{j=0}^{n-2}\mathrm{C}_{n+j}^j[y^j(1-y)^{n+1}+y^{n+1}(1-y)^j] \\
&\quad +\mathrm{C}_{n+n-1}^{n-1}[y^{n-1}(1-y)^{n+1}+y^{n+1}(1-y)^{n-1}] \\
&\quad +\mathrm{C}_{n+n-1}^{n-1}[y^n(1-y)^n+y^n(1-y)^n] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n+j}^j[y^j(1-y)^{n+1}+y^{n+1}(1-y)^j] \\
&\quad +2\mathrm{C}_{n+n-1}^{n-1}y^n(1-y)^n[(1-y)+y]
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} C_{n+j}^{j} [y^j (1-y)^{n+1} + y^{n+1} (1-y)^j] + C_{n+n}^{n} [y^n (1-y)^{n+1} + y^{n+1} (1-y)^n]$$

这样最终得到

$$s_{n-1}(y) = \sum_{j=0}^{n} C_{n+j}^{j} [y^j (1-y)^{n+1} + y^{n+1} (1-y)^j] = s_n(y)$$

其中利用了组合恒等式 $2C_{2n-1}^{n-1} = C_{2n}^{n}$. 从而 $s_n(y) = s_{n-1}(y) = 1$.

对于 $0 \leqslant y \leqslant 1$，构造如下形式的正实系数多项式：

$$P_n(y) = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1+j}^{j} y^j$$

则

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1+j}^{j} [y^j (1-y)^n + y^n (1-y)^j] \\ &= y^n \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1+j}^{j} (1-y)^j + (1-y)^n \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1+j}^{j} y^j \\ &= y^n P_n(1-y) + (1-y)^n P_n(y) \end{aligned}$$

从而

$$\begin{cases} y^n P_n(1-y) + (1-y)^n P_n(y) = 1 \\ P_n(y) \geqslant 0, \quad y \in [0,1] \end{cases}$$

即根据上述公式构造得到的 $(n-1)$ 次正实系数多项式 $P_n(y)$ 完全满足有限响应共轭滤波器的基本条件. 同时，当 $n > 1$ 时，

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi} |Q(e^{-i\omega})| &= \left(\sup_{0 \leqslant y \leqslant 1} |P_n(y)| \right)^{0.5} \\ &= (P_n(1))^{0.5} = \left(\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1+j}^{j} \right)^{0.5} = (C_{2n-1}^{n-1})^{0.5} < 2^{n-1} \end{aligned}$$

所以，前述定理 7.4 的条件是成立的.

这样，共轭滤波器 $H(\omega)$ 的构造问题完全转化为具体求出变量 z 的实系数多项式 $Q(z)$，使得 $|Q(e^{-i\omega})|^2 = P(\sin^2(0.5\omega))$，最终实现共轭滤波器 $H(\omega)$ 的构造：

$$\mathrm{H}(\omega) = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N Q(e^{-i\omega})$$

(ζ) Riesz 引理

这里讨论 Riesz 引理，它从理论上保证了满足 $|Q(e^{-i\omega})|^2 = P_n(\sin^2(0.5\omega))$ 的实系数多项式 $Q(z)$ 的存在性.

引理 7.3 (Riesz 引理)　若 $(N+1)$ 个实数 $a_0, a_1, \cdots, a_N$ 满足

$$A(\omega) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos n\omega \geqslant 0, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

则必存在 $(N+1)$ 个实数 $b_0, b_1, \cdots, b_N$，使得多项式

$$B(\omega) = \sum_{n=0}^{N} b_n e^{in\omega}$$

满足

$$|B(\omega)|^2 = A(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

证明　利用 $(N+1)$ 个实数 $a_0, a_1, \cdots, a_N$ 具体构造实数系数 $b_0, b_1, \cdots, b_N$ 满足定理的要求.

根据公式 $\cos n\omega = 0.5(e^{in\omega} + e^{-in\omega})$ 将 $A(\omega)$ 改写如下:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= a_0 + 0.5\sum_{n=1}^{N} a_n (e^{in\omega} + e^{-in\omega}) \\ &= e^{-iN\omega}\left[0.5\sum_{n=0}^{N-1} a_{N-n} e^{in\omega} + a_0 e^{iN\omega} + 0.5\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i(N+n)\omega}\right] \\ &= e^{-iN\omega}\tilde{A}(e^{i\omega}) \end{aligned}$$

其中，$z = e^{i\omega}$，

$$\tilde{A}(z) = 0.5\sum_{n=0}^{N-1} a_{N-n} z^n + a_0 z^N + 0.5\sum_{n=1}^{N} a_n z^{n+N}$$

是 $2N$ 次实系数多项式，所以它必有 $2N$ 个零点.

根据 $\tilde{A}(z)$ 的定义可知，$\tilde{A}(e^{i\omega}) = e^{iN\omega}A(\omega)$，从而，

$$\begin{aligned} \overline{[\tilde{A}(e^{i\omega})]} &= \tilde{A}(e^{-i\omega}) = e^{-iN\omega}A(-\omega) = e^{-iN\omega}A(\omega) \\ &= e^{-2iN\omega}[e^{iN\omega}A(\omega)] = e^{-2iN\omega}\tilde{A}(e^{i\omega}) \end{aligned}$$

这样

$$\tilde{A}(e^{i\omega}) = e^{2iN\omega}\tilde{A}(e^{-i\omega})$$

其中 $\omega \in \mathbb{R}$. 令 $z = e^{i\omega}, \omega \in \mathbb{R}$, 那么, 上式可以写成 $\tilde{A}(z) = z^{2N}\tilde{A}(z^{-1})$.

这些结果表明, 多项式 $\tilde{A}(z)$ 与 $z^{2N}\tilde{A}(z^{-1})$ 在单位圆周上相同, 因而, 对于任意的复数 $z \neq 0$, $\tilde{A}(z) = z^{2N}\tilde{A}(z^{-1})$. 所以, 若 z_0 为 $\tilde{A}(z)$ 的零点, 即 $\tilde{A}(z_0) = 0$, 那么, 因为 a_0, a_1, $\cdots$, a_N 是实数, 故得

$$\tilde{A}(z_0) = z_0^{2N}\tilde{A}(z_0^{-1}) = \tilde{A}(\overline{z}_0) = \overline{z}_0^{2N}\tilde{A}(\overline{z}_0^{-1}) = 0$$

这说明, 当 z_0 为 $\tilde{A}(z)$ 的复零点时, $z_0^{-1}, \overline{z}_0, \overline{z}_0^{-1}$ 都是 $\tilde{A}(z)$ 的零点; 当 r_0 是 $\tilde{A}(z)$ 的实零点时, r_0^{-1} 是 $\tilde{A}(z)$ 的零点. 这样一来, 多项式 $\tilde{A}(z)$ 可写成

$$\tilde{A}(z) = 0.5a_N \cdot \prod_{k=1}^{K}(z - r_k)(z - r_k^{-1})\prod_{m=1}^{M}(z - z_m)(z - z_m^{-1})(z - \overline{z}_m)(z - \overline{z}_m^{-1})$$

其中 $4M + 2K = 2N$.

为了将 $A(\omega) = |A(\omega)| = |e^{-iN\omega}\tilde{A}(e^{i\omega})| = |\tilde{A}(e^{i\omega})| \geqslant 0$ 写成 $A(\omega) = |B(\omega)|^2$, 研究如下表达式:

$$\begin{aligned}A(\omega) &= |\tilde{A}(e^{i\omega})| \\ &= |0.5a_N| \cdot \prod_{k=1}^{K}|(e^{i\omega} - r_k)(e^{i\omega} - r_k^{-1})| \\ &\quad \times \prod_{m=1}^{M}|(e^{i\omega} - z_m)(e^{i\omega} - \overline{z}_m^{-1})||(e^{i\omega} - z_m^{-1})(e^{i\omega} - \overline{z}_m)|\end{aligned}$$

中 $z = e^{i\omega}$ 的一次因式的成对乘积. 因为, 当 $z_0 \neq 0$ 时,

$$|(e^{i\omega} - z_0)(e^{i\omega} - \overline{z}_0^{\,-1})| = |-e^{i\omega}\overline{z}_0^{\,-1}(e^{i\omega} - z_0)\overline{(e^{i\omega} - z_0)}| = |\overline{z}_0|^{-1}|e^{i\omega} - z_0|^2$$

所以

$$A(\omega) = \alpha\left|\prod_{k=1}^{K}(e^{i\omega} - r_k) \cdot \prod_{m=1}^{M}(e^{i\omega} - z_m)(e^{i\omega} - \overline{z}_m)\right|^2$$

其中

$$\alpha = 0.5|a_N||r_1 r_2 \cdots r_K|^{-1}|z_1 z_2 \cdots z_M|^{-2}$$

这样, 选择 $B(\omega)$ 是具有如下表达式的实系数的 $z = e^{i\omega}$ 的多项式:

$$B(\omega)=\sqrt{\alpha}\prod_{k=1}^{K}(e^{i\omega}-r_k)\prod_{m=1}^{M}(e^{2i\omega}-2e^{i\omega}\mathrm{R}_e z_m+|z_m|^2)$$

那么，$B(\omega)$是$z=e^{i\omega}$的最高$N=K+2M$次的实系数多项式，而且满足

$$A(\omega)=\alpha\left|\prod_{k=1}^{K}(e^{i\omega}-r_k)\cdot\prod_{m=1}^{M}(e^{i\omega}-z_m)(e^{i\omega}-\overline{z}_m)\right|^2=|B(\omega)|^2$$

由$B(\omega)$的构造可知，$B(\omega)$的最高次项系数是$\sqrt{\alpha}$，由系数$a_0,a_1,\cdots,a_N$唯一确定，此外，如下的实系数多项式因式分解：

$$\prod_{k=1}^{K}(e^{i\omega}-r_k)\prod_{m=1}^{M}(e^{2i\omega}-2e^{i\omega}\mathrm{R}_e z_m+|z_m|^2)$$

是$B(\omega)$关于$z=e^{i\omega}$的多项式主体，而$z=e^{i\omega}$的最高次数是$K+2M=N$.

(η) 有限共轭滤波器的多样性

根据 Riesz 引理，只要实系数多项式$P(y)$满足有限共轭滤波器的条件：

$$\begin{cases}y^N P(1-y)+(1-y)^N P(y)=1\\ P(y)\geqslant 0,\quad y\in[0,1]\end{cases}$$

则必可找到与$P(y)$同阶的实系数多项式$Q(z)$，满足

$$|Q(e^{i\omega})|^2=P(\sin^2 0.5\omega)$$

从而，

$$H(\omega)=\left(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right)^N|Q(e^{-i\omega})|$$

是系数有限的共轭滤波器.

前述分析已经证明，当$N>1$给定之后，如果对于$0\leqslant y\leqslant 1$，构造如下形式的正实系数多项式$P_N(y)$：

$$P_N(y)=\sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{C}_{N-1+j}^{j}y^j$$

那么，实系数多项式$P(y)=P_N(y)$满足有限共轭滤波器基本条件. 实际上，可以进一步证明，当要求实系数多项式$P(y)$的次数不超过$N-1$时，$P(y)=P_N(y)$是唯一满足要求的选择. 但是，如果允许实系数多项式$P(y)$的次数超过$(N-1)$，那么，满足要求的选择存在无穷多种可能性. 这样导致了有限响应共轭滤波器的多样性.

现在研究满足共轭滤波器基本条件的实系数多项式$P(y)$的多样性. 满足共轭

滤波器基本条件的实系数多项式 $P(y)$ 具有更一般的形式：

$$P(y) = P_N(y) + y^N R(y)$$

其中，实系数多项式 $R(y)$ 满足必要条件

$$R(1-y) + R(y) = 0$$

即 $R(y)$ 必须是以 $y = 0.5$ 为对称轴的反对称多项式，所以 $R(y)$ 可表示为

$$R(y) = (y-0.5)^{2\zeta+1}(c_0 + c_1(y-0.5)^2 + c_2(y-0.5)^4 + \cdots + c_\ell(y-0.5)^{2\ell})$$

这里 ζ 和 ℓ 是可任选的非负整数，而系数 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_\ell$ 是实数，满足

$$\sup_{0\leqslant y\leqslant 1}[P_N(y) + y^N R(y)] < 2^{2(N-1)}$$

(θ) 有限共轭滤波器构造

在前述关于满足共轭滤波器基本条件的实系数多项式 $P(y)$ 的性质、构造方法以及多样性理论基础上，总结可得构造有限系数共轭滤波器 $\mathrm{H}(\omega)$ 的具体方法.

定理 7.6 (有限共轭滤波器构造方法)　设低通滤波器的脉冲响应函数具有如下构造形式：

$$H(\omega) = \left(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right)^N Q(e^{i\omega})$$

那么，可以按照下述方法构造得到有限响应共轭滤波器 $\mathrm{H}(\omega)$：

(1) 按需要选择自然数 $N > 1$；

(2) 任选非负整数 ζ, ℓ，构造系数为 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_\ell$ 的实系数多项式

$$R(y) = (y-0.5)^{2\zeta+1}[c_0 + c_1(y-0.5)^2 + c_2(y-0.5)^4 + \cdots + c_\ell(y-0.5)^{2\ell}]$$

以及

$$P(y) = P_N(y) + y^N R(y) \geqslant 0$$

满足条件

$$\sup_{0\leqslant y\leqslant 1}[P(y)]^{0.5} < 2^{N-1}$$

其中

$$P_N(y) = \sum_{j=0}^{N-1} C_{N-1+j}^j y^j$$

(3) 求出多项式 $P(y)$ 的全部根，根据 Riesz 引理，构造满足如下等式的与 $P(y)$ 同阶的实系数多项式 $Q(z)$：

$$|Q(e^{i\omega})|^2 = P(\sin^2 0.5\omega)$$

(4) 按照如下公式计算有限响应共轭滤波器

$$\mathrm{H}(\omega) = \left(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right)^N Q(e^{i\omega})$$

(5) 根据 $\mathrm{H}(\omega)$ 的定义公式

$$\mathrm{H}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-i\omega n}$$

求出 $\mathrm{H}(\omega)$ 的脉冲响应系数，当 $R(y)\neq 0$ 时，这些系数是 $h_0, h_1, \cdots, h_{2[N+(2\zeta+1)+2\ell]+1}$，总共是 $2[N+(2\zeta+1)+2\ell]+2$ 个实数；当 $R(y)=0$ 时，只有 $2N$ 个系数.

(ι) 紧支撑尺度函数和小波函数

首先，根据前述有限响应共轭滤波器的构造方法，获得系数为 $h_0, h_1, \cdots, h_{2\kappa+1}$ 的共轭滤波器，由尺度方程

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{2\kappa+1} h_k \varphi(2x-k)$$

得到紧支撑尺度函数 $\varphi(x)$. 其次，由构造方程

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{2\kappa+1} (-1)^{1-k}\overline{h}_{1-k}\varphi(2x+k-1)$$

得出紧支撑小波函数 $\psi(x)$.

例 1 紧支撑尺度函数和紧支撑小波函数计算实例. 选定 $N=2, R(y)=0$，这时，构造格式具有如下形式：

$$P_2(y) = \sum_{j=0}^{1} \mathrm{C}_{1+j}^{j} y^j = 1+2y, \quad Q_2(z) = a_0 + a_1 z$$

简单计算得到如下方程：

$$\begin{aligned} &|Q_2(e^{-i\omega})|^2 = Q_2(e^{-i\omega})Q_2(e^{-i\omega}) \\ &= (a_0+a_1)^2 - 4a_0a_1\sin^2 0.5\omega \\ &= P_2(\sin^2 0.5\omega) = 1 + 2\sin^2 0.5\omega \end{aligned}$$

利用 w 的任意性得到如下方程组：

$$\begin{cases}(a_0+a_1)^2=1\\ -4a_0a_1=2\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}a_0=0.5(1+\sqrt{3})\\ a_1=0.5(1-\sqrt{3})\end{cases}$$

根据系数有限共轭滤波器的构造方法和格式，得到如下演算：

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(\omega)&=\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^2Q_2(e^{-i\omega})=\frac{1}{4}(1+2e^{-i\omega}+e^{-2i\omega})(a_0+a_1e^{-i\omega})\\&=\frac{1}{4}a_0+\frac{1}{4}(2a_0+a_1)e^{-i\omega}+\frac{1}{4}(a_0+2a_1)e^{-2i\omega}+\frac{1}{4}a_1e^{-3i\omega}\end{aligned}$$

利用定义公式

$$\mathrm{H}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_ne^{-i\omega n}$$

得到有限响应共轭滤波器的脉冲响应系数应该满足的方程组：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}h_0=\frac{1}{4}a_0,\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}h_1=\frac{1}{4}(2a_0+a_1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}h_2=\frac{1}{4}(a_0+2a_1),\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}h_3=\frac{1}{4}a_1$$

最终得到有限响应共轭滤波器的脉冲响应系数的详细表达式：

$$h_0=\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}),\qquad h_1=\frac{1}{4\sqrt{2}}(3+\sqrt{3})$$

$$h_2=\frac{1}{4\sqrt{2}}(3-\sqrt{3}),\qquad h_3=\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\sqrt{3})$$

这时，尺度方程是

$$\varphi(x)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\varphi(2x)+\frac{3+\sqrt{3}}{4}\varphi(2x-1)+\frac{3-\sqrt{3}}{4}\varphi(2x-2)+\frac{1-\sqrt{3}}{4}\varphi(2x-3)$$

相应的小波方程可以写成

$$\psi(x)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\varphi(2x-1)-\frac{3+\sqrt{3}}{4}\varphi(2x)+\frac{3-\sqrt{3}}{4}\varphi(2x+1)-\frac{1-\sqrt{3}}{4}\varphi(2x+2)$$

这样得到尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波函数 $\psi(x)$ 都是紧支撑的. 它们称为 2 号规范正交的 Daubechies 尺度函数和 Daubechies 小波函数.

例 2　紧支撑尺度函数和紧支撑小波函数计算实例. 选定 $N=3$, $R(y)=0$, 这时，构造格式具有如下形式：

$$P_3(y)=\sum_{j=0}^{2}\mathrm{C}_{2+j}^{j}y^j=1+3y+6y^2$$

假设 $Q_3(z)=a_0+a_1z+a_2z^2$，则

$$\begin{aligned}&|Q_3(e^{-i\omega})|=Q_3(e^{-i\omega})Q_3(e^{i\omega})\\=&(a_0+a_1+a_2)^2-4(a_0a_1+a_1a_2+a_2a_0)\sin^2 0.5\omega\\&+16a_0a_2\sin^4 0.5\omega\\=&P_3(\sin^2 0.5\omega)\\=&1+3\sin^2 0.5\omega+6\sin^4 0.5\omega\end{aligned}$$

得方程组

$$\begin{cases}(a_0+a_1+a_2)^2=1\\-4(a_0a_1+a_1a_2+a_2a_0)=3\\16a_0a_2=6\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{4}\left[1+\sqrt{10}+\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right]\\a_1=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{10})\\a_2=\dfrac{1}{4}\left[1+\sqrt{10}-\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right]\end{cases}$$

根据系数有限共轭滤波器的构造格式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(\omega)&=\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^3Q_3(e^{-i\omega})\\&=\frac{1}{8}(1+3e^{-i\omega}+3e^{-2i\omega}+e^{-3i\omega})(a_0+a_1e^{-i\omega}+a_2e^{-2i\omega})\\&=\frac{1}{8}[a_0+(3a_0+a_1)e^{-i\omega}+(3a_0+3a_1+a_2)e^{-2i\omega}]\\&\quad+\frac{1}{8}[(a_0+3a_1+3a_2)e^{-3i\omega}+(a_1+3a_2)e^{-4i\omega}+a_2e^{-5i\omega}]\end{aligned}$$

再由低通滤波器的定义格式

$$\mathrm{H}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_ne^{-i\omega n}$$

得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}h_0=\dfrac{1}{8}a_0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}h_2=\dfrac{1}{8}(3a_0+3a_1+a_2),\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}h_4=\dfrac{1}{8}(a_1+3a_2),\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}h_1=\dfrac{1}{8}(3a_0+a_1)\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}h_3=\dfrac{1}{8}(a_0+3a_1+3a_2)\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}h_5=\dfrac{1}{8}a_2\end{cases}$$

这个方程组的解是

$$h_0=\frac{1+\sqrt{10}+\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}},\qquad h_3=\frac{10-2\sqrt{10}-2\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}$$

$$h_1=\frac{5+\sqrt{10}+3\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}},\qquad h_4=\frac{5+\sqrt{10}-3\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}$$

$$h_2=\frac{10-2\sqrt{10}+2\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}},\quad h_5=\frac{1+\sqrt{10}-\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}$$

这时，相应的尺度方程详细写成

$$\begin{aligned}\varphi(x)=&\sqrt{2}[h_0\varphi(2x)+h_1\varphi(2x-1)+h_2\varphi(2x-2)]\\&+\sqrt{2}[h_3\varphi(2x-3)+h_4\varphi(2x-4)+h_5\varphi(2x-5)]\end{aligned}$$

小波方程是

$$\begin{aligned}\psi(x)=&\sqrt{2}[h_0\varphi(2x-1)-h_1\varphi(2x)+h_2\varphi(2x+1)]\\&+\sqrt{2}[-h_3\varphi(2x+2)+h_4\varphi(2x+3)-h_5\varphi(2x+4)]\end{aligned}$$

这样得到的尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波函数 $\psi(x)$ 都是紧支撑的. 它们被称为 3 号规范正交的 Daubechies 尺度函数和 Daubechies 小波函数.

(κ) Daubechies 小波的多样性

利用有限共轭滤波器的多样性理论，可以建立 Daubechies 小波多样性构造方法.

Daubechies 小波多样性构造格式：对于 $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{cases}P_n(y)=\sum\limits_{j=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1+j}^{j}y^j\\ S_n(y)=P_n(y)+y^n s(y)\geqslant 0,\ y\in[0,1]\\ y^n S_n(1-y)+(1-y)^n S_n(y)=1\\ \sup\limits_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi}|Q(e^{-i\omega})|^2=\sup\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}|S_n(y)|<2^{2(n-1)}\end{cases}$$

其中实系数多项式 $s(y)$ 还必须满足恒等式

$$s(1-y)+s(y)\equiv 0,\quad y\in[0,1]$$

而且具有如下的表达格式：u 和 v 是非负整数，

$$s(y)=(y-0.5)^{2u+1}\sum_{m=0}^{v}c_m(y-0.5)^{2m}$$

其中 $(c_0,c_1,\cdots,c_v)\in\mathbb{R}^{v+1}$ 是多项式系数.

综合上述讨论得到 Daubechies 小波多样性的构造方法是：$\forall u,v\in\mathbb{N}$，选择实数向量 $(c_0,c_1,\cdots,c_v)\in\mathbb{R}^{v+1}$，满足如下构造要求：

$$\begin{cases}s(y)=(y-0.5)^{2u+1}\sum\limits_{m=0}^{v}c_m(y-0.5)^{2m}\\ S_n(y)=P_n(y)+y^n s(y)\geqslant 0,\quad y\in[0,1]\\ y^nS_n(1-y)+(1-y)^nS_n(y)=1\\ \sup\limits_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi}|Q(e^{-i\omega})|^2=\sup\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}|S_n(y)|<2^{2(n-1)}\end{cases}$$

接下来按照前述要求的格式构造实系数 $b_0,b_1,\cdots,b_{[n+(2u+1)+2v]}$ 的多项式

$$Q_n(z)=\sum_{m=0}^{[n+(2u+1)+2v]}b_mz^m,\quad z=\exp(-i\omega)$$

满足如下多项式方程：

$$|Q_n(\exp(-i\omega))|^2=S_n(\sin^2 0.5\omega)$$

其中 $S_n(y)$ 的表达形式是

$$S_n(y)=\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1+j}^{j}y^j+y^ns(y)\quad(s(y)\neq 0)$$

在这样的构造格式下，可以进一步得到有 $2(n+u+v)+2$ 个脉冲响应系数的共轭滤波器频率响应函数：

$$\mathbb{H}(\omega)=\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^nQ_n(e^{-i\omega})=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0}^{2(n+u+v)+1}h_me^{-i\omega m}$$

详细计算上述乘积关系可得

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_n(\omega)&=\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^nQ_n(e^{-i\omega})\\&=2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^ke^{-ik\omega}\sum_{m=0}^{[n+2(u+v)+1]}b_me^{-im\omega}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{[n+2(u+v)+1]} \mathrm{C}_n^k b_m e^{-ik\omega}e^{-im\omega} \\
&= 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{[n+2(u+v)+1]} \mathrm{C}_n^k b_m e^{-i(k+m)\omega} \\
&= 2^{-n}\sum_{\ell=0}^{2(n+u+v)+1}\left[\sum_{k=0}^{\min(\ell,n)} \mathrm{C}_n^k b_{\ell-k}\right]e^{-i\ell\omega} \\
&= 2^{-n}\sum_{\ell=0}^{2(n+u+v)+1} h_\ell e^{-i\ell\omega}
\end{aligned}
$$

其中脉冲响应系数序列可以表达为

$$
h_\ell = 0.5^{n-0.5}\sum_{k=0}^{\min(\ell,n)} \mathrm{C}_n^k b_{\ell-k},\quad \ell = 0,1,\cdots,2(n+u+v)+1
$$

相应地, Daubechies 尺度函数的多样性形式可以表示为

$$
\varphi^{(n)}(x) = 0.5^{n-1}\sum_{m=0}^{2(n+u+v)+1}\left[\sum_{k=0}^{\min(m,n)} \mathrm{C}_n^k b_{m-k}\right]\varphi^{(n)}(2x-m)
$$

或者在频域等价地表示为

$$
\Phi^{(n)}(\omega) = \mathbb{H}_n\left(0.5\omega\right)\Phi^{(n)}\left(0.5\omega\right)
$$

同时, Daubechies 小波函数的多样性体现为：κ 是一个任意的整数,

$$
\Psi^{(n)}(\omega) = \overline{\mathbb{H}}_n(0.5\omega+\pi)\Phi^{(n)}(0.5\omega)e^{-i\omega(0.5+\kappa)}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
\psi^{(n)}(x) &= \sqrt{2}\sum_{m=0}^{2(n+u+v)+1} \tilde{g}_m\varphi^{(n)}(2x-m) \\
\tilde{g}_m &= (-1)^m\overline{h}_{1-m} = 0.5^{n-0.5}(-1)^m\sum_{k=0}^{\min(m,n)} \mathrm{C}_n^k b_{m-k} \\
m &= 0,1,\cdots,[2(n+u+v)+1]
\end{aligned}
$$

或者经过平移之后表示为

$$
\begin{aligned}
\psi^{(n)}(x) &= \sqrt{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^{2\kappa+1-k}\overline{h}_{2\kappa+1-k}\varphi^{(n)}(2x-k) \\
&= \sqrt{2}\sum_{k=2\kappa-2(n+u+v)}^{2\kappa+1}(-1)^{2\kappa+1-k}\overline{h}_{2\kappa+1-k}\varphi^{(n)}(2x-k) \\
&= \sqrt{2}\sum_{m=0}^{2(n+u+v)+1}(-1)^m\overline{h}_m\varphi^{(n)}(2x-(2\kappa+1-m)) \\
&= \sqrt{2}\sum_{m=0}^{2(n+u+v)+1}\tilde{g}_m\varphi^{(n)}(2x-(2\kappa+1-m))
\end{aligned}
$$

其中带通滤波器脉冲响应系数序列可以表达为

$$\begin{aligned}\tilde{g}_m &= (-1)^m \bar{h}_{2\kappa+1-m} \\ &= 0.5^{n-0.5}(-1)^m \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \mathrm{C}_n^k b_{m-k} \\ m &= 0,1,\cdots,[2(n+u+v)+1]\end{aligned}$$

上述讨论具体说明了 Daubechies 小波函数多样性的表现形式和构造实现的典型格式，接下来通过实例计算进行进一步说明.

例 1 Daubechies 2 号小波多样性计算实例，此时 $n=2$. Daubechies 小波多样性构造的格式和要求是：对于 $\forall u,v\in\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} S_2(y) = 1 + 2y + y^2 s(y) \geqslant 0, \quad y \in [0,1] \\ s(y) = (y-0.5)^{2u+1} \sum\limits_{m=0}^{v} c_m (y-0.5)^{2m} \\ \sup\limits_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi} |Q_2(e^{-i\omega})|^2 = \sup\limits_{0\leqslant y\leqslant 1} |S_2(y)| < 4 \end{cases}$$

而且

$$\begin{cases} Q_2(z) = \sum\limits_{m=0}^{[2+(2u+1)+2v]} a_m z^m, \ z = \exp(-i\omega) \\ |Q_2(z)|^2 = |Q_2(e^{-i\omega})|^2 = S_2(\sin^2 0.5\omega) \\ S_2(y) = 1 + 2y + y^2 s(y) \\ s(y) = (y-0.5)^{2u+1} \sum\limits_{m=0}^{v} c_m (y-0.5)^{2m} \end{cases}$$

为了进一步计算比较简便，选择 $u=v=0$ ，于是得到

$$\begin{cases} |Q_2(z)|^2 = |Q_2(e^{-i\omega})|^2 = S_2(\sin^2 0.5\omega) \\ Q_2(z) = \sum\limits_{m=0}^{3} a_m z^m, \ z = \exp(-i\omega) \\ S_2(y) = 1 + 2y + y^2(y-0.5) = 1 + 2y - 0.5y^2 + y^3 \end{cases}$$

容易验证如下条件要求是成立的：

$$\sup_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi} |Q_2(e^{-i\omega})|^2 = \sup_{0\leqslant y\leqslant 1} |S_2(y)| < 4$$

可以得到如下演算结果：对于 $z = e^{-i\omega}$，

$$
\begin{aligned}
&|Q_2(z)|^2 = |Q_2(e^{-i\omega})|^2 = [Q_2(e^{-i\omega})][Q_2(e^{-i\omega})]^* \\
&= (a_0 + a_1 e^{-i\omega} + a_2 e^{-2i\omega} + a_3 e^{-3i\omega}) \\
&\quad \times (a_0 + a_1 e^{i\omega} + a_2 e^{2i\omega} + a_3 e^{3i\omega}) \\
&= (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2(a_0 a_2 + a_1 a_3)\cos 2\omega \\
&\quad + 2(a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3)\cos\omega + 2a_0 a_3 \cos 3\omega \\
&= (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \\
&\quad + 2(a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3)(1 - \sin^2 0.5\omega) \\
&\quad + 2(a_0 a_2 + a_1 a_3)(1 - 8\sin^2 0.5\omega + 8\sin^4 0.5\omega) \\
&\quad + 2a_0 a_3(1 - 18\sin^2 0.5\omega + 48\sin^4 0.5\omega - 32\sin^6 0.5\omega)
\end{aligned}
$$

为了表达的简洁便利，引入符号 $\zeta = \sin^2 0.5\omega$，那么得到

$$
\begin{aligned}
|Q_2(z)|^2 = {} & (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)^2 \\
& - [4(a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3) + 16(a_0 a_2 + a_1 a_3) + 36a_0 a_3]\zeta \\
& + (16a_0 a_2 + 16a_1 a_3 + 96a_0 a_3)\zeta^2 - 64a_0 a_3 \zeta^3.
\end{aligned}
$$

这时，需要求解的多项式方程具体表示为

$$
|Q_2(e^{-i\omega})|^2 = S_2(\zeta), \quad S_2(\zeta) = 1 + 2\zeta - 0.5\zeta^2 + \zeta^3
$$

或者写成多项式方程

$$
\begin{aligned}
1 + 2\zeta - 0.5\zeta^2 + \zeta^3 = {} & (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)^2 \\
& - [4(a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3) + 16(a_0 a_2 + a_1 a_3) + 36a_0 a_3]\zeta \\
& + (16a_0 a_2 + 16a_1 a_3 + 96a_0 a_3)\zeta^2 \\
& - 64a_0 a_3 \zeta^3
\end{aligned}
$$

最终得到如下方程组：

$$
\begin{cases}
1 = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)^2 \\
2 = -[4(a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3) + 16(a_0 a_2 + a_1 a_3) + 36a_0 a_3] \\
0.5 = -(16a_0 a_2 + 16a_1 a_3 + 96a_0 a_3) \\
1 = -64a_0 a_3
\end{cases}
$$

为了求解这个方程组，首先等价转换为

$$\begin{cases} 1 = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)^2 \\ 3.5 = (a_0 - a_1 + a_2 - a_3)^2 \\ 1 = 16(a_0 a_2 + a_1 a_3) \\ 1 = -64 a_0 a_3 \end{cases}$$

其次，令 $x = 4a_0$，进一步将上式简化为

$$\begin{cases} 4a_2 = 2 + \sqrt{14} - 4a_0 \\ 4a_1 = 2 - \sqrt{14} - 4a_3 \\ a_3 = -\dfrac{1}{64a_0} \\ x^4 - (2+\sqrt{14})x^3 + x^2 + \dfrac{1}{4}(2-\sqrt{14})x + \dfrac{1}{16} = 0 \end{cases}$$

定义实系数多项式 $p(x)$：

$$p(x) = x^4 - (2+\sqrt{14})x^3 + x^2 + \frac{1}{4}(2-\sqrt{14})x + \frac{1}{16}$$
$$p(0)p(1) < 0 \Rightarrow \exists \xi \in (0,1), 使得 p(\xi) = 0$$

那么，因为 $p(0)p(1) < 0$，所以，$\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $p(\xi) = 0$. 这样得到前述方程组的一组解为

$$\begin{cases} a_0 = 0.25\xi, \quad a_1 = 0.25\left(2 - \sqrt{14} + \dfrac{1}{4\xi}\right) \\ a_3 = -\dfrac{1}{16\xi}, \quad a_2 = 0.25(2 + \sqrt{14} - \xi) \end{cases}$$

利用牛顿迭代求根方法，得到一个近似解 $\xi = 0.1516$，这样前述方程组存在如下的一组近似解：

$$\begin{cases} a_0 = 0.0379, \quad a_1 = -0.0231 \\ a_2 = 1.3975, \quad a_3 = -0.4123 \end{cases}$$

由此得到如下形式的共轭低通滤波器的频率响应函数：

$$\mathbb{H}(\omega) = [0.5(1 + e^{-i\omega})]^2 Q_2(e^{-i\omega})$$

满足

$$\begin{aligned} 4\mathbb{H}(\omega) &= (1 + e^{-i\omega})^2 Q_2(e^{-i\omega}) \\ &= (1 + 2e^{-i\omega} + e^{-2i\omega})(a_0 + a_1 e^{-i\omega} + a_2 e^{-2i\omega} + a_3 e^{-3i\omega}) \\ &= a_0 + (2a_0 + a_1)e^{-i\omega} + (a_0 + 2a_1 + a_2)e^{-2i\omega} \\ &\quad + (a_1 + 2a_2 + a_3)e^{-3i\omega} + (a_2 + 2a_3)e^{-4i\omega} + a_3 e^{-5i\omega} \\ &= 2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{5} h_n e^{-i\omega n} \end{aligned}$$

这样，共轭低通滤波器的脉冲响应系数可以表示为

$$2\sqrt{2}h_0 = a_0,\quad 2\sqrt{2}h_1 = 2a_0 + a_1,\quad 2\sqrt{2}h_2 = a_0 + 2a_1 + a_2$$
$$2\sqrt{2}h_5 = a_3,\quad 2\sqrt{2}h_4 = a_2 + 2a_3,\quad 2\sqrt{2}h_3 = a_1 + 2a_2 + a_3$$

或者改写为

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{8}}a_0,\quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}(2a_0 + a_1),\quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{8}}(a_0 + 2a_1 + a_2)$$
$$h_5 = \frac{1}{\sqrt{8}}a_3,\quad h_4 = \frac{1}{\sqrt{8}}(a_2 + 2a_3),\quad h_3 = \frac{1}{\sqrt{8}}(a_1 + 2a_2 + a_3)$$

从而可以写出 Daubechies 2 号尺度函数多样性对应的尺度方程：

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{5} h_k\varphi(2x-k)$$

以及共轭带通滤波器多样性对应的脉冲响应系数：

$$\boxed{\tilde{g}_0 = g_{-4}} = (-1)h_5$$
$$\boxed{\tilde{g}_1 = g_{-3}} = (+1)h_4$$
$$\boxed{\tilde{g}_2 = g_{-2}} = (-1)h_3$$
$$\boxed{\tilde{g}_3 = g_{-1}} = (+1)h_2$$
$$\boxed{\tilde{g}_4 = g_0} = (-1)h_1$$
$$\boxed{\tilde{g}_5 = g_1} = (+1)h_0$$

最后得到 Daubechies 2 号小波函数多样性的一个具体表示：

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k\varphi(2x-k)\\ &= \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-k}\overline{h}_{1-k}\varphi(2x-k)\\ &= \sqrt{2}\sum_{k=0}^{5}\tilde{g}_k\varphi(2x-k)\end{aligned}$$

这样完成了 Daubechies 2 号小波函数多样性的一个计算实例.

前述理论分析和计算实例说明，存在大量的 Daubechies 尺度函数以及对应的 Daubechies 小波函数，这些尺度函数和小波函数都是紧支撑的. 当然，Daubechies 系列小波函数还具有一定的光滑性和正则性以及一定阶数的消失矩等性质，感兴趣的读者可以阅读相应参考文献深化对 Daubechies 系列紧支撑正交小波的了解.

7.2.5　Daubechies 共轭正交小波

在多分辨率分析小波理论和小波包理论框架下，函数、算子、分布以及函数空间可以得到十分简洁优美的表达，为了提高实际应用效果以及数值计算效率，对小

波函数和尺度函数的构造提出了更多的要求，这些近乎苛刻的要求集中体现为对尺度函数和小波函数的正交性、对称性、正则性、光滑性、波动性或者消失矩、线性相位特性等的综合平衡. 比如前述详细讨论过的 Daubechies 系列正交紧支撑小波函数，比较显著的局限直观表现为缺失对称性、光滑性，而且，消失矩的阶数也不够高，小波函数和尺度函数的这些性质在某些研究领域最终制约特定应用的实际效果，比如数字图像数据压缩的压缩比和重建效果，或者数字信号滤波的局部突变特性保持和信噪比等.

这里将利用多分辨率分析的基本思想，结合正交镜像滤波器组、金字塔算法和多分辨率分析理论，重新阐释正交性要求，将规范正交这种十分苛刻的正交性释放为共轭正交性或者双正交性，以换取尺度函数和小波函数具有更好的对称性、正则性和消失矩特性等，显著提升小波构造的灵活性和应用的有效性.

(α) 共轭正交小波基

共轭正交小波是两个小波函数 $\psi(x),\tilde{\psi}(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，要求由它们伸缩平移构造得到的函数系

$$\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k);(j,k)\in\mathbb{Z}^2\}$$

和

$$\{\tilde{\psi}_{j,k}(x)=2^{j/2}\tilde{\psi}(2^j x-k);(j,k)\in\mathbb{Z}^2\}$$

是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的相互共轭正交的两个 Riesz 基：

$$\left\langle\tilde{\psi}_{m,n},\psi_{j,k}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\delta(j-m)\delta(k-n),\quad (j,k,m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

或者，对于 $(j,k,m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}_{m,n}(x)\bar{\psi}_{j,k}(x)dx=\begin{cases}1, & (m,n)=(j,k)\\ 0, & (m,n)\neq(j,k)\end{cases}$$

这样，当 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 时，它可以被展开为如下两种级数：

$$f(x)=\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\alpha_{j,k}\psi_{j,k}(x)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\tilde{\alpha}_{m,n}\tilde{\psi}_{m,n}(x)$$

其中

$$\alpha_{j,k}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)[\tilde{\psi}_{j,k}(x)]^*dx,\quad (j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

而且

$$\tilde{\alpha}_{m,n}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)[\psi_{m,n}(x)]^*dx,\quad (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

(β) 共轭正交滤波器组

对函数 $\psi(x)$ 施加更严格的限制，可以期望 $\tilde{\psi}(x)$ 具有更好的性质. 在下面的讨论过程中，要求函数 $\psi(x)$ 是紧支撑连续函数，在任何连续半整数区间，即形如 $[0.5k, 0.5(k+1)](k \in \mathbb{Z})$ 的区间内是线性的，且 $\psi(x)=\psi(1-x), x \in \mathbb{R}$，即函数 $\psi(x)$ 关于 $x=0.5$ 是对称的. 可以证明，存在这样的函数 ψ，它的共轭小波 $\tilde{\psi}(x)$ 也是紧支撑的，而且 $\tilde{\psi} \in C^r$ (即具有一定阶数的导函数).

从三角形函数 $\varphi(x)=\sup(1-|x|,0)$ 开始. 定义周期函数

$$m_0(\omega)=(\cos 0.5\omega)^2$$

容易验证 $\varphi(x)$ 的傅里叶变换 $\Phi(\omega)$ 满足

$$\Phi(\omega)=m_0(0.5\omega)\Phi(0.5\omega)$$

对于任何自然数 N，定义函数

$$\rho_N(\omega)=c_N\int_{\omega}^{\pi}(\sin x)^{2N+1}dx$$

其中 $c_N>0$ 使 $\rho_N(0)=1$. 按照如下方式定义低通滤波器频率响应函数 $m_0(\omega)$ 的一个“对偶”函数 $\tilde{m}_0(\omega)$，满足公式

$$m_0(\omega)\tilde{m}_0(\omega)=\rho_N(\omega)$$

容易得到

$$m_0(\omega)\tilde{m}_0(\omega)+m_0(\omega+\pi)\tilde{m}_0(\omega+\pi)=1$$

回顾：在 Daubechies 正交小波构造过程中，$m_0(\omega)$ 需要满足 $|m_0(\omega)|^2=\rho_N(\omega)$. 此处放弃了这个严厉的限制，让传递函数 $m_0(\omega)$ 和“对偶”传递函数 $\tilde{m}_0(\omega)$ 可以具有更好的性质而且便于构造.

构造尺度函数 $\varphi(x)$ 的“对偶”尺度函数 $\tilde{\varphi}(x)$，其傅里叶变换 $\tilde{\Phi}(\omega)$ 满足

$$\tilde{\Phi}(\omega)=\prod_{j=1}^{+\infty}\tilde{m}_0(2^{-j}\omega)=\tilde{m}_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\tilde{m}_0\left(\frac{\omega}{4}\right)\tilde{m}_0\left(\frac{\omega}{8}\right)\cdots$$

这样，$\tilde{\varphi}(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 而且满足“双正交的”关系：

$$\int_{\mathbb{R}}\tilde{\varphi}(x-k)\varphi(x-k)dx=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

同时，$\tilde{\varphi}(x)$ 是偶函数，其支集是 $[-2N,2N]$，对足够大的 N，$\tilde{\varphi}(x)\in C^r$，满足：

$\exists C>c>0$，对任意的 $\alpha=(\alpha(m);m\in\mathbb{Z})\in\ell^2(\mathbb{Z})$，下式成立：

$$c\left\|\alpha\right\|_2^2 \leqslant \left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}}\alpha(m)\tilde{\varphi}(x-m)\right\|_2^2 \leqslant C\left\|\alpha\right\|_2^2$$

或者

$$c\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\alpha(m)\right|^2 \leqslant \left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}}\alpha(m)\tilde{\varphi}(x-m)\right\|_2^2 \leqslant C\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\alpha(m)\right|^2$$

(γ) 共轭多分辨率分析

定义函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的两个闭子空间序列：

$$\tilde{V}_0 = \text{Closespan}\{\tilde{\varphi}(x-k);k\in\mathbb{Z}\}$$
$$\tilde{V}_j = \{f(2^j x);f(x)\in\tilde{V}_0\},\quad j\in\mathbb{Z}$$

而且

$$V_0 = \text{Closespan}\{\varphi(x-k);k\in\mathbb{Z}\}$$
$$V_j = \{f(2^j x);f(x)\in V_0\},\quad j\in\mathbb{Z}$$

容易验证，函数系 $\{\tilde{\varphi}(x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{\varphi(x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 分别是子空间 $\tilde{V}_0\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 和子空间 $V_0\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的一个 Riesz 基，而且，$\{\tilde{V}_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{V_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 这两个闭子空间序列满足多分辨率分析对尺度子空间序列的要求. 这样，把 $(\{\tilde{V}_j;j\in\mathbb{Z}\},\tilde{\varphi}(x))$ 和 $(\{V_j;j\in\mathbb{Z}\},\varphi(x))$ 称为 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的相互共轭的多分辨率分析组.

定义函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的两个闭子空间序列：对于 $j\in\mathbb{Z}$,

$$W_j = \left\{f(x);f(x)\in V_{j+1},f(x)\perp\tilde{V}_j:\forall\tilde{v}(x)\in\tilde{V}_j,\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)[\tilde{v}(x)]^*dx=0\right\}$$
$$\tilde{W}_j = \left\{\tilde{f}(x);\tilde{f}(x)\in\tilde{V}_{j+1},\tilde{f}(x)\perp V_j:\forall v(x)\in V_j,\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(x)[v(x)]^*dx=0\right\}$$

那么，容易验证

$$f(x)\in W_j\Leftrightarrow f(2x)\in W_{j+1},\quad j\in\mathbb{Z}$$
$$\tilde{f}(x)\in\tilde{W}_j\Leftrightarrow\tilde{f}(2x)\in\tilde{W}_{j+1},\quad j\in\mathbb{Z}$$

这样，只需要构造函数 $\psi(x)$ 和 $\tilde{\psi}(x)$，使得 $\{\psi(x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{\tilde{\psi}(x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 分别构成子空间 $W_0,\tilde{W}_0$ 的 Riesz 基，那么，对于任意的整数 $j\in\mathbb{Z}$，函数系

$$\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k);k\in\mathbb{Z}\}$$

和

$$\{\tilde{\psi}_{j,k}(x) = 2^{j/2}\tilde{\psi}(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$$

就分别构成子空间 $W_j, \tilde{W}_j$ 的 Riesz 基，从而，两个伸缩平移函数系

$$\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k); (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$$

和

$$\{\tilde{\psi}_{j,k}(x) = 2^{j/2}\tilde{\psi}(2^j x - k); (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$$

必定构成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的相互共轭正交的两个 Riesz 基，即函数 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 是双正交或共轭正交小波.

(δ) Daubechies 共轭正交小波构造

利用前述的传递函数 $m_0(\omega)$ 和“对偶”传递函数 $\tilde{m}_0(\omega)$，构造对偶小波滤波器的相互对偶的传递函数 $m_1(\omega)$ 和 $\tilde{m}_1(\omega)$：

$$m_1(\omega) = e^{-i\omega}\tilde{m}_0(\omega + \pi), \quad \tilde{m}_1(\omega) = e^{-i\omega}m_0(\omega + \pi)$$

定义函数 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 的傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 和 $\tilde{\Psi}(\omega)$ 为频域乘积形式：

$$\Psi(\omega) = m_1(0.5\omega)\Phi(0.5\omega), \quad \tilde{\Psi}(\omega) = \tilde{m}_1(0.5\omega)\tilde{\Phi}(0.5\omega)$$

可以证明，这样得到的对偶小波函数 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 满足此前罗列的全部要求，而且，它们在半整数点上的函数值 $\psi(0.5k), \tilde{\psi}(0.5k), k \in \mathbb{Z}$ 都是有理数. 其中这两个小波函数具有的对称性对于滤波器设计是非常重要的，而这正是 Daubechies 正交小波所缺少的.

7.2.6　马尔瓦尔-威尔逊小波与最优描述

多分辨率分析和共轭多分辨率分析组理论体现一种近乎完美的结构主义理论，但是这里将要研究的马尔瓦尔-威尔逊系列小波的几种典型形式，突破了这种结构统一的限制，具有正交小波分析的优势，同时保持了与传统傅里叶变换分析和加窗傅里叶变换分析具有一种十分自然的继承关系. 可以形象地把马尔瓦尔-威尔逊系列小波分析理论理解为时间域变分辨率而频域恒分辨率的时频联合分析理论.

这种特殊正交小波即马尔瓦尔-威尔逊小波能够用于研究数字信号的最优描述问题. 事实上，通过马尔瓦尔-威尔逊小波规范正交基的调整可以给出信号在不同基下描述结果之间的依赖关系，从而获得一种学习算法，在预先选定的最优化准则条件下，最终可以得到有限时间数字信号的最优描述. 最后示范性给出一个例子，说明利用马尔瓦尔-威尔逊小波规范正交基通过学习算法的优化可以快速获得数字信号的最优描述，这预示着马尔瓦尔-威尔逊小波规范正交基在计算机视觉和数字

信号最优描述等问题的研究中具有广泛的应用前景.

(α) 信号的描述和最优描述

关于信号的描述和最优描述问题, 计算机视觉专家大卫·马尔(Marr)在他的名著《视觉计算理论》中阐述了如下的看法, 即信号的描述来自一个形式体系, 这个形式体系对信号的记录结果就是该信号的一个描述, 这样的形式体系被称为“表达方法”, 它能够对明确的实体构造出相应信号的描述, 并且给出实现前述构造的原则. 例如, 阿拉伯的、罗马的和二进制的数字系统都是数字的“表达方法”, 以阿拉伯表达方法为例进行说明, 它由 $\{0,1,2,\cdots,9\}$ 中抽出的符号串组成, 并且构造一个特定自然数 n 的描述的原则是, 把 n 分解成 10 的整数幂的不超过 9 的整倍数之和. 可以肯定通过使用这些特定符号所构造的客观现实的描述, 能够获得客观现实的“某些特别的”信息, 比如, 就前例来说, 如果选中了阿拉伯数字表达方法, 那么, 极易发现某数是否为 10 的幂, 但很不容易发现它是不是 2 的幂, 但如果选中了二进制表达方法, 则结果正好相反. 所以, 任何特定表达方法都会使某些信息更明了, 而其代价是更深层次地隐藏另一些信息, 甚至于损失掉这些信息. 这之所以是一个及其重要的科学问题, 其根本原因在于, 信息的表达方法在很大的程度上决定了能否方便地完成某种特定的科学研究任务. 从前例就可以清楚地看出这一点. 这样, 大卫·马尔清楚、巧妙地表达了他关于信号描述和最优描述的观点.

可以把信号或者函数的描述和最优描述问题抽象成信号在不同“基”下的“展开”和“最优展开”这样一个数学问题, 讨论范围限制在某一个函数空间上. 于是, 函数空间的基或者规范正交基的选择以及这些基之间的转换就成了必须面对的第一个问题, 紧接的第二个问题是, 当函数空间的基变化时, 同一个信号或者函数的描述即在相应基下的“展开”如何相互依赖(常常希望这种依赖关系在大多数场合能转化为递推的离散数值算法), 第三个问题是, “最优展开”的标准是什么? 或者说“最优基”的准则是什么? 当然, 可以肯定这样的“准则”将会因信号或者函数或图像处理的目的不同而相应变化, 一些常用的准则有“最小二乘法”“最小平方和估计”“极大似然法”“最小熵准则”等. 在介绍搜索最优马尔瓦尔-威尔逊小波规范正交基时, 这里将采用“最小熵准则”, 这时函数空间是能量有限信号或者平方可积函数全体即 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, 即

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})=\left\{f(x);\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx<+\infty\right\}$$

由于函数空间基的种类很多而且构造往往比较复杂, 同时当函数空间的基变化时这些基之间的关系也比较复杂, 所以不便于数值计算和分析处理. 当然, 如果要求函数空间的基是规范正交基, 那么, 这时信号在不同规范正交基下的展开即描

述之间的关系在理论上显得非常简单, 对于离散时间数字信号来说就是正交变换, 对于连续信号来说就是酉变换或者自共轭变换, 它相应的变换算子是酉算子或者自共轭算子, 但是, 这样的规范正交基比一般的基更难构造, 而且, 正交变换和酉算子也难于具体表示出来和进行数值计算. 所幸的是, 得到迅速发展并已经相当完善的小波理论特别是正交小波和正交小波包理论, 为这样的需要提供了一系列构造函数空间规范正交小波基、小波包基、金字塔基和马尔瓦尔-威尔逊小波规范正交基的方法, 特别是它极其简单的代数结构, 不仅保证这种规范正交基便于构造, 而且, 也为设计离散时间信号的数值计算的递推算法提供了方便. 因此, 在后续的研究中一般都使用函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的小波基, 同时, 因为使用小波基, 前述的第二个问题也得以自然解决. 相应的研究可以参考 Wilson(1980), Wilson 和 Bergen(1979), Wilson 和 Giese(1977)的成果.

现在来选择算法, 或者是马尔瓦尔-威尔逊小波算法, 或者是小波包算法. 在第一种选择中, 信号首先被最适当地按时间进行分段, 然后, 在各分段信号上再使用经典的傅里叶分析法展开分析. 第二种选择, 即小波包分析, 是颠倒前述的处理顺序, 先对信号按"频带"进行滤波, 之后再对各"频带"相应的"子空间"按时域方式进行"正交直和分解", 通过这种重复处理力求达到把小波分析越来越宽的"频带"分割得更精细, 从而提高频域分辨率的目的, 但算法所强调的形式上仍然是按时间变量进行分析的. 实际上, 早在 1946 年和 1947 年, 为了信号处理的需要, Gabor 和 Ville 就曾经提出过两种不同的信号分析方法, 他们认为或者先用一个开关把信号按时间分割成小段, 之后对这些不同的信号段再在频域上用滤波系统分析它们, 或者先对信号按不同的频带进行滤波, 然后, 把这些"频带"按时间进行"再分割"而研究它们的能量变化. 事实上, 第一种想法最终导致"马尔瓦尔-威尔逊小波分析方法", 而第二种想法推动产生了"小波包分析方法", 它们分别对应于频率或时间的"再分割". 这里的研究采用第一种方案.

(β) 等距平移定窗威尔逊小波

通过对窗口傅里叶变换的研究, 威尔逊(Wilson, 1971a, 1971b, 1971c, 1974, 1975, 1979, 1983)发现了现在以他的名字命名的威尔逊小波. 为了清楚起见, 回顾并重新刻画窗口傅里叶变换. 设窗函数 $g(x)$ 能够将时间信号 $f(x)$ 分割成"小信号段"

$$g(x-bm)f(x), \quad m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

参数 $b>0$ 是这些"段"的长度. 在时间域来看, 这种段是很规则的空间. 之后, 根据 Gabor 和 Ville 的方法, 在各段上分别进行傅里叶分析. 这样, 因为各段内的变化都不很大, 所以就减少了必须计算的变换系数

$$\int_{\mathbb{R}} g(x-bm)f(x)\exp(-iakx)dx$$

这里 $a>0$ 与 b 是有联系的，且 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 这些变换系数就是信号或者函数 $f(x)$ 与“Gabor 小波”：

$$g_{m,k}(x)=g(x-bm)\exp(iakx)$$

的内积. 这种分析方法最早是 Gabor 于 1946 年提出来的，当时他选取的窗函数 $g(x)$ 是高斯函数. 这种“Gabor 小波”存在极其困难的算法障碍，而且，更为严重的是，Balian(1981)已经证明，如果 $g(x)$ 是足够光滑的，而且具有良好的局部化性质，那么，形如 $\{g_{m,k}(x)=g(x-bm)\exp(iakx);(m,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 的函数系不可能构造成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基. 甚至于即使将前述条件修改为要求积分

$$\int_{\mathbb{R}}(1+x^2)\mid g(x)\mid^2 dx \quad 和 \quad \int_{\mathbb{R}}(1+\omega^2)\mid G(\omega)\mid^2 d\omega$$

同时有限，这个意外的结论仍然成立，其中 $G(\omega)$ 是窗函数 $g(x)$ 的傅里叶变换. 但如果选择如下窗函数 $g(x)$：

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,2\pi)\\ 0, & x\notin[0,2\pi)\end{cases}$$

那么，Gabor 小波的困难就消失了. 这时只需要选择 $a=1$ 且 $b=2\pi$，窗口傅里叶分析相当于先将信号在时间域按形如 $\left[2m\pi\ ,\ 2(m+1)\pi\right]$ 的区间将信号分段，之后再把傅里叶级数用于分析每个相应时间段上的信号或者函数. 这时，实际上是在每个形如 $[2m\pi,\ 2(m+1)\pi]$ 的区间上用周期函数代替原始信号进行傅里叶级数分析，三角函数基是函数空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 的规范正交基. 但是，这种自然分割方法产生的函数以 2π 为周期但不是连续信号，它们在 2π 的整倍数点上不连续，而傅里叶分析必将会把这解释为原始信号本身存在的不连续性或畸变. 但这显然是分段方法带来的不连续性或畸变.

在这样两难的背景下，威尔逊小波、马尔瓦尔小波以及马尔瓦尔-威尔逊小波就自然而然产生了. 这里先研究等距平移定窗威尔逊小波.

基本想法是继承 Gabor 小波分析方法的思路，构造函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的 2π 整数倍平移且窗形固定的规范正交基，得到等距平移定窗威尔逊规范正交小波基. 在威尔逊正交小波基构造过程中，要求窗函数 $\mathbb{W}(x)$ 及其傅里叶变换 $(\mathcal{F}\mathbb{W})(\xi)$ 都是快速指数衰减的单位能量函数或分布，实际构造的分析小波体现为，将窗函数 $\mathbb{W}(x)$ 的 2π 整数倍平移分为 2π 的偶数倍平移族和 2π 的奇数倍平移族. 在窗函数 $\mathbb{W}(x)$ 的 2π 偶数倍平移族时间“窗口内”，采用余弦基实现信号分析；而在窗函数 $\mathbb{W}(x)$ 的 2π 奇数倍平移族时间“窗口内”，则采用正弦基实现信号分析.

沿着这样的途径构造获得的第一个规范正交小波基就是威尔逊正交小波函数

系，使用记号 $\{\mathbb{W}_{0,2\ell}(x), \mathbb{W}_{k,\ell}(x); \ell \in \mathbb{Z}, k = 1,2,\cdots\}$ 表示威尔逊正交小波函数系，可以具体表示如下：

$$\begin{cases} \mathbb{W}_{k,\ell}(x) = \mathbb{W}(x - 2\ell\pi)\sqrt{2}\cos(0.5kx), & \ell \in 2\mathbb{Z}, k = 1,2,\cdots \\ \mathbb{W}_{0,\ell}(x) = \mathbb{W}(x - 2\ell\pi), & \ell \in 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{W}_{k,\ell}(x) = \mathbb{W}(x - 2\ell\pi)\sqrt{2}\sin(0.5kx), & \ell \in 2\mathbb{Z}+1, k = 1,2,\cdots \end{cases}$$

可以证明，威尔逊正交小波函数系 $\{\mathbb{W}_{0,2\ell}(x), \mathbb{W}_{k,\ell}(x); \ell \in \mathbb{Z}, k = 1,2,\cdots\}$ 构成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基.

注释：因为要求窗函数 $\mathbb{W}(x)$ 及其傅里叶变换 $(\mathcal{F}\mathbb{W})(\xi)$ 都是指数衰减的，所以，这两者不可能同时是紧支撑的！

注释：因为窗函数 $\mathbb{W}(x)$ 及其傅里叶变换 $(\mathcal{F}\mathbb{W})(\xi)$ 都是指数衰减的，所以，在时间域用窗函数 $\mathbb{W}(x)$ "截取"信号或者函数 $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 并对截取得到的信号或者函数"片段" $\mathbb{W}(x-2\ell\pi)f(x)$ 进行"三角函数类基"分析时，本质上相当于在频域用频率窗函数 $(\mathcal{F}\mathbb{W})(\xi)$ 对信号或者函数 $f(x)$ 的傅里叶谱 $(\mathcal{F}f)(\xi)$ 进行卷积滤波，而频率窗函数 $(\mathcal{F}\mathbb{W})(\xi)$ 的指数衰减特性决定了这种滤波行为本质上只保留了信号傅里叶谱 $(\mathcal{F}f)(\xi)$ 的频率分布在频率窗函数 $(\mathcal{F}\mathbb{W})(\xi)$ 的主要频带内的频率成分.

利用平方可和序列(矩阵)符号 $\{\mathfrak{W}_{0,2\ell}, \mathfrak{W}_{k,\ell}; \ell \in \mathbb{Z}, k = 1,2,\cdots\}$ 表示信号或者函数 $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的威尔逊正交小波变换：

$$\begin{cases} \mathfrak{W}_{k,\ell} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{\mathbb{W}}_{k,\ell}(x)dx, & \ell \in \mathbb{Z}, k = 1,2,\cdots \\ \mathfrak{W}_{0,\ell} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{\mathbb{W}}_{0,\ell}(x)dx, & \ell \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

或者详细表示为

$$\begin{cases} \mathfrak{W}_{k,\ell} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathbb{W}(x-2\ell\pi)\sqrt{2}\cos(0.5kx)dx, & \ell \in 2\mathbb{Z}, k = 1,2,\cdots \\ \mathfrak{W}_{0,\ell} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathbb{W}(x-2\ell\pi)dx, & \ell \in 2\mathbb{Z} \\ \mathfrak{W}_{k,\ell} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathbb{W}(x-2\ell\pi)\sqrt{2}\sin(0.5kx)dx, & \ell \in 2\mathbb{Z}+1, k = 1,2,\cdots \end{cases}$$

信号或者函数的这种威尔逊正交小波变换定义，最直接表达了先用窗函数及其 2π 整数倍平移族将信号或者函数分割成"信号或者函数片段"，再使用形式为

$$\{\sqrt{2}\cos(0.5kx), k = 1,2,\cdots\} \quad 和 \quad \{\sqrt{2}\sin(0.5kx), k = 1,2,\cdots\}$$

的"三角函数类基"在"2π 奇数倍平移段"和"2π 偶数倍平移段"分别进行"谱分析". 因为威尔逊正交小波函数系 $\{\mathbb{W}_{0,2\ell}(x), \mathbb{W}_{k,\ell}(x); \ell \in \mathbb{Z}, k = 1,2,\cdots\}$ 构成平方可

积函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基, 所以, 对于任意的函数或信号 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, 它可以利用其威尔逊正交小波变换实现完全重建:

$$f(x)=\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\mathfrak{W}_{0,2\ell}\mathbb{W}_{0,2\ell}(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\mathfrak{W}_{k,\ell}\mathbb{W}_{k,\ell}(x)$$

这形式上说明, 前述“分段-谱分析”本质上是一种“完全的谱分析”, 不存在任何频率成分的泄露和遗失.

函数或信号 $f(x)$ 的威尔逊正交小波变换在时间域体现由窗函数 $\mathbb{W}(x)$ 的宽度限定的时间分辨距离, 而在频率域显示为“类似于周期函数傅里叶级数分析”的离散频率分辨能力, 而按照窗函数奇偶平移分别使用

$$\{\sqrt{2}\cos(0.5kx);k=1,2,\cdots\}\quad 和 \quad\{\sqrt{2}\sin(0.5kx);k=1,2,\cdots\}$$

作为规范正交分析基函数系. 因此, 与多分辨率分析方法相比较, 威尔逊正交小波分析丧失了灵活的时间分辨能力, 但换取了频域离散频率的分辨能力, 同时, 保持了正交分析方法简单快捷的优势. 另外, 与此前的 Gabor 小波相比, 威尔逊正交小波提供了函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的离散的可数规范正交基, 而且, 本质上威尔逊正交小波分析实现了函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 全部信号或者函数的“完全的谱分析”, 同时具有“加窗分析”的时间域定位能力.

在威尔逊正交小波构造理论中, 窗函数 $\mathbb{W}(x)$ 及其傅里叶变换 $(\mathcal{F}\mathbb{W})(\xi)$ 都是指数衰减的,比如在数字图像处理中, 其应用受到一定限制.

(γ) 等距平移定窗马尔瓦尔小波

为了消除折叠正交变换图像编码块效应以及快速调制折叠变换计算的需要, 在不知道前人研究成果的条件下, 马尔瓦尔构造了算法格式与威尔逊正交小波基完全相同的函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基(一种加窗三角函数基), 即马尔瓦尔正交小波基. 在马尔瓦尔正交小波基构造过程中, 其窗函数系 $\{\mathbb{M}(x-2\ell\pi);\ell\in\mathbb{Z}\}$ 是由一个固定的非负正则(比如光滑的)实函数 $\mathbb{M}(x)$, 即马尔瓦尔窗函数经过 2π 整数倍平移产生的, 马尔瓦尔窗函数 $\mathbb{M}(x)$ 的构造要求是

$$\begin{cases} 0\leqslant\mathbb{M}(x)\leqslant 1, & -\infty<x<+\infty\\ \mathbb{M}(2\pi-x)=\mathbb{M}(x), & -\infty<x<+\infty\\ 0=\mathbb{M}(x), & -\infty<x<-\pi\\ 1=\mathbb{M}^2(x)+\mathbb{M}^2(-x), & -\pi\leqslant x\leqslant\pi\\ 0=\mathbb{M}(x), & 3\pi\leqslant x<+\infty \end{cases}$$

即窗函数 $\mathbb{M}(x)$ 取值在闭区间 $[0,1]$ 内, 而且其波形关于直线 $x=\pi$ 左右对称, 窗函数

的整个有效波形只分布在闭区间 $[-\pi,+3\pi]$ 上，在这个区间之外窗函数的取值恒等于零.

马尔瓦尔窗函数构造方法简单直观，容易根据信号处理或图像处理的实际需要实现快速构造，不过，因为窗函数 $\mathbb{M}(x)$ 是紧支撑的，所以，窗函数 $\mathbb{M}(x)$ 的傅里叶变换 $(\mathcal{F}\mathbb{M})(\xi)$ 不可能是快速指数衰减的，这导致窗函数 $\mathbb{M}(x)$ 在频域的能量集中程度不是很理想. 这是和威尔逊窗函数最大的差异.

马尔瓦尔正交小波函数系 $\{\mathbb{M}_{0,2\ell}(x),\mathbb{M}_{k,\ell}(x);\ell\in\mathbb{Z},k=1,2,\cdots\}$ 具体表示如下：

$$\begin{cases}\mathbb{M}_{k,\ell}(x)=\mathbb{M}(x-2\ell\pi)\sqrt{2}\cos(0.5kx), & \ell\in 2\mathbb{Z},k=1,2,\cdots\\ \mathbb{M}_{0,\ell}(x)=\mathbb{M}(x-2\ell\pi), & \ell\in 2\mathbb{Z}\\ \mathbb{M}_{k,\ell}(x)=\mathbb{M}(x-2\ell\pi)\sqrt{2}\sin(0.5kx), & \ell\in 2\mathbb{Z}+1,k=1,2,\cdots\end{cases}$$

马尔瓦尔函数系 $\{\mathbb{M}_{0,2\ell}(x),\mathbb{M}_{k,\ell}(x);\ell\in\mathbb{Z},k=1,2,\cdots\}$ 构成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基，是一种加窗三角函数基. 函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中的任何函数或信号 $f(x)$，首先，被窗函数系 $\{\mathbb{M}(x-2\ell\pi);\ell\in\mathbb{Z}\}$ 按照 $\ell\in\mathbb{Z}$ 的奇偶性质分割成两类函数段族或信号段族 $\{c_\ell(x)=\mathbb{M}(x-2\ell\pi)f(x);\ell\in 2\mathbb{Z}\}$ 和 $\{s_\ell(x)=\mathbb{M}(x-2\ell\pi)f(x);\ell\in 2\mathbb{Z}+1\}$；其次，当 $\ell\in 2\mathbb{Z}$ 时，利用离散余弦函数系 $\{\sqrt{2}\cos(0.5kx);k=0,1,2,\cdots\}$ 对函数段族或信号段族 $\{c_\ell(x)=\mathbb{M}(x-2\ell\pi)f(x);\ell\in 2\mathbb{Z}\}$ 中的每一段分别独立进行“余弦谱分析”(注意：当 $k=0$ 时，将恒等函数 $\sqrt{2}$ 修正为恒等函数 1，这是每段“余弦谱分析”都需要处理的修正)，当 $\ell\in 2\mathbb{Z}+1$ 时，信号或者函数分析基使用规范正交的离散正弦函数系 $\{\sqrt{2}\sin(0.5kx);k=1,2,\cdots\}$ 对 $\{s_\ell(x)=\mathbb{M}(x-2\ell\pi)f(x);\ell\in 2\mathbb{Z}+1\}$ 中的每段分别独立进行“正弦谱分析”.

函数或者信号 $f(x)$ 在马尔瓦尔正交小波基 $\{\mathbb{M}_{0,2\ell}(x),\mathbb{M}_{k,\ell}(x);\ell\in\mathbb{Z},k=1,2,\cdots\}$ 之下的正交小波变换是如下的平方可和序列 $\{\mathfrak{W}_{0,2\ell},\mathfrak{W}_{k,\ell};\ell\in\mathbb{Z},k=1,2,\cdots\}$：

$$\begin{cases}\mathfrak{W}_{k,\ell}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\bar{\mathbb{M}}_{k,\ell}(x)dx, & \ell\in\mathbb{Z},k=1,2,\cdots\\ \mathfrak{W}_{0,\ell}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\bar{\mathbb{M}}_{0,\ell}(x)dx, & \ell\in 2\mathbb{Z}\end{cases}$$

或者详细表示为

$$\begin{cases}\mathfrak{W}_{k,\ell}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathbb{M}(x-2\ell\pi)\sqrt{2}\cos(0.5kx)dx, & \ell\in 2\mathbb{Z},k=1,2,\cdots\\ \mathfrak{W}_{0,\ell}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathbb{M}(x-2\ell\pi)dx, & \ell\in 2\mathbb{Z}\\ \mathfrak{W}_{k,\ell}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathbb{M}(x-2\ell\pi)\sqrt{2}\sin(0.5kx)dx, & \ell\in 2\mathbb{Z}+1,k=1,2,\cdots\end{cases}$$

马尔瓦尔函数系 $\{\mathbb{M}_{0,2\ell}(x),\mathbb{M}_{k,\ell}(x);\ell\in\mathbb{Z},k=1,2,\cdots\}$ 构成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基，所以，任意函数或信号 $f(x)$ 可以利用它的马尔瓦尔正交小波变换实现完全重建：

$$f(x)=\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\mathfrak{W}_{0,2\ell}\mathbb{M}_{0,2\ell}(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\mathfrak{W}_{k,\ell}\mathbb{M}_{k,\ell}(x)$$

这形式上说明，马尔瓦尔正交小波分析体现了“严格分段-谱分析”，而且本质上是一种“完全的谱分析”，不存在任何频率成分的泄露和遗失.

函数或信号 $f(x)$ 的马尔瓦尔正交小波变换在时间域体现由窗函数 $\mathbb{M}(x)$ 的支撑宽度，即 4π 给定的时间分辨距离，而在频率域显示为“类似于周期函数傅里叶级数分析”的离散频率分辨能力，规范正交余弦函数系 $\{\sqrt{2}\cos(0.5kx);k=1,2,\cdots\}$ 和规范正交正弦函数系 $\{\sqrt{2}\cos(0.5kx);k=1,2,\cdots\}$ 按照窗函数奇偶平移分别被用作规范正交分析基.

与多分辨率分析方法相比较，马尔瓦尔正交小波分析丧失了灵活的时间伸缩分辨能力，具有频域离散频率分辨能力，同时，保持了正交分析方法简单快捷的优势. 另外，与此前的 Gabor 小波相比，马尔瓦尔正交小波提供函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的离散可数规范正交基，而且，本质上马尔瓦尔正交小波分析能够实现对函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 全部信号或者函数的“完全的谱分析”，同时具有“加窗分析”的时间域定位能力.

马尔瓦尔小波规范正交基构造简单便捷，但是，在分析函数或者信号时，每次“谱分析”之前对信号或者函数的截取都是等长的，固定长度是 4π.

(δ) 变窗马尔瓦尔-威尔逊小波

1991 年, Coifman 和 Meyer(1991), Daubechies 等(1991)完全解决了在威尔逊正交小波基和马尔瓦尔正交小波基构造过程中遇到的窗函数等距平移及窗形固化的问题，得到可以任意改变平移距离和任意改变窗函数形状的多种变窗马尔瓦尔-威尔逊正交小波基.

变窗马尔瓦尔-威尔逊正交小波基及窗函数系 $\{\mathcal{M}_j(x);j\in\mathbb{Z}\}$ 构造方法由四部分组成，它们分别是主窗位置选择(实数轴分割)、窗函数升降区域选择、窗函数波形选择、正交小波基算法构造.

第一部分：主窗位置选择.

选择严格递增实数序列 $\{\mu_j;\ j\in\mathbb{Z}\}$，满足以下要求

$$\cdots < \mu_{-1} < \mu_0 < \mu_1 < \cdots$$
$$\lim_{j\to+\infty} \mu_j = +\infty$$
$$\lim_{j\to-\infty} \mu_j = -\infty$$

这样的实数点列 $\{\mu_j;\ j\in\mathbb{Z}\}$ 称为实数轴 $\mathbb{R}$ 的一个分割，μ_j 称为分割点，第 j 个闭区间 $[\mu_j,\mu_{j+1}]$ 就是第 j 个窗函数 $\mathcal{M}_j(x)$ 的主窗位置，正实数 $\ell_j=\mu_{j+1}-\mu_j$ 就是第 j 个窗函数 $\mathcal{M}_j(x)$ 的窗口宽度，其中 j 是任意整数.

第二部分：窗函数升降区域选择.

选择正实数序列 $\{\zeta_j;\ j\in\mathbb{Z}\}$，满足以下控制条件

$$\ell_j=\mu_{j+1}-\mu_j \geqslant \zeta_j+\zeta_{j+1},\quad j\in\mathbb{Z}$$

这样的正实数序列 $\{\zeta_j;\ j\in\mathbb{Z}\}$ 称为窗函数升降区域控制参数序列，而控制条件仅仅只是保证第 j 个窗函数 $\mathcal{M}_j(x)$ 的主窗位置，即闭区间 $[\mu_j,\mu_{j+1}]$ 足够开销这个窗函数的上升区域 $[\mu_j-\zeta_j,\mu_j+\zeta_j]$ 和下降区域 $[\mu_{j+1}-\zeta_{j+1},\mu_{j+1}+\zeta_{j+1}]$，确保窗函数的升降区域不会重叠，即 $\mu_j+\zeta_j\leqslant\mu_{j+1}-\zeta_{j+1}$. 因此，在前述严格递增实数序列 $\{\mu_j;\ j\in\mathbb{Z}\}$ 即实数轴 $\mathbb{R}$ 的一个分割确定之后，作为窗函数升降区域控制参数的正实数序列 $\{\zeta_j;\ j\in\mathbb{Z}\}$ 中的每一项都必须适当小.

第三部分：窗函数波形选择.

窗函数系 $\{\mathcal{M}_j(x);j\in\mathbb{Z}\}$ 中每个窗函数 $\mathcal{M}_j(x)$ 的波形数值满足如下两类不同要求.

第一类要求：单个窗函数的波形，对任意的 $j\in\mathbb{Z}$，

$$\begin{cases}0\leqslant\mathcal{M}_j(x)\leqslant 1, & -\infty<x<+\infty\\ 1=\mathcal{M}_j^2(\mu_j+z)+\mathcal{M}_j^2(\mu_j-z), & -\zeta_j\leqslant z\leqslant\zeta_j\\ 0=\mathcal{M}_j(x), & -\infty<x\leqslant\mu_j-\zeta_j\\ 1=\mathcal{M}_j(x), & \mu_j+\zeta_j\leqslant x\leqslant\mu_{j+1}-\zeta_{j+1}\\ 0=\mathcal{M}_j(x), & \mu_{j+1}+\zeta_{j+1}\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

第一类要求说明，单个窗函数 $\mathcal{M}_j(x)$ 是非负实数函数，取值在闭区间 $[0,1]$ 上，窗函数 $\mathcal{M}_j(x)$ 的函数值主要分布在对应的主窗位置 $[\mu_j,\mu_{j+1}]$ 上，整个窗函数的非零函数值支撑在闭区间 $[\mu_j-\zeta_j,\mu_{j+1}+\zeta_{j+1}]$ 上，在这个闭区间之外，这个窗函数的数值恒等于 0，即 $\mathcal{M}_j(x)=0$，窗函数 $\mathcal{M}_j(x)$ 在主窗位置 $[\mu_j,\mu_{j+1}]$ 内的核心区域即闭区间 $[\mu_j+\zeta_j,\mu_{j+1}-\zeta_{j+1}]$ 上函数值恒等于 1，即 $\mathcal{M}_j(x)\equiv 1$，在这个窗函数的上升区域 $[\mu_j-\zeta_j,\mu_j+\zeta_j]$ 中，窗函数在分割点 $x=\mu_j$ 左右对称位置上的取值平方和恒等

于 1，即 $-\zeta_j \leqslant z \leqslant \zeta_j$，$\mathcal{M}_j^2(\mu_j+z)+\mathcal{M}_j^2(\mu_j-z)=1$. 直观地，这里没有直接关于这个窗函数在下降区域 $[\mu_{j+1}-\zeta_{j+1},\mu_{j+1}+\zeta_{j+1}]$ 上函数值的要求，具体要求体现在“第二类要求”所述相邻两个窗函数之间的关系中.

第二类要求：相邻两个窗函数的波形依赖关系，对任意的 $j\in\mathbb{Z}$，

$$\mathcal{M}_{j-1}(\mu_j+z)=\mathcal{M}_j(\mu_j-z),\quad -\zeta_j\leqslant z\leqslant\zeta_j$$

即窗函数 $\mathcal{M}_{j-1}(x)$ 的下降区域和窗函数 $\mathcal{M}_j(x)$ 的上升区域重合并且共同支撑在闭区间 $[\mu_j-\zeta_j,\mu_j+\zeta_j]$ 上，在这个闭区间上，窗函数 $\mathcal{M}_{j-1}(x)$ 和窗函数 $\mathcal{M}_j(x)$ 的函数值关于分割点 $x=\mu_j$ (也是这个闭区间的中点！)左右对称.

综合上述两类要求可知，窗函数系 $\{\mathcal{M}_j(x);j\in\mathbb{Z}\}$ 中每个窗函数 $\mathcal{M}_j(x)$ 都可以是无穷次可导的，而且，还可以得到一个直接的推论，这个窗函数系的全部窗函数的平方和恒等于 1，即

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\mathcal{M}_j^2(x)=1,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

第四部分：正交小波基算法构造.

构造变窗马尔瓦尔-威尔逊正交小波基的方式有很多，这里只罗列两种典型的形式，即加窗离散余弦函数系形式、加窗离散正弦与加窗离散余弦交替函数系形式. 利用这两种典型形式还可以直接组合构造许多不同的规范正交变窗马尔瓦尔-威尔逊小波基，它们都是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交小波基.

第一类规范正交变窗马尔瓦尔-威尔逊小波基：

$$\mathcal{M}_{j,k}(x)=\sqrt{\frac{2}{\ell_j}}\mathcal{M}_j(x)\cos\left[\frac{\pi(k+0.5)(x-\mu_j)}{\ell_j}\right]$$

这里 $j\in\mathbb{Z},k=0,1,2,\cdots$. 这时，函数系 $\{\mathcal{M}_{j,k}(x);j\in\mathbb{Z},k=0,1,2,\cdots\}$ 构成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基.

第二类规范正交变窗马尔瓦尔-威尔逊小波基：

$$\begin{cases}\mathcal{M}_{j,k}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\ell_j}}\mathcal{M}_j(x)\cos\left[\dfrac{k\pi(x-\mu_j)}{\ell_j}\right], & j\in 2\mathbb{Z},k=1,2,\cdots\\ \mathcal{M}_{j,0}(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\ell_j}}\mathcal{M}_j(x), & j\in 2\mathbb{Z}\\ \mathcal{M}_{j,k}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\ell_j}}\mathcal{M}_j(x)\sin\left[\dfrac{k\pi(x-\mu_j)}{\ell_j}\right], & j\in 2\mathbb{Z}+1,k=1,2,\cdots\end{cases}$$

这样构造获得的函数系 $\{\mathcal{M}_{2j,0}(x),\mathcal{M}_{j,k}(x);j\in\mathbb{Z},k=1,2,\cdots\}$ 是存在伸缩和平移的三角函数系，其中伸缩量和平移量都可以自由选择，这个函数系构成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基.

因为窗函数存在作为缓冲的上升段和下降段的持续时间，所以把威尔逊小波、马尔瓦尔小波以及马尔瓦尔-威尔逊小波同其他小波如 Gabor 小波、Meyer 小波、Daubechies 小波、Mallat 小波等严格划清了界限. 另外，马尔瓦尔-威尔逊小波类正交分析体现了典型的“时-频”算法.

注释：早在 1985 年 Lemariee 和 Meyer 利用特殊的分析方法按照与此相同的构造得到了一个生成“时间-尺度”算法的正交小波函数 $\psi(x)$，只不过当时并没有得到像前述这样清晰严格的一般化构造方法，它是作为马尔瓦尔小波类的特例出现的，这件事情让人们惊异不已. 这个小波，被称为 Lemariee-Meyer 小波，使函数族 $\{2^{j/2}\psi(2^jx-k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 构成 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的一个规范正交基，而且小波函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换 $\Phi(\omega)$ 支撑在零-穿越区间 $\left[\dfrac{-8\pi}{3},\dfrac{-2\pi}{3}\right]$ 和 $\left[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{8\pi}{3}\right]$ 上. 事实上，它是在一组适当的马尔瓦尔小波基之上，通过分析一个信号 $f(x)$ 的傅里叶变换 $(\mathcal{F}f)(\omega)$ 实现对信号的 Lemariee-Meyer 小波分析的. 这个事实说明，以“时-频”算法形式出现的马尔瓦尔小波类，实质上比 Gabor 小波那样的“时-频”小波以及 Mallat、Meyer、Daubechies 小波那样的“时间-尺度”小波要广泛得多. 这些问题的更多讨论，可参考 Lemarié(1985, 1988, 1989), Lemarié 和 Meyer(1986), Daubechies 等(1991), Wilson (1971a, 1971b, 1971c, 1974, 1975, 1979, 1983)等的研究成果.

(ε) 基的分裂-合并算法

从马尔瓦尔-威尔逊小波构造的第一步和第二步可知，它为函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 规范正交小波基的构造提供了极大的选择余地，从而，在理论上为信号的最优描述问题开辟了新的研究方向.

为寻求和实现信号或者函数的最优表达，这里尝试建立规范正交小波基的更替算法以满足寻优的需要，这里建立的更替算法被称为规范正交小波基的分裂-合并算法.

将构造马尔瓦尔-威尔逊小波的第一和第二两个步骤综合起来考虑，给出一种新的算法，以便于从函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的一个规范正交小波基快速转化为它的另一个规范正交小波基，并尽量减少必要的计算和分析，同时要求信号的描述能简便地从一个基下的形式变为另一个基下的形式. “分裂-合并”算法就是这样一种简单的方法. 具体地说，“分裂-合并”算法作用于一个现存的分割以便得到一个

新的分割，它通过调整一个分割的某一分割点 μ_j 来实现对现有分割的修改. 基本的修改包括被称为“合并”和“分裂”两种操作. 所谓合并，就是抑制分割中的某一个点 μ_j，这相当于把两个区间 $[\mu_{j-1},\mu_j]$ 和 $[\mu_j,\mu_{j+1}]$ 合并成一个新的区间 $[\mu_{j-1},\mu_{j+1}]$，其余的区间保持不变，这样得到一个新的分割；而相反的操作被称为分裂，相当于在分割点 μ_j 和 μ_{j+1} 之间添加一个临时的分割点 α，结果是用两个区间 $[\mu_j,\alpha]$ 和 $[\alpha,\mu_{j+1}]$ 代替原来的区间 $[\mu_j,\mu_{j+1}]$，从而得到一个新的分割. 一个“分裂-合并”算法还包括提供一个标准，以此决定什么时候在什么地方使用这两个基本操作中的哪一个.

现在研究这两种基本操作对马尔瓦尔-威尔逊规范正交小波基的影响.

假设函数系 $\{\mathcal{M}_{j,k}(x); j\in\mathbb{Z}, k=0,1,2,\cdots\}$ 构成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交小波基. 对 $\forall j\in\mathbb{Z}$，定义 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭子空间 W_j：

$$W_j = \text{Closespan}\{\mathcal{M}_{j,k}(x); k=0,1,2,\cdots\}$$

那么容易证明，当且仅当 $f(x)=\mathcal{M}_j(x)q(x)$ 时，$f(x)\in W_j$，其中函数 $q(x)$ 在闭区间 $[\mu_j-\zeta_j,\mu_{j+1}+\zeta_{j+1}]$ 上平方可积，即 $q(x)\in\mathcal{L}^2[\mu_j-\zeta_j,\mu_{j+1}+\zeta_{j+1}]$，且当 $|\tau|\leqslant\zeta_j$ 时，$q(\mu_j+\tau)=q(\mu_j-\tau)$，而当 $|\tau|\leqslant\zeta_{j+1}$ 时，$q(\mu_{j+1}+\tau)=-q(\mu_{j+1}-\tau)$，在区间 $[\mu_j+\zeta_j,\mu_{j+1}-\zeta_{j+1}]$ 上对 $q(x)$ 没有限制.

在合并算法实施过程中，用正交直和函数子空间 $W_{j-1}\oplus W_j$ 代替初始的两个函数子空间 W_{j-1} 和 W_j，而其他的函数子空间 $W_{j'}$ $(j'\neq j-1,j)$ 是不变动的. 相应地，利用窗函数 $\tilde{\mathcal{M}}_j(x)=\sqrt{\mathcal{M}_{j-1}^2(x)+\mathcal{M}_j^2(x)}$ 代替 $\mathcal{M}_{j-1}(x)$ 和 $\mathcal{M}_j(x)$ 这两个原始的窗函数，由于马尔瓦尔-威尔逊小波构造过程中窗函数的特殊波形要求，可以具体表示 $\tilde{\mathcal{M}}_j(x)=\sqrt{\mathcal{M}_{j-1}^2(x)+\mathcal{M}_j^2(x)}$ 如下：

$$\tilde{\mathcal{M}}_j(x)=\sqrt{\mathcal{M}_{j-1}^2(x)+\mathcal{M}_j^2(x)}=\begin{cases}\mathcal{M}_{j-1}(x), & -\infty<x<\mu_j+\zeta_j\\ 1, & \mu_j+\zeta_j\leqslant x\leqslant\mu_{j+1}-\zeta_{j+1}\\ \mathcal{M}_j(x), & \mu_{j+1}-\zeta_{j+1}<x<+\infty\end{cases}$$

在分裂算法实施过程中，需要在分割点 μ_j 和 μ_{j+1} 之间添加一个临时分割点 α，同时为这个分割点 α 附设“以 α 点为对称中心的(上升和下降的)缓冲段”，将缓冲段长度的一半记为 ζ_α，那么，$\mu_j+\zeta_j\leqslant\alpha-\zeta_\alpha$，$\alpha+\zeta_\alpha\leqslant\mu_{j+1}-\zeta_{j+1}$，而且，缓冲段表示为 $[\alpha-\zeta_\alpha,\alpha+\zeta_\alpha]$，将支撑在 $[\mu_j-\zeta_j,\alpha+\zeta_\alpha]$ 和 $[\alpha-\zeta_\alpha,\mu_{j+1}+\zeta_{j+1}]$ 上的两个

窗函数分别记为 $\mathcal{M}_{j'}(x)$ 和 $\mathcal{M}_{j''}(x)$，它们分别满足如下要求：

$$\begin{cases} 0 \leqslant \mathcal{M}_{j'}(x) \leqslant 1, & -\infty < x < +\infty \\ 0 = \mathcal{M}_{j'}(x), & -\infty < x < \mu_j - \zeta_j \\ \mathcal{M}_j(x) = \mathcal{M}_{j'}(x), & \mu_j - \zeta_j \leqslant x < \mu_j + \zeta_j \\ 1 = \mathcal{M}_{j'}(x), & \mu_j + \zeta_j \leqslant x \leqslant \alpha - \zeta_\alpha \\ 1 = \mathcal{M}_{j'}^2(\alpha + z) + \mathcal{M}_{j'}^2(\alpha - z), & -\zeta_\alpha \leqslant z \leqslant \zeta_\alpha \\ 0 = \mathcal{M}_{j'}(x), & \alpha + \zeta_\alpha \leqslant x < +\infty \end{cases}$$

而且

$$\begin{cases} 0 \leqslant \mathcal{M}_{j''}(x) \leqslant 1, & -\infty < x < +\infty \\ 0 = \mathcal{M}_{j''}(x), & -\infty < x \leqslant \alpha - \zeta_\alpha \\ 1 = \mathcal{M}_{j''}^2(\alpha + z) + \mathcal{M}_{j''}^2(\alpha - z), & -\zeta_\alpha \leqslant z \leqslant \zeta_\alpha \\ 1 = \mathcal{M}_{j''}(x), & \alpha + \zeta_\alpha \leqslant x < \mu_{j+1} - \zeta_{j+1} \\ \mathcal{M}_j(x) = \mathcal{M}_{j''}(x), & \mu_{j+1} - \zeta_{j+1} \leqslant x \leqslant \mu_{j+1} + \zeta_{j+1} \\ 0 = \mathcal{M}_{j''}(x), & \mu_{j+1} + \zeta_{j+1} < x < +\infty \end{cases}$$

除此之外，在新增缓冲段 $[\alpha - \zeta_\alpha, \alpha + \zeta_\alpha]$ 上，它们满足如下恒等式：

$$\mathcal{M}_{j'}(\alpha + z) = \mathcal{M}_{j''}(\alpha - z), \quad -\zeta_\alpha \leqslant z \leqslant \zeta_\alpha$$

即窗函数 $\mathcal{M}_{j'}(x)$ 的下降区域和窗函数 $\mathcal{M}_{j''}(x)$ 的上升区域重合并且共同支撑在闭区间 $[\alpha - \zeta_\alpha, \alpha + \zeta_\alpha]$ 上，在这个闭区间上，窗函数 $\mathcal{M}_{j'}(x)$ 和窗函数 $\mathcal{M}_{j''}(x)$ 的函数值关于分割点 $x = \alpha$ (也是这个闭区间的中点!)左右对称.

$\mathcal{M}_{j'}(x)$ 和 $\mathcal{M}_{j''}(x)$ 与 $\mathcal{M}_j(x)$ 的关系是

$$\mathcal{M}_j(x) = \sqrt{\mathcal{M}_{j'}^2(x) + \mathcal{M}_{j''}^2(x)} = \begin{cases} \mathcal{M}_{j'}(x), & -\infty < x < \alpha - \zeta_\alpha \\ 1, & \alpha - \zeta_\alpha \leqslant x < \alpha + \zeta_\alpha \\ \mathcal{M}_{j''}(x), & \alpha + \zeta_\alpha \leqslant x < +\infty \end{cases}$$

这时候，函数子空间 W_j 被两个相互正交的函数子空间 $W_{j'}$ 和 $W_{j''}$ 所代替，它们之间满足关系

$$W_j = W_{j'} \oplus W_{j''}$$

注释：与合并算法相比，分裂算法最大的特点是，分裂的结果不是唯一的！实际上，分裂的结果依赖于新增分割点 α 的位置、半缓冲宽度 ζ_α 以及新增窗函数 $\mathcal{M}_{j'}(x)$ 在缓冲段 $[\alpha - \zeta_\alpha, \alpha + \zeta_\alpha]$ 上的下降波形(这同时构成新增窗函数 $\mathcal{M}_{j''}(x)$ 的上

升波形).

(ζ) 熵与最优小波基

"熵"是一个现代科学概念，最早是统计物理学中度量分子热运动状态的一个物理学概念，它体现的是分子能量的分布情况或变化情况. 后来，这个概念的使用范围越来越宽广，现在，它已经成为一个在科学界中广为人知的基本概念. 一般地，设 $\mathbf{H}$ 是一个希尔伯特空间，序列 $\{e_j; j\in J\}$ 是 $\mathbf{H}$ 中的一个规范正交基，x 是 $\mathbf{H}$ 的一个单位向量并且有表达式

$$x=\sum_{j\in J}\alpha_j e_j$$

在规范正交基 $\{e_j; j\in J\}$ 下，向量 x 的"熵"定义是

$$S(x)=\exp\left(-\sum_{j\in J}|\alpha_j|^2\lg|\alpha_j|^2\right)$$

如果存在许多规范正交基，用集合 $\{\{e_j^{\omega}; j\in J\}; \omega\in\Omega\}$ 表示它们构成的由 $\omega\in\Omega$ 标志的全部规范正交基，那么，完全可以期望对规范正交基的调整使 x 的熵 $S(x)$ 达到最小. 这就是"最小熵准则".

沿用前述记号，能量有限的信号 $f(x)$ 全体构成的函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 是一个希尔伯特空间，信号 $f(x)$ 的能量定义为

$$E(f)=\int_{\mathbb{R}}\left|f(x)\right|^2dx$$

在这里信号或者函数的最优描述目标是构造搜索算法，以寻找如下的最优小波基，这种最优小波基将产生一种最优压缩，从而达到减少储存信号和传送信号所需数据的目的.

"搜索"是通过比较 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的全部规范正交基相应的目标函数值来实现的，这些规范正交基都是马尔瓦尔小波基，并且它们是从实直线的二进区间分割得到的. 这些区间是有组织地按照从 "细"到"粗"的设计方案构造出来的. 具体地说，就是从一个由长度是 $2^{-\kappa}$ 的区间构成的分割开始处理，这里 κ 足够大，以保证采样点足够稠密，能够获得信号中出现的最精细的细节.

具体的处理过程是，或者是去掉前一步所得分割中的某一点，这相当于用一个"大的"二进区间 $I=I'\cup I''$ 代替原来的两个相邻的"小的"二进区间 I',I''. 例如，当 3 消失时，$[2,3]$ 和 $[3,4]$ 能合并成 $[2,4]$，但在这一步 $[3,4]$ 和 $[4,5]$ 将不能合并成 $[3,5]$. 如果想去掉分割点 4，必须等到 $[0,4]$ 和 $[4,8]$ 都出现，并进行最后合并得到区间 $[0,8]$，这正是二进区间划分所要求的. 或者是在现有的某个二进区间中添加分点，使之成

为两个等长的“小的”二进小区间.

经尺度变换后可以假设 $\kappa=0$，这样作为出发点的最精细分割就是整数集合 $\mathbb{Z}$ 对应的分割. 马尔瓦尔正交小波构造中所需的分割对应的区间 $[\mu_j,\mu_{j+1}]$ 在这里就是相邻整数的区间 $[j,j+1]$，并且，参与竞争的第一个规范正交基就是

$$\mathcal{M}_{j,k}(x)=\sqrt{2}\mathcal{M}_j(x)\cos[\pi(k+0.5)(x-j)],\quad j\in\mathbb{Z},\quad k=1,2,3,\cdots$$

参与竞争的其他规范正交基将由“分裂-合并”算法从第一个逐次得到. 分裂-合并的基本原则是保持二进区间分割. 合并的前提是，区间 $[\mu_{j-1},\mu_j]$ 和 $[\mu_j,\mu_{j+1}]$ 是一个二进区间 I 的左右两个半子区间. 实际上，对应于实直线的长度大于或等于 1 的任何二进区间划分，都典型地定义了一个可以参与竞争的规范正交基. 从“最精细的网格”开始，沿这种树状结构，反复采用“分裂-合并”算法，实际上可以得到全部所要讨论的划分.

将长度 $|I|\geqslant 1$ 的二进区间 I 全体的集合记为 Ξ，并假设 $I=[\mu_j,\mu_{j+1}]\in\Xi$，用 $\mathcal{M}_I(x)$ 表示相应的窗函数，开始的时候，$\mathcal{M}_I(x)=\mathcal{M}(x-j)$. 相应地，用 W_I 表示 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的如下闭子空间:

$$W_I=\text{Closespan}\{\mathcal{M}_{j,k}(x)=\sqrt{2}\mathcal{M}_j(x)\cos[\pi(k+0.5)(x-j)],k=1,2,3,\cdots\}$$

而且此时

$$\mathcal{M}_{j,k}(x)=\sqrt{2}\mathcal{M}_j(x)\cos[\pi(k+0.5)(x-j)],\quad k=1,2,3,\cdots$$

构成 W_I 的一个规范正交基. 为了统一记号，把相应于分割区间 $I=[\mu_j,\mu_{j+1}]\in\Xi$ 的规范正交基函数记为 $\mathcal{M}_I^{(k)}(x)=\mathcal{M}_{j,k}(x),k=1,2,3,\cdots$.

如果长度相等的两个二进区间 I'和I'' 是一个二进区间 I 的左右两部分，那么，回顾前述“分裂-合并”算法的论述，必然得到

$$W_I=W_{I'}\oplus W_{I''}$$

并且这个直和是正交的. 设信号 $f(x)$ 是单位能量的，即 $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx=1$，并且假设对充分大的 ξ，$f(x)\in W_L,L=[0,2^{\xi}]$(从理论上说，这个要求相当于函数或者信号是时域紧支撑的，这是一个理所当然的客观假设).

容易证明，当 $m\to+\infty$ 时，$f(x)\in W_I$ 在规范正交基下的熵 $S(f)\to+\infty$，这里 $I=[0,2^m]$. 因此存在 M，当 $m>M$ 时，$\mathcal{M}_I^{(k)}(x)=\mathcal{M}_{j,k}(x),k=1,2,3,\cdots$ 这样的规范正交基将不再参与竞争. 换句话说，必须加以讨论的二进划分，实际上只是把

$L=[0,2^M]$ 分割成长度 $|I|\geqslant 1$ 的二进区间的那些划分. 这时, 分点数虽然只有有限个, 但其数目仍然是巨大的, 大约是 2^{2^M}. 因此, 最终必须构造一个快速算法才能实现最优规范正交基的搜索. 对于 $I=[\mu_j,\mu_{j+1}]\in\Xi$, 引入记号

$$c_I^{(k)}=\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{M}_I^{(k)}(x)dx,\quad k=1,2,3,\cdots$$

$$\varepsilon(I)=-\sum_0^{+\infty}|c_I^{(k)}|^2\lg||c_I^{(k)}||^2$$

$$\varepsilon^{\Upsilon}(I)=\inf\sum_p \varepsilon(J_p)$$

其中 inf 的范围是所有的分割 (J_p), 这里分割 (J_p) 把区间 I 分划成属于 Ξ 的二进区间 J_p.

显然, 当 $I=[j,j+1]$ 时, 必然有 $\varepsilon^{\Upsilon}(I)=\varepsilon(I)$. 这样, 现在面临的问题是, 如果竞争中出现的最大二进区间是 $I=L=[0,2^M]$, 必须简化所要寻找的最优分割 (J_p), 因为必须加以考虑的不同可能性的种类太多, 所以, $\varepsilon^{\Upsilon}(L)$ 的计算以及最优分割的确定实际上都不可能直接完成.

实际有效的方法是按照 n 用归纳法对 $|I|=2^n$ 去计算 $\varepsilon^{\Upsilon}(I)$.

当 $n=0$ 时, 必须对 $I=L=[0,2^M]$ 中的所有二进区间 $I=[j,j+1]$ 计算 $\varepsilon^{\Upsilon}(I)$, 这时显然 $\varepsilon^{\Upsilon}(I)=\varepsilon(I)$. 接着, 假设对整数 n, 相应的 $|I|=2^n$ 的 $\varepsilon^{\Upsilon}(I)$ 已求出, 并且这时相应分割 (J_p) 也确定出来了. 对于 $|I|=2^{n+1}$, 设 I 的左右两等份是二进区间 I' 和 I'', 这样将会出现下述两种情形:

如果 $\varepsilon(I)\leqslant\varepsilon^{\Upsilon}(I')+\varepsilon^{\Upsilon}(I'')$, 则保留 I 不变, 并放弃关于 I' 和 I'' 的上述所有信息, 定义 $\varepsilon^{\Upsilon}(I)=\varepsilon(I)$ 且 I 的划分保持不变;

如果 $\varepsilon(I)>\varepsilon^{\Upsilon}(I')+\varepsilon^{\Upsilon}(I'')$, 令 $\varepsilon^{\Upsilon}(I)>\varepsilon^{\Upsilon}(I')+\varepsilon^{\Upsilon}(I'')$, 并且 I 的划分由合并 I' 和 I'' 的划分而得到, 此处, I' 和 I'' 分别被用于计算 $\varepsilon^{\Upsilon}(I'),\varepsilon^{\Upsilon}(I'')$.

到达合并计算的终点即"金字塔的顶点"时, 同时得到熵的最小值和最优分割以及由此导出的马尔瓦尔最优小波基.

例 1　选取如下函数或者信号:

$$f(x)=g(x)+\frac{1}{\sqrt{h}}g\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\exp\left(i\omega x\right)$$

其中 $g(x)=\exp(-0.5x^2)$ 且 $h>0$, ω 是实数. 下面假设 h 非常小.

如果使用的马尔瓦尔小波对应于非常规则的网格，比如 $\mu_j = j\alpha$，其中 α 为常数，那么，通过仔细地理论计算可知，信号 $f(x)$ 在该马尔瓦尔小波基下的分解对应的熵 $S(f) > -c\lg h$，这里 c 是正的常数．实际上，如果网格边长是 1，那么，$h^{-0.5}g(h^{-1}(x-x_0))\exp(i\omega x)$ 表现不好；若网格边长是 h，则 $g(x)=\exp(-0.5x^2)$ 表现不好．选取适当的分割，$f(x)$ 分解后的熵可以减小到一个固定的常数 C．事实上，假设 $h=2^{-\kappa}$ 且初始网格是 $2^{-\kappa}\mathbb{Z}$，二进区间的最优分割是由包含 x_0 的相互嵌套的长度分别是 $2^{-\kappa}, 2\times 2^{-\kappa}, \cdots, 1$ 的二进区间列 $J_\kappa \subset J_{\kappa-1} \subset \cdots \subset J_0$ 所组成．对每个 J_n，把长度相同的两个相邻的区间同 J_n 的左右两等份联系起来，由此定义的二进区间的最终状态就构成 $f(x)$ 的最优分解．这时，在相应马尔瓦尔规范正交小波基下 $f(x)$ 的熵 $S(f)$ 不会大于一个固定的常数 C．

注释：这些理论分析清晰、详细阐述了建立在函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 规范正交小波基上的函数或者信号的最优描述问题求解方法以及寻优过程算法，因为马尔瓦尔规范正交小波基具有简单的构造方法和算法结构，因此，这个“寻优过程”可以通过相对简单的计算机编程采用数值方法得到实现．建议读者尝试编程验证．

7.2.7　Daubechies 紧支撑小波包与时频分析

这里研究信号或者函数的时频分析方法，重点在于说明时频原子在时频相平面上的位置同它的时频局部化行为之间的关系．为了解决其中遇到的困难，从 Daubechies 紧支撑小波转向紧支撑正交小波包构造，并由此导出一种小波包的信号或者函数分析方法．

(α) 时频原子

时频分析方法是把信号分解成“时频原子”的线性组合，对于作为分解基本元素的时频原子，要求它们具备如下特点：①存在的时间可以任意长，设 x_1 和 x_2 表示信号存在的起止时刻，则长度 $(x_2 - x_1)$ 可以是任意正数；②包含任意频率成分且平均频率(中心频率或者主频)也任意．

把一个时频原子同时频相平面上的一个矩形区域对应起来，这个矩形被称为相应时频原子的“时频窗”，其面积约定为 2π．

历史上最有名的时频原子之一就是 Gabor 小波

$$f_{\mathfrak{R}}(x) = g_h(x-x_0)\exp(i\omega_0 x)$$

其中

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),\quad g_h(x) = \frac{1}{\sqrt{h}}g\left(\frac{x}{h}\right)$$

而且，ω_0 是 Gabor 小波 $f_{\mathfrak{R}}(x)=g_h(x-x_0)\exp(i\omega_0 x)$ 的时频窗的“频率中心”，而时间平均值 $x_0=0.5(x_2-x_1)$ 是它的“时间中心”，$\mathfrak{R}$ 是矩形区域，即

$$\mathfrak{R}=\left[x_1,x_2\right]\times\left[\omega_0-\frac{\pi}{h},\omega_0+\frac{\pi}{h}\right]$$

其中 $h=(x_2-x_1)$.

如果时频原子 $f_{\mathfrak{R}}(x)$ 的时频窗是 $\mathfrak{R}$，那么，可以认为函数 $f_{\mathfrak{R}}(x)$ 在时间域本质上支撑在时间区间 $[x_1,x_2]$ 上，在频率域，$f_{\mathfrak{R}}(x)$ 的傅里叶变换

$$F_{\mathfrak{R}}(\theta)=(2\pi)^{-0.5}\int_{\mathbb{R}} f_{\mathfrak{R}}(x)e^{-i\theta x}dx$$

本质上支撑在频带 $\left[\omega_0-\frac{\pi}{h},\omega_0+\frac{\pi}{h}\right]$ 上.

因为任何函数及其傅里叶变换不能同时是紧支撑的，因此在后续研究中，退而求其次，时频原子 $f_{\mathfrak{R}}(x)$ 及其傅里叶变换 $F_{\mathfrak{R}}(\theta)$ 被要求满足如下的“本质时频紧支撑条件”：

$$\int_{\mathbb{R}}(x-x_0)^2\,|\,f_{\mathfrak{R}}(x)|^2\;dx\leqslant C^2h^2$$
$$\int_{\mathbb{R}}(\theta-\omega_0)^2\,|\,F_{\mathfrak{R}}(\theta)|^2\;d\theta\leqslant 2\pi C^2h^{-2}$$

可以证明, Gabor 小波 $f_{\mathfrak{R}}(x)$ 作为时频原子使“本质时频紧支撑条件”中的常数 C 达到最小值，即它是这种意义下的最优时频原子. 正因为这样, Gabor 小波在它的应用中是很有名的. 但是 Gabor 小波的时频分析效果却并不好.

事实上，如果时频原子 $f_{\mathfrak{R}}(x)$ 实际上完全集中在它的时频窗即矩形 $\mathfrak{R}$ 上，那么它必有如下性质:若 $\mathfrak{R}_1$ 和 $\mathfrak{R}_2$ 是时频相平面上边平行于坐标轴的两个互不相交的矩形区域，则

$$\left\langle f_{\mathfrak{R}_1}(x),f_{\mathfrak{R}_2}(x)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\int_{\mathbb{R}} f_{\mathfrak{R}_1}(x)[f_{\mathfrak{R}_2}(x)]^*dx=0$$

实际上，因为 $\mathfrak{R}_1$ 和 $\mathfrak{R}_2$ 是不相交的，所以，它们的水平边或者垂直边至少应该有一个是不相交的. 当水平边不相交时，这个积分式中的被积函数本身就等于零，所以这个积分必然为 0；当垂直边不相交时，说明 $F_{\mathfrak{R}_1}(\theta)$ 和 $F_{\mathfrak{R}_2}(\theta)$ 的频域支撑是不相交的，这时 $F_{\mathfrak{R}_1}(\theta)F_{\mathfrak{R}_2}(\theta)\equiv 0$，从而得到

$$\int_{\mathbb{R}} F_{\mathfrak{R}_1}(\theta)[F_{\mathfrak{R}_2}(\theta)]^*d\theta=0$$

这样，由 Parseval 恒等式可知

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\mathfrak{R}_1}(x)[f_{\mathfrak{R}_2}(x)]^*dx=\int_{\mathbb{R}} F_{\mathfrak{R}_1}(\theta)[F_{\mathfrak{R}_2}(\theta)]^*d\theta=0$$

总之，总成立 $f_{\mathfrak{R}_1}(x) \perp f_{\mathfrak{R}_2}(x)$.

但是，实际上 $f_{\mathfrak{R}_1}(x) \perp f_{\mathfrak{R}_2}(x)$ 是不可能的. 当 $f_{\mathfrak{R}_1}(x), f_{\mathfrak{R}_2}(x)$ 都是 Gabor 小波时，积分式 $\int_{\mathbb{R}} f_{\mathfrak{R}_1}(x)[f_{\mathfrak{R}_2}(x)]^* dx$ 是永不为 0 的. 当然，如果 $\mathfrak{R}_1$ 和 $\mathfrak{R}_2$ 在时频相平面上相隔非常遥远，即对某足够大的 $m \in \mathbb{N}$，$m\mathfrak{R}_1$ 和 $m\mathfrak{R}_2$ 仍不相交，那么，积分式 $\int_{\mathbb{R}} f_{\mathfrak{R}_1}(x)[f_{\mathfrak{R}_2}(x)]^* dx$ 的数值可以很小. 但是，$\int_{\mathbb{R}} f_{\mathfrak{R}_1}(x)[f_{\mathfrak{R}_2}(x)]^* dx = 0$ 对 Gabor 小波来说是不可能的.

Séré(1995)曾证明，在时频相平面上的充分远离的矩形 $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_n, \cdots$ 并不说明相应的 Gabor 小波 $f_{\mathfrak{R}_0}(x), f_{\mathfrak{R}_1}(x), \cdots, f_{\mathfrak{R}_n}(x), \cdots$ 是完全不相关的. 具体地说，对每个 $m \in \mathbb{N}$，存在矩形列 $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_n, \cdots$，使得 $m\mathfrak{R}_0, m\mathfrak{R}_1, \cdots, m\mathfrak{R}_n, \cdots$ 是两两互不相交的，并且存在常数列 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots$ 满足

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |\alpha_j|^2 = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j f_{\mathfrak{R}_j}(x) \right|^2 dx = +\infty$$

这说明时频相平面上相隔足够远的矩形并不保证相应的 Gabor 小波是几乎正交的. 因此不得不放弃 Gabor 小波而在马尔瓦尔小波和小波包之间进行选择，对时频分析来说，这两者各有优劣.

由前面论述可知，马尔瓦尔小波的构造决定了马尔瓦尔小波基是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的规范正交基，但另一方面，从其形式来说，组成马尔瓦尔小波的上升、下降和稳定部分的持续时间是完全独立的，因此，总可以找到如下的马尔瓦尔小波，即它的上升和下降的持续时间 h 远远小于稳定部分的持续时间 T. 如果稳定部分的频率是 ω_0，那么这时马尔瓦尔小波的傅里叶变换将具有如下形式:

$$\frac{\sin T(\theta - \omega_0)}{\sqrt{T}(\theta - \omega_0)} \Phi(\theta - \omega_0)$$

其中，$T \gg h$，而且，$\Phi(\theta - \omega_0)$ 大致类似于作为矩形函数傅里叶变换的 sinc 函数，所以，在这种情况下，马尔瓦尔小波不满足时频原子“本质时频紧支撑条件”中的“本质频域紧支撑条件” $\int_{\mathbb{R}} (\theta - \omega_0)^2 \left| F_{\mathfrak{R}}(\theta) \right|^2 d\theta \leqslant 2\pi C^2 h^{-2}$，它完全牺牲了在时频相平面上的频域局部化要求. 除此之外，马尔瓦尔小波不是由一个函数 $\psi(x)$ 经中心移动和尺度伸缩产生出来的.

回顾正交小波包理论以及 Daubechies 的紧支撑正交小波构造理论，紧支撑正交小波包将具有如下特点：

(1) Daubechies 正交小波是小波包的特例；

(2) 各种级别的小波包伸缩平移系都构成 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基；

(3) (紧支撑)小波包理论能够为函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 提供极其丰富的规范正交基，因此，可以通过比较信号或者函数在这些小波包规范正交基下分解的优劣，选择信号或者函数最理想的小波包描述；

(4) 小波包算法简单结构统一：$2^{j/2}w_n(2^k x-k),(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},n=0,1,2,\cdots$.

按照 Daubechies 紧支撑正交小波包的如下构造方法，$\omega_n(x)$ 将支撑在一个固定的区间 $[0,L]$ 上. 正是这些特点决定小波包在时域分析上的优良行为. 在频率域中，如果将紧支撑正交小波包的级别参数 n 视为频率，那么，它同马尔瓦尔小波中的参数 $k=0,1,2,\cdots$ 所起的作用是相同的. 实际上，小波包在频域的行为与马尔瓦尔小波类似. 为了清楚起见，把时频相平面上的矩形区域：

$$\mathfrak{R}_{j;k,n}=[2^{-j}k,2^{-j}(k+1)]\times[2^j n,2^j(n+1)]$$

“等同”于小波包 $2^{j/2}w_n(2^k x-k)$，那么，这种选择仍然不满足时频原子的“本质时频紧支撑条件”，而且

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\left\{\inf_{\omega_0\in\mathbb{R}}\int_{\theta\in\mathbb{R}}(\theta-\omega_0)^2\,|(\mathscr{F}w_n)(\theta)|^2\,d\theta\right\}=+\infty$$

其中 $\|w_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=1$.

(β) 紧支撑正交小波包

研究一列特殊的函数 $w_n(x),n=0,1,2,\cdots$，它们支撑在 $[0,2N-1]$ 上，这里 $N\geq 1$ 是预先固定的一个自然数.

当 $N=1$ 时，这些函数构成 Walsh 函数系，它们构成函数空间 $\mathcal{L}^2[0,1]$ 的规范正交基；

当 $N\geqslant 2$ 时，函数族 $w_n(x-k),n=0,1,2,\cdots,k\in\mathbb{Z}$ 构成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基，它将产生正交的窗口傅里叶分析，其结构类似于马尔瓦尔小波.

设 $N\geqslant 1$，定义滤波器的频率响应函数如下：

$$\begin{cases} m_0(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{0}^{2N-1}h_k\exp(-ik\theta)\\ m_1(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{0}^{2N-1}g_k\exp(-ik\theta)\end{cases}$$

满足

$$g_k=(-1)^{k+1}\overline{h}_{2N-1-k},\quad k=0,1,2,\cdots,2N-1$$

或者

$$m_1(\theta)=\bar{m}_0(\theta+\pi)\exp[(2N-1)i\theta]$$
$$|m_0(\theta)|^2+|m_0(\theta+\pi)|^2=1$$

其中 $m_0(0)=1$，而且，当 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$m_0(\theta)\neq 0$.

例如，选取满足如下典型形式要求的滤波器：

$$|m_0(\theta)|^2=1-c_N\int_0^\theta(\sin x)^{2N-1}dx=\sum_{|k|\leqslant 2N-1}\lambda_k e^{ik\theta}$$

其中 c_N 满足 $1=c_N\int_0^\pi(\sin x)^{2N-1}dx$.

当然，还可以选择其他的形式，比如 Coifman 等(1992)，Coifman 和 Wickerhauser(1992)等的研究工作.

例 1　对长度为 1 的滤波器

$$\begin{cases}m_0(\theta)=\dfrac{1}{2}(1+e^{-i\theta})\\ m_1(\theta)=\dfrac{1}{2}(-1+e^{-i\theta})\end{cases}$$

因为

$$\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}=1$$

所以 $|m_0(\theta)|^2+|m_0(\theta+\pi)|^2=1$ 成立，其他条件也可逐个验证.

例 2　取 $N=2$，低通滤波器的脉冲响应系数取为

$$\sqrt{2}h_0=\frac{1}{4}(1+\sqrt{3}),\quad \sqrt{2}h_1=\frac{1}{4}(3+\sqrt{3})$$
$$\sqrt{2}h_2=\frac{1}{4}(3-\sqrt{3}),\quad \sqrt{2}h_3=\frac{1}{4}(1-\sqrt{3})$$

而带通滤波器的脉冲响应系数 $g_k=(-1)^{k+1}\overline{h}_{3-k},k=0,1,2,3$.

在低通滤波器的脉冲响应系数列 $\{h_k;0\leqslant k\leqslant 2N-1\}$ 和带通滤波器的脉冲响应系数列 $\{g_k;0\leqslant k\leqslant 2N-1\}$ 给定之后，定义紧支撑正交小波包列 $w_n(x)$ 如下：

$$\begin{cases}w_{2n}(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{k=0}^{2N-1}h_k w_n(2x-k)\\ w_{2n+1}(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{k=0}^{2N-1}g_k w_n(2x-k)\end{cases}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$，并且 $w_0\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ 满足 $\int_{\mathbb{R}}w_0(x)dx=1$.

特别地，当 $n=0$ 时，有

$$w_0(x)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{2N-1}h_k w_0(2x-k)$$

这正是有限脉冲响应滤波器对应的尺度方程. 函数 $\varphi(x)=w_0(x)$ 作为尺度函数，是算子 $\mathbb{T}$：

$$\mathbb{T}:\ \mathcal{L}^1(\mathbb{R})\to\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$
$$f\mapsto \mathbb{T}_f$$
$$(\mathbb{T}_f)(x)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{2N-1}h_k f(2x-k)$$

的不动点，即 $\varphi\mapsto\mathbb{T}_\varphi=\varphi$. 在频率域中，上式等价转换为

$$(\mathscr{F}\mathbb{T}_f)(\theta)=m_0(0.5\theta)(\mathscr{F}f)(0.5\theta)$$

当 $f(x)$ 满足 $\int_{\mathbb{R}}f(x)dx=1$ 时，其唯一的不动点为

$$\Phi(\theta)=\prod_{j=1}^{+\infty}m_0(2^{-j}\theta)$$

其中 $\Phi(\theta)$ 是 $\varphi\mapsto\mathbb{T}_\varphi=\varphi$ 的傅里叶变换.

根据算子 $\mathbb{T}$ 的定义形式可以用迭代方法求解 $\Phi(\theta)$ 或者 $\varphi(x)$. 比如，选取迭代初始函数为 f_0 是 $[0,1]$ 的特征函数 $\chi_{[0,1]}(x)$ 时，$f_0(x)=\chi_{[0,1]}(x)$，迭代关系是

$$f_{j+1}(x)=(\mathbb{T}_{f_j})(x)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{2N-1}h_k f_j(2x-k),\quad j=0,1,2,\cdots$$

其中，$f_2(x)$ 的系数是

$$h_0=\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}),\qquad h_1=\frac{1}{4\sqrt{2}}(3+\sqrt{3})$$
$$h_2=\frac{1}{4\sqrt{2}}(3-\sqrt{3}),\qquad h_3=\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\sqrt{3})$$

正好是例 2 中的低通滤波器脉冲响应系数列 $\{h_k;k=0,1,2,3\}$.

获得被称为父小波函数的尺度函数 $\varphi(x)=w_0(x)$ 之后，利用递归定义小波包的关系，在 $n=0$ 时，构造得到小波函数 $\psi(x)=w_1(x)$，它是构造规范正交基的母小波函数，而且，尺度函数 $\varphi(x)=w_0(x)$ 和相应的正交多分辨率分析也正好诱导出这个母小波函数 $\psi(x)=w_1(x)$.

在获得父小波函数或者尺度函数 $\varphi(x)=w_0(x)$ 和母小波函数 $\psi(x)=w_1(x)$ 的条

件下，根据定义紧支撑正交小波包列 $w_n(x)$ 的递归关系就可以构造得到全部小波包函数序列. 由于父小波函数或者尺度函数 $\varphi(x)=w_0(x)$ 紧支撑在闭区间 $[0,2N-1]$ 上，所以，紧支撑正交小波包列 $w_n(x)$ 都紧支撑在 $[0,2N-1]$ 上.

这样构造得到的紧支撑正交小波包列 $w_n(x), n\in\mathbb{Z}$ 按下述形式

$$\{w_n(x-k); n=0,1,2,\cdots,k\in\mathbb{Z}\}$$

构成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基. 具体地说，对于任意的整数 $j\in\mathbb{Z}$，当小波包的级别参数 n 满足 $2^j\leqslant n<2^{j+1}$ 时，规范正交函数族：

$$\{w_n(x-k); 2^j\leqslant n<2^{j+1}, k\in\mathbb{Z}\}$$

构成小波子空间 W_j，即尺度子空间 V_j 在尺度子空间 V_{j+1} 中的正交补子空间 W_j 的规范正交基. 这样，多分辨率分析的尺度子空间和小波子空间可以具有如下张成关系：

$$\begin{aligned} V_j &= \text{Closespan}\{2^{j/2}\varphi(2^j x-k); k\in\mathbb{Z}\} \\ W_j &= \text{Closespan}\{2^{j/2}\varphi(2^j x-k); k\in\mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

由此说明，这里研究的紧支撑正交小波包函数列和此前系统定义并研究过的小波包函数系列具有同样的代数结构和理论体系，都是实现小波子空间序列 W_j 再分割的规范正交基，只不过，这里的小波包函数系列是紧支撑的函数系列.

例 3　继续例 1，选取低通和带通滤波器脉冲响应系数序列：

$$h_0=h_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad g_1=-g_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

如下定义以 1 为周期的函数 $\gamma(x)$，即

$$\gamma(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x<0.5 \\ -1, & 0.5\leqslant x<1.0 \end{cases}$$

且 $\chi_{[0,1)}(x)$ 表示是区间 $[0,1)$ 的特征(示性)函数，即

$$\chi_{[0,1)}(x)=\begin{cases} 1, & x\in[0,1) \\ 0, & x\notin[0,1) \end{cases}$$

对 $\forall n\in\mathbb{N}$，设 $n=\varepsilon_0+2\varepsilon_1+\cdots+2^j\varepsilon_j$，$\varepsilon_{j'}\in\{0,1\}, 0\leqslant j'\leqslant j$. 按照如下方式定义函数 $w_n(x)$：

$$w_n(x)=[r(x)]^{\varepsilon_0}[r(2x)]^{\varepsilon_1}\cdots[r(2^j x)]^{\varepsilon_j}\chi_{[0,1)}(x)$$

其中 $[r(x)]^0=1$ 且 $[r(x)]^1=r(x)$，那么，容易证明：对于 $n=0,1,2,\cdots$，

$$\begin{cases} w_{2n}(x)=w_n(2x)+w_n(2x-1) \\ w_{2n+1}(x)=w_n(2x)-w_n(2x-1) \end{cases}$$

即由长度是 1 的滤波器出发，按照紧支撑正交小波包构造方法得到的正交小波包序列正好是 Walsh 函数系.

Walsh 函数系 $\{w_n(x);n\in\mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{L}^2[0,1]$ 的一个规范正交基，从而

$$\{w_n(x-k);n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}\}$$

是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基.

在一般情况下，如果滤波器的长度 $N>1$，那么，当 $k\neq k'$ 或 $n\neq m$ 时，$w_n(x-k)$ 和 $w_m(x-k')$ 的支撑集合未必不相交，但是根据前述紧支撑正交小波包函数序列的构造理论可知 $\{w_n(x-k);n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}\}$ 是规范正交函数系，因此，这时候小波包函数序列的正交性是很让人吃惊的.

(γ) 最优小波包基

按照前述紧支撑正交小波包函数序列构造理论获得的紧支撑小波包函数序列 $\{w_n(x);n\in\mathbb{N}\}$ 是由有限长度脉冲响应序列滤波器生成的，并且小波包函数的整数平移函数系

$$\{w_n(x-k);n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}\}$$

构成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基. 总体来说，这样得到的正交小波包函数系有些类似于 Walsh 函数系，只不过当滤波器长度 $N>1$ 时，该正交小波包函数系仍然保持规范正交关系，同时比 Walsh 函数系中的各函数更光滑，而且其频率局部化优于 Walsh 函数系中的各函数. 不过，这种频率局部化能力是有限的，即对任何常数 $c>0$，要保证

$$\inf_{\omega\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}(\theta-\omega)^2\,|(\mathscr{F}w_n)(\theta)|^2\,d\theta\leqslant c$$

对所有的 n 都成立是不可能的. 这也是引入前述一般小波包的理由之一.

一般的正交小波包函数族是

$$\{2^{j/j}w_n(2^jx-k);\ (j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\}$$

它们包含了函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的转换关系十分简单的大量规范正交基. 这为许多寻优问题的应用研究提供了全新的解决途径.

为了清楚起见，把小波包函数整数平移规范正交函数系：

$$\{2^{j/j}w_n(2^jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$$

或者它张成的闭线性子空间：

$$\mathscr{W}_{(j,n)} = \text{Closespan}\{2^{j/j} w_n(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$$

与“频率区间”或者频带 $\mathscr{I}(j,n) = \{\theta; 2^j n \leqslant \theta < 2^j(n+1)\}$ 视为等同，则下述结论描述了构成 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基的小波包的某些类型的集合.

设 $\mathscr{E}$ 是点对 (j,n) 的一个集合，其中 $j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$，使得 $\mathscr{E}$ 中全体点对 (j,n) 相应的频率区间或者频带 $\mathscr{I}(j,n)$ 构成 $[0,+\infty]$ 的一个划分，并且它至多是可数的，则正交小波包函数系

$$\{2^{j/j} w_n(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}, (j,n) \in \mathscr{E}\}$$

构成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的一个规范正交小波包基.

注释：“频率区间”或者频带 $\mathscr{I}(j,n) = \{\theta; 2^j n \leqslant \theta < 2^j(n+1)\}$ 的这种定义形式便于将 $\mathscr{E}$ 的刻画形式化：$[0,+\infty)$ 的一个划分可以表示如下

$$\bigcup_{(j,n)\in\mathscr{E}} \mathscr{I}(j,n) = \bigcup_{(j,n)\in\mathscr{E}} [2^j n, 2^j(n+1)) = [0,+\infty)$$

利用这样的记号，可以写出函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的一个正交直和分解关系：

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{(j,n)\in\mathscr{E}} \mathscr{W}_{(j,n)} = \bigoplus_{(j,n)\in\mathscr{E}} \text{Closespan}\{2^{j/j} w_n(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$$

或者等价地给出函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的组合型规范正交小波包基：

$$\bigcup_{(j,n)\in\mathscr{E}} \{2^{j/j} w_n(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\} = \{2^{j/j} w_n(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}, (j,n) \in \mathscr{E}\}$$

利用这些研究结果可知，为了得到函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的一个规范正交小波包基，实际上就是选取非负频率轴 $[0,+\infty)$ 的一个划分，当然，这种划分是完全随问题的需要而定的，除此之外，最多只会遇到个人偏好的影响. 正是这一特点，完全决定了小波包函数族在时频分析理论中的绝对优势地位.

在时频分析理论研究的历史进程中，按照 Ville 曾经的提议，小波包理论可以产生一种信号分析技术，它的实际处理过程首先是把信号按不同的频带进行滤波；其次是按照时间或者空间把这些频带对应的信号分割成小段以便研究信号能量分布的变化. 这个曾经的想法在这里得到了含义清晰严谨、符号系统优美的充分诠释，奠定了这种科学思想广泛应用的理论基础和算法基础.

由于规范正交小波包基极其丰富，在分析处理一个已知信号时，首先就要面临选择哪一个小波包基的问题，即最优小波包基选择. 借鉴前面马尔瓦尔正交小波基优选的方法，最优准则规定为前述已经出现过的最小熵准则.

(δ) 小波包与二分算法

这里将正交小波包函数系构造理论抽象成一般的正交二分方法，相当于希尔伯特空间的正交直和分解或者构造希尔伯特空间的由两组相互正交的规范正交向量系联合构成的规范正交基.

首先，选取两个平方可和系数序列 $\{\alpha_k;k\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{\beta_k;k\in\mathbb{Z}\}$：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\alpha_k|^2<+\infty \quad 且 \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\beta_k|^2<+\infty$$

使得由下式定义的两个滤波器 $m_0(\theta)$ 和 $m_1(\theta)$：

$$m_0(\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k\exp(-ik\theta),\quad m_1(\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k\exp(-ik\theta)$$

构造的矩阵：

$$\mathbb{M}(\theta)=\begin{pmatrix} m_0(\theta) & m_1(\theta)\\ m_0(\theta+\pi) & m_1(\theta+\pi)\end{pmatrix}$$

是酉矩阵，即满足如下恒等式：

$$\mathbb{M}(\theta)[\mathbb{M}(\theta)]^*=[\mathbb{M}(\theta)]^*\mathbb{M}(\theta)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $\{e_k;k\in\mathbb{Z}\}$ 是希尔伯特空间 $\mathbf{H}$ 的一个规范正交基，仿照多分辨率分析中尺度方程和小波方程的构造思想和构造方式，按照如下方式定义向量系 $\{f_k;k\in\mathbb{Z}\}$：

$$f_{2k}=\sqrt{2}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\alpha_{2k-\ell}e_\ell,\quad f_{2k+1}=\sqrt{2}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\beta_{2k-\ell}e_\ell$$

那么，$\{f_k;k\in\mathbb{Z}\}$ 必是 $\mathbf{H}$ 的一个规范正交基，引入记号

$$\begin{cases}\mathbf{H}_0=\text{Closespan}\{f_{2k};k\in\mathbb{Z}\}\\ \mathbf{H}_1=\text{Closespan}\{f_{2k+1};k\in\mathbb{Z}\}\end{cases}$$

则

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0\oplus\mathbf{H}_1$$

为了重复操作的方便，引入记号：

$$e_k^{(0)}=f_{2k},\quad e_k^{(1)}=f_{2k+1},\quad k\in\mathbb{Z}$$

将上述分解 $(\mathbf{H},e_k)$ 的操作在 $(\mathbf{H}_0,e_k^{(0)})$ 上重复. 并一直进行下去，只是每步的分解系数都相同，即为 $\{\alpha_k;k\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{\beta_k;k\in\mathbb{Z}\}$.

按照这种分解算法，如果每步都严格地对前一步产生的子空间进行正交二分处理，那么，分解到第 j 步时，将会得到 $\mathbf{H}$ 的 2^j 个子空间，它们是相互正交的，并

且直和正好是 $\mathbf{H}$.

为了清楚地描述这种关系，现在采用递归的方法归纳定义记号

$$\mathbf{H}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)}\ \mathbf{H}_{(0)}=\mathbf{H}_0 \quad 且 \quad \mathbf{H}_{(1)}=\mathbf{H}_1 .$$

如果 $\mathbf{H}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1})}$ 已经定义，则令 $\mathbf{H}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1},0)}$ 和 $\mathbf{H}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1},1)}$ 表示子空间 $\mathbf{H}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1})}$ 按前述正交二分法产生的两个正交子空间，其中 $\varepsilon_j\in\{0,1\}, j=1,2,\cdots,n$. 这样，$\mathbf{H}$ 的分解可表示如下:

(1)第一类分解，即完全分解，结构如图 1 所示.

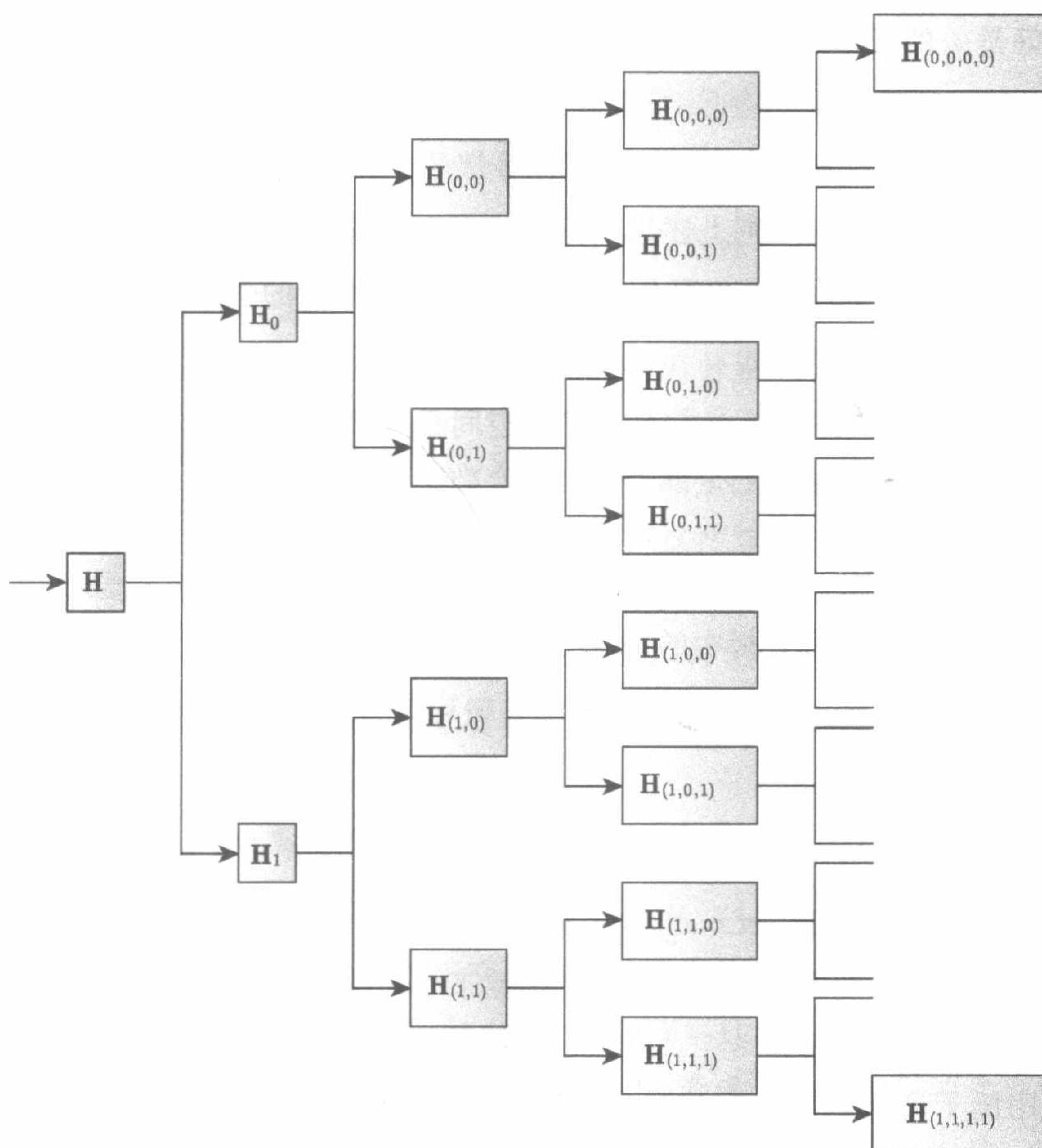


图 1　子空间二分图

在完全分解方式下，希尔伯特空间 $\mathbf{H}$ 被分解成 2^j 个子空间的正交直和:

$$\mathbf{H}=\oplus\ \mathbf{H}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_j)}$$

其中 $\varepsilon_k \in \{0,1\}, k=1,2,\cdots,j$, j 是任何自然数.

(2) 第二类分解，即不完全分解. 对某个固定的自然数 j，$\mathbf{H}$ 被分解成个数严格小于 2^j 的正交子空间的直和：

$$\mathbf{H}=\bigoplus_{j}\bigoplus_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_j)}\mathbf{H}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_j)}$$

其中，如果上式中最小的 j 为 j_1，且最大的 j 为 j_2，则上述分解必须满足如下要求，即从标号恰好是 j_2 的子空间 $\mathbf{H}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{j_2})}$ 开始，按前述正交二分法的方式进行合并，因标号恰好是 j_2 的子空间数必为偶数，不妨设为 $2m$ 个，则合并将产生 m 个标号恰好是 (j_2-1) 的子空间，把这些刚产生的子空间和原分解式中的标号恰好是 (j_2-1) 的子空间再次合并，重复这个合并，直到标号都是 j_1 为止. 如果这个过程没有剩下标号个数大于 j_1 的子空间，则上述这个分解式成立的条件(充分而且必要)是：产生出来的标号数为 j_1 的子空间和原分解式中的标号数为 j_1 的子空间的总数和应该为 2^{j_1}.

注释：需要说明的是，标号数是 j_2 的子空间必是偶数个；相反，如果某步合并之后在分解式中标号数最大的全部子空间是奇数个，但不是 1 个，则上述这个分解式肯定不成立.

现在，从另一侧面来说明小波包的结构和正交二分算法的精确本质. 假设初始希尔伯特空间是多分辨率分析中的尺度子空间 $V_j, j\geqslant 1$，从它的尺度函数整数平移规范正交基 $\{2^{j/j}\varphi(2^j x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 出发，分解算法进行 m 次重复后，精确地产生了函数序列：

$$\{w_n(x-k);k\in\mathbb{Z},0\leqslant n\leqslant 2^m\}$$

在这样的记号下，如果 $n=\varepsilon_0+2\varepsilon_1+\cdots+2^m\varepsilon_m$，则相应的“频带”就是子空间 $\mathbf{H}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)}$，从而，随着 m 的增加，将产生越来越精细的频率划分. 这正是小波包对频率精细划分的实质所在.

这里用例子进行更详细的说明. 如果假设初始状态的希尔伯特空间是函数空间 $\mathbf{H}=\mathcal{L}^2[0,2\pi]$，其规范正交基取为傅里叶级数基，即 $\{(2\pi)^{-0.5}e^{ik\theta};k\in\mathbb{Z}\}$. 构造两个滤波器的频率响应函数，即两个 2π 周期的函数 $m_0(\theta)$ 和 $m_1(\theta)$，满足

$$m_0(\theta)=\begin{cases}1, & \theta\in[0,\pi),\\ 0, & \theta\in[\pi,2\pi),\end{cases}\qquad m_1(\theta)=\begin{cases}0, & \theta\in[0,\pi)\\ 1, & \theta\in[\pi,2\pi)\end{cases}$$

则这时必有

$$f_{2k}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} m_0(\theta) \exp(2ki\theta)$$

$$f_{2k+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} m_1(\theta) \exp[(2k+1)i\theta]$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $\mathbf{H}_0$ 由支撑在 $[0,\pi)$ 上的函数生成，而 $\mathbf{H}_1$ 由支撑在 $[\pi,2\pi)$ 上的函数生成，两者相互正交而且直和正好是 $\mathbf{H}$，即满足

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{H}_1$$

这样，$\mathbf{H}_0 \perp \mathbf{H}_1$. 进一步细分的结果是：设 I 是起点在 $2^{-1}\varepsilon_1 + \cdots + 2^{-j}\varepsilon_j$ 且长度为 2^{-j} 的二进区间，则 $\mathbf{H}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_j)}$ 是 $\mathbf{H} = \mathcal{L}^2[0,2\pi]$ 的由支撑在 I 上的函数构成的"频带". 该例说明，"频带"的含义是极其广泛的同时也是极其抽象的.

已经被完全研究过的一个特例是，假设信号已经在 $\mathbb{Z}$ 上采样了，$\{\alpha_k;k \in \mathbb{Z}\}$ 和 $\{\beta_k;k \in \mathbb{Z}\}$ 都是有限非零序列，且 $m_0(\theta)$ 和 $m_1(\theta)$ 分别类似于低通和带通滤波器的频率响应函数或者传递函数，$m_0(\theta) = 1$ 且 $m_0(\theta)$ 支集是 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

小波包的"频率局部化"能力并不像引进这些算法的科学家们所想象的那样，它并不是将频率轴"严格分划"为频带不相交的子空间，前述例子已经清晰表明了这一点. 但是，如果 $m_0(\theta)$ 和 $m_1(\theta)$ 是"理想滤波器组"的传递函数，那么，小波包函数系列中的级别参数 n 确实与傅里叶分析意义下的一个频率段之间存在对应关系.

(ε) *小波包构造及应用*

关于小波包函数序列的一般描述和算法实现，已经在前面讨论过了，这里仅局限于有限长度的情形，即紧支撑正交小波包的构造和用法.

第一步，选取两个有限序列 $\{h_k;0 \leqslant k \leqslant 2N-1\}$ 和 $\{g_k;0 \leqslant k \leqslant 2N-1\}$，满足构造紧支撑正交小波包函数的各个条件，同时，考虑到应用的目的和需要，应在滤波长度 $2N-1$ 和频率分辨能力之间适当平衡，这一点比较困难. 但是，不少人将这两者转化为长度 $2N-1$ 与小波包函数序列的光滑程度的关系，在理论上进行了一定的分析，并用模拟方式进行了数值试验. 这里只是对一级小波包(紧支撑的)即 Dauberchies 小波引用了部分结果.

第二步，构造各种级别上的小波包函数，得到函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交小波

包基的巨大“库”，供后续分析选择和使用.

第三步，对已知信号选择最优基，即寻找能给出信号最简洁分解的小波包函数规范正交系.

搜索的原则是，采用“从精到粗”的策略，用合并的方法去选择最优小波包规范正交基. 比如，选择最精细的频带 $\mathbf{H}_I$，I 是长度为 2^{-m} 的二进区间，m 是足够大的自然数. 搜索的实现方法是：如果 $\mathbf{H}_I$ 的规范正交小波包基产生一个比使用 $\mathbf{H}_{I'}$ 和 $\mathbf{H}_{I''}$ 的两个规范正交小波包基得到的分解更紧凑的分解式，那么，把区间 I 的左右两等份 I' 和 I'' 合并起来，重复这种“比较-合并”的操作，当不能再合并时，算法终止.

最重要的是小波包的离散化形式. 在大量实际应用中，选取初始的希尔伯特空间 $\mathbf{H}=\ell^2(\mathbb{Z})$ 并且初始规范正交基是平凡规范正交基 $\{\varepsilon_k;k\in\mathbb{Z}\}$：$\varepsilon_k$ 仅在第 k 个位置取 1，其余各处为 0，$k\in\mathbb{Z}$. 按照此前论述的方式逐步“一分为二”地分解空间 $\mathbf{H}$，直到第 m 步，这时 $\mathbf{H}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)}$ 相应的时间区间是长度为 2^{+m} 的二进区间，这与连续正交小波包函数系列时的记号是相反的，这里充分体现了连续与离散正交小波包函数规范正交基之间的差异. 出现这种情况的根本原因是，初始希尔伯特空间 $\mathbf{H}=\ell^2(\mathbb{Z})$ 的多次重复正交直和分解过程，每次都是用两个相互正交的规范正交向量系联合提供此前一步子空间的规范正交基，形式上，每个规范正交向量系中“向量的个数”只是此前一步的子空间的规范正交基中“向量的个数”的一半，因此，在这两个规范正交向量系中，向量邻近两坐标之间的“物理间距”或者“客观空间间距”是此前一步的间距的两倍，这个过程相当于频率域的分辨率翻倍或者频率的不断细分. 最后仍由前述方法搜索最优基.

作为结束语，在这里顺便说明，小波包函数系列规范正交基分析方法与马尔瓦尔小波分析方法是对偶的，在小波包的场合，最终实现自适应滤波，而马尔瓦尔小波却是自适应分割，分别相应于频域和时域的分割处理.

7.3 多分辨率分析与时频分析

这里将在多分辨率分析理论框架下说明时频分析问题、小波理论，特别是多分辨率分析小波和小波包的时频分析特性.

7.3.1 Gabor 变换和时频分析

Gabor 变换是大卫·加博(D. Gabor)在 1946 年给出的一种信号分析处理方法，是时频分析方法的第一个典范.

(α) Gabor 变换

Gabor 变换继承了傅里叶变换所具有的“信号频谱”这样的物理解释，同时克服了傅里叶变换只能反映信号的整体特征而对信号的局部特征没有任何分析能力的缺陷，显著地改善了傅里叶变换的分析能力，为信号处理提供了一种新的分析和处理方法，即信号的时频分析方法.

事实上，傅里叶变换是一个强有力的数学工具，它具有重要的物理意义，即信号 $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的傅里叶变换

$$(\mathscr{F}f)(\omega) = \mathrm{F}(\omega) = (2\pi)^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

表示信号 $f(x)$ 的频谱. 正是傅里叶变换的这种重要的物理意义，决定了傅里叶变换在信号分析和信号处理研究中的独特地位，特别是作为平稳信号分析的最重要的工具.

在实际应用中，所遇到的信号大多数并不是平稳的，至少在观测的全部时间段内它不是平稳的，所以，随着应用范围的逐步扩大和理论分析的不断深入，傅里叶变换的局限性就渐渐展示出来了：首先，从理论上说，为了由傅里叶变换研究一个时域信号 $f(x)$ 的频谱特性，必须获得信号在时域中的全部信息，以至于包括将来的信息；其次，从应用的角度来说，如果一个信号只在某一时刻的一个小的范围内发生了变化，那么信号的整个频谱都要受到影响，而频谱的变化从根本上来说又无法标定发生变化的时间位置和发生变化的剧烈程度，也就是说，傅里叶变换对信号的局部畸变没有标定和度量能力. 但是，在许多实际应用中，畸变正是我们所关心的信号在局部范围内的特征，比如对音乐和语音信号，人们关心的是什么时刻演奏什么音符、发出什么音节；图像边缘检测关心图像灰度数值突变发生的位置和突变程度；地震勘测关心的主要问题是在什么位置出现什么样的反射波.

另外，傅里叶变换不能反映信号在某个指定时刻附近任何期望频率点附近适当范围内的频谱信息，即信号在局部时间范围内和局部频带上的谱信息分析，或称为局部化时频分析，而这正是许多实际应用最感兴趣的问题之一；最后，因为一个信号的频率与它的周期长度成反比，所以，在应用中的一个自然而然的要求是，对于分析信号的高频信息，参与分析的信号的时间长度应相对较短，以给出精确的高频成分，对于低频信息，参与分析的信号的时间长度应相对较长，以给出一个周期内的完整的信息，换言之，就是要给出进行分析的一个灵活多变的时间和频率的“窗”，使得由它给出的时域和频域的联合“窗宽度”具有如下的制约关系，即在“中心频率(或称为平均频率、主频)”高的地方，时间窗自动变窄，而在“中心频率”低的地方，时间窗应自动变宽.

Gabor 在 1946 年的论文中，为了提取信号的局部信息，这包括时间和频率两方

面的局部信息，引入了一个时间局部化的“窗函数” $g(x-b)$，其中参数 b 用于平行移动窗，以便于覆盖整个时域. Gabor 取 $g(x)$ 为一个高斯函数，其原因有二：一是高斯函数的傅里叶变换仍为高斯函数，这使得傅里叶逆变换也是用窗函数局部化了的，同时体现频率域的局部化；二是 Gabor 变换作为一般的“窗傅里叶变换”的最优性，这在后面将详细说明. 第一个原因是 Gabor 当时的直接原因，第二个原因是在 Heisenberg 测不准原理明确之后才看出的，即在时频窗面积最小的意义下，Gabor 变换是最优的窗傅里叶变换. 正是在 Gabor 变换出现之后，才有了真正意义上的时频分析.

对于函数 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，其 Gabor 变换定义为

$$D_f(b,\omega)=(2\pi)^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g_s(x-b)e^{-i\omega x}dx$$

其中

$$g_s(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi s}}\exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right)$$

是高斯函数，$s>0$ 是固定常数，控制窗的宽度，这个函数被称为“窗函数”.

简单计算可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g_s(x-b)db=1$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}D_f(b,\omega)db=\mathrm{F}(\omega)=(\mathscr{F}f)(\omega),\quad \omega\in\mathbb{R}$$

由此说明，信号 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的 Gabor 变换 $D_f(b,\omega)$ 对任何 $s>0$ 在时间 $x=b$ 的附近使信号 $f(x)$ 的傅里叶变换局部化了，对 $\forall\omega\in\mathbb{R}$，这种局部化完成的如此之好以至于达到了对 $\mathrm{F}(\omega)$ 的精确分解，从而完整地给出了 $f(x)$ 的频谱的局部信息，这充分体现了 Gabor 变换在时间域的局部化思想.

现在研究 Gabor 变换是如何实现在频率域的局部化的. 为此，引入记号 $g(s;b,\omega;x)$：

$$g(s;b,\omega;x)=g_s(x-b)\cdot\exp(i\omega x)$$

那么 Gabor 变换可表示为

$$D_f(b,\omega)=(2\pi)^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g}(s;b,\omega;x)dx$$

这个等式可理解为，$D_f(b,\omega)$ 是对函数 $f(x)$ 开了一个形如 $g(s;b,\omega;x)$ 的窗之后的傅里叶变换分析，这也是称 $g_s(x)$ 为窗函数的理由. 将 $g(s;b,\omega;x)$ 的傅里叶变换记为 $\mathrm{G}(s;b,\omega;\eta)$，则

$$\mathrm{G}(s;b,\omega;\eta)=\exp\left\{-s(\eta-\omega)^2-ib(\eta-\omega)\right\}$$

根据 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中傅里叶变换 Parseval 恒等式，即对 $\forall f,h\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 总有公式

$$\left\langle f,h\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\left\langle(\mathscr{F}f),(\mathscr{F}h)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\left\langle \mathrm{F},\mathrm{H}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}$$

信号 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的 Gabor 变换 $D_f(b,\omega)$ 可变形为

$$\begin{aligned}D_f(b,\omega)&=\left\langle \mathrm{F},\mathrm{G}(s;b,\omega;\cdot)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)\exp\left\{-s(\eta-\omega)^2+ib(\eta-\omega)\right\}d\eta\\&=\frac{\sqrt{\pi}\exp(-ib\omega)}{\sqrt{s}}D_F(\omega,-b)\end{aligned}$$

于是得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g_s(x-b)e^{-i\omega x}dx=\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-ib\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)\cdot g_{(4s)^{-1}}(\eta-\omega)e^{ib\eta}d\eta$$

这说明，对于给定的观测时刻 $x=b$ 和固定的频率分量 $\eta=\omega$，除常数项 $\pi^{0.5}s^{-0.5}e^{-ib\omega}$ 之外，信号 $f(x)$ 在 $x=b$ 具有时间窗函数 $g_s(x)$ 的 Gabor 变换与信号 $\mathrm{F}(\mu)$ 在 $\mu=\omega$ 具有频率窗函数 $g_{(4s)^{-1}}(\eta)$ 的 Gabor 变换是一致的，即两者给出的信息是一样的. 只不过前者是时域形式，而后者是频域形式. 这体现了 Gabor 变换在时域和频域观测的等效性.

另一方面，如果引入记号

$$\mathrm{H}(s;b,\omega;\eta)=\mathrm{G}(s;b,\omega;\eta)=\pi^{0.5}s^{-0.5}e^{-ib(\eta-\omega)}g_{(4s)^{-1}}(\eta-\omega)$$

则 Gabor 变换可以被改写为

$$\left\langle f,g(s;b,\omega;\cdot)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\left\langle \mathrm{F},\mathrm{H}(s;b,\omega;\cdot)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}$$

即在时域中用“量具” $g(s;b,\omega;\cdot)$ 对信号 $f(x)$ 的测量与在频域中用“量具” $\mathrm{H}(s;b,\omega;\cdot)$ 对信号 F 的测量是一致的. 这就是 Gabor 变换能对信号进行时频分析的理论依据.

(β) 时频分析与测不准原理

考虑函数 $g(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，如果

$$0<\int_{-\infty}^{+\infty}\left|xg(x)\right|^2dx<+\infty$$

则称 $g(x)$ 是一个窗函数. 定义 $g(x)$ 的中心 $E(g)$ 和半径 $\Delta(g)$ 如下：

$$E(g)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mid g(x)\mid^2\,\mathrm{d}x\Big/\|g\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}^2$$

$$\Delta(g)=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(g))^2\mid g(x)\mid^2\,\mathrm{d}x\Big/\|g\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}^2}$$

其中

$$\|g\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\mid g(x)\mid^2\,\mathrm{d}x$$

称为 $g(x)$ 的 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 范数，或者欧氏长度. 数值 $2\Delta(g)$ 称为窗函数 $g(x)$ 的宽度或简称为窗宽.

函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中任意函数 $f(x)$ 的窗傅里叶变换 $C_f(b,\omega)$ 定义为

$$C_f(b,\omega)=(2\pi)^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g}(x-b)e^{-i\omega x}dx$$

引入记号

$$c(b,\omega;x)=g(x-b)e^{i\omega x}$$

这样，函数 $f(x)$ 的窗傅里叶变换 $C_f(b,\omega)$ 可以写成

$$C_f(b,\omega)=(2\pi)^{-0.5}\left\langle f,c(b,\omega;\cdot)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=(2\pi)^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{c}(b,\omega;x)dx$$

容易验证函数 $c(b,\omega;x)=g(x-b)e^{i\omega x}$ 是一个窗函数，而且，它的中心和半径分别是 $E(c)=E(g)+b$ 和 $\Delta(c)=\Delta(g)$.

注释：这个计算结果表明，函数 $f(x)$ 的窗傅里叶变换 $C_f(b,\omega)$ 给出的是信号 $f(x)$ 在时间窗

$$[E(c)-\Delta(c),E(c)+\Delta(c)]=[E(g)+b-\Delta(g),E(g)+b+\Delta(g)]$$

中的局部时间信息.

如果窗函数 $g(x)$ 的傅里叶变换 $\mathrm{G}(\eta)$ 也满足窗函数条件，即

$$0<\int_{-\infty}^{+\infty}\mid\eta g(\eta)\mid^2\,d\eta<+\infty$$

直接计算可以验证，函数 $c(b,\omega;x)=g(x-b)e^{i\omega x}$ 的傅里叶变换 $\mathcal{C}(b,\omega;\eta)$ 可以写成

$$\mathcal{C}(b,\omega;\eta)=(2\pi)^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}[g(x-b)e^{i\omega x}]e^{-i\eta x}dx=e^{-ib(\eta-\omega)}G(\eta-\omega)$$

同时，容易演算验证 $\mathcal{C}(b,\omega;\eta)$ 作为变量 η 的函数满足窗函数的要求，而且其中心和半径分别可以表示为

$$E(\mathcal{C})=E(\mathrm{G})+\omega,\quad \Delta(\mathcal{C})=\Delta(\mathrm{G})$$

注释：根据 Parseval 恒等式(能量守恒)，函数 $f(x)$ 的窗傅里叶变换 $C_f(b,\omega)$ 可以写成如下的频率域形式：

$$
\begin{aligned}
C_f(b,\omega) &= (2\pi)^{-0.5}\left\langle f, c(b,\omega;\cdot)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} \\
&= (2\pi)^{-0.5}\left\langle (\mathscr{F}f)(\eta), \mathcal{C}(b,\omega;\eta)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} \\
&= (2\pi)^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathscr{F}f)(\eta)[\mathcal{C}(b,\omega;\eta)]^* d\eta
\end{aligned}
$$

其中 $[\mathcal{C}(b,\omega;\eta)]^*$ 表示 $\mathcal{C}(b,\omega;\eta)$ 的复数共轭转置.

综合前述分析和计算结果可知，在频率域中，$f(x)$ 的窗傅里叶变换 $C_f(b,\omega)$ 给出了函数 $f(x)$ 在频率窗：

$$[E(\mathcal{C})-\Delta(\mathcal{C}), E(\mathcal{C})+\Delta(\mathcal{C})] = [E(\mathrm{G})+\omega-\Delta(\mathrm{G}), E(\mathrm{G})+\omega+\Delta(\mathrm{G})]$$

中的局部频率信息.

总之，$f(x)$ 的窗傅里叶变换 $C_f(b,\omega)$ 同时给出了函数 $f(x)$ 在如下矩形联合时频窗：

$$[E(g)+b-\Delta(g), E(g)+b+\Delta(g)]\times[E(\mathrm{G})+\omega-\Delta(\mathrm{G}), E(\mathrm{G})+\omega+\Delta(\mathrm{G})]$$

中的联合时频局部信息. 这个矩形联合时频窗的面积是 $4\Delta(g)\Delta(\mathrm{G})$，其数值的大小刻画了同时联合时频局部化的能力，这个面积的数值越小，说明同时联合时频局部化的能力就越强. 关于同时联合时频局部化能力的极限，可以证明如下著名的 Heisenberg 测不准原理.

Heisenberg 测不准原理　如果 $g(x)$ 及其傅里叶变换 $\mathrm{G}(\eta)$ 都是窗函数，那么

$$\Delta(g)\Delta(\mathrm{G}) \geqslant \frac{1}{2}$$

而且，等号成立的充要条件是，存在 4 个实数 s,b,c,α，其中 $s>0, c\neq 0$，使得

$$g(x) = ce^{i\alpha x}g_s(x-b)$$

其中

$$g_s(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}}\exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right)$$

是高斯函数，$s>0$ 是固定常数，这个窗函数被称为“Gabor 窗”.

注释：如果 $g(x)$ 及其傅里叶变换 $\mathrm{G}(\eta)$ 的中心分别是 t_0 与 ω_0，那么函数

$$g_1(x) = e^{-i\omega_0 x}g(x+x_0)$$

满足窗函数的要求，而且，$g_1(x)$ 及其傅里叶变换 $\mathrm{G}_1(\omega)$ 的中心都是 0，半径分别是 $\Delta(g)$ 和 $\Delta(\mathrm{G})$，这样，在证明 Heisenberg 测不准原理时，不妨假设窗函数及其傅里叶变换的中心都是零.

由窗函数的中心和半径的定义可知，$g(x)$ 和 $|g(x)|$ 将有相同的中心和半径，因此，在证明过程中可以假设 $g(x)\geqslant 0$. 将 $g(x)$ 的导函数 $dg(x)/dx$ 的傅里叶变换记为

$u(\omega)$，那么，由傅里叶变换的性质可得

$$u(\omega) = (i\omega)\mathrm{G}(\omega)$$

于是，利用著名的 Cauchy-Schwarz 不等式可以得到如下演算：

$$\begin{aligned}
\left(\Delta(g)\Delta(\mathrm{G})\right)^2 &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mid g(x) \mid^2 dx \Big/ \| g \|_2^2\right] \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \mid G(\omega) \mid^2 d\omega \Big/ \| G \|_2^2\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mid g(x) \mid^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \mid G(\omega) \mid^2 d\omega \Big/ (\| g \|_2^2 \| G \|_2^2) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mid xg(x) \mid^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mid (\omega i) G(\omega) \mid^2 d\omega \Big/ \| g \|_2^4 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mid xg(x) \mid^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mid u(\omega) \mid^2 d\omega \Big/ \| g \|_2^4 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mid xg(x) \mid^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mid dg(x) / dx \mid^2 dx \Big/ \| g \|_2^4 \\
&\geqslant \left|\int_{-\infty}^{+\infty} [xg(x)\, dg(x) / dx] dx\right|^2 \Big/ \| g \|_2^4 \\
&= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) dg(x)\right|^2 \Big/ \| g \|_2^4 \\
&= \left|0.5 \int_{-\infty}^{+\infty} xd[g(x)]^2\right|^2 \Big/ \| g \|_2^4 \\
&= 0.25 \left|\int_{-\infty}^{+\infty} xd[g(x)]^2\right|^2 \Big/ \| g \|_2^4 \\
&= 0.25 \left| x[g(x)]^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x)]^2 dx\right|^2 \Big/ \| g \|_2^4 \\
&= 0.25 \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \mid g(x) \mid^2 dx\right|^2 \Big/ \| g \|_2^4 \\
&= 0.25
\end{aligned}$$

所以

$$\Delta(g)\Delta(\mathrm{G}) \geqslant \frac{1}{2}$$

在上面推证过程中不等式取等号的条件就是 Cauchy-Schwarz 不等式成为等式的条件，即 $xg(x)$ 与 $dg(x)/dx$ 线性相关，这时，存在实数 p, q，满足

$$pxg(x) + qdg(x) / dx = 0$$

最后，通过求解微分方程即可得出全部证明.

注释：Heisenberg 测不准原理说明了一个基本事实，即 Gabor 变换是矩形联合时频窗面积最小的窗傅里叶变换，这表达了 Gabor 变换的某种最优性.

7.3.2　小波与时频分析

这里将把小波函数视为窗函数研究小波变换的时频分析行为和特性.

(α) 连续小波时频分析

假定小波函数 $\psi(x)$ 及其傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 都满足窗函数的要求，它们的中心和半径分别记为 $E(\psi)$ 和 $\Delta(\psi)$ 与 $E(\Psi)$ 和 $\Delta(\Psi)$.

容易经过直接演算证明，根据连续小波定义，对任意参数 (s,μ)，连续小波：

$$\psi_{(s,\mu)}(x)=\frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{x-\mu}{s}\right)$$

及其傅里叶变换 $(\mathcal{F}\psi_{(s,\mu)})(\omega)$：

$$(\mathcal{F}\psi_{(s,\mu)})(\omega)=(2\pi)^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{x-\mu}{s}\right)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x=\sqrt{|s|}\mathrm{e}^{-i\mu\omega}\Psi(s\omega)$$

都满足窗函数的要求，而且，它们的中心和半径可以分别表示为

$$\begin{cases}E(\psi_{(s,\mu)})=\mu+sE(\psi)\\ \Delta(\psi_{(s,\mu)})=|s|\Delta(\psi)\end{cases}\quad\text{以及}\quad\begin{cases}E(\mathcal{F}\psi_{(s,\mu)})=E(\Psi)/s\\ \Delta(\mathcal{F}\psi_{(s,\mu)})=\Delta(\Psi)/|s|\end{cases}$$

根据连续小波变换的定义，对任意的参数 (s,μ)，函数或者信号 $f(x)$ 的小波变换 $W_f(s,\mu)$ 可以写成

$$\begin{aligned}W_f(s,\mu)&=\mathcal{C}_{\psi}^{-0.5}\left\langle f,\psi_{(s,\mu)}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}\\&=\mathcal{C}_{\psi}^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)|s|^{-0.5}\ \psi^*(s^{-1}(x-\mu))dx\\&=\mathcal{C}_{\psi}^{-0.5}\ |s|^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\psi^*\left(\frac{x-\mu}{s}\right)dx\\&=\mathcal{C}_{\psi}^{-0.5}\ |s|^{0.5}\int_{\omega\in\mathbb{R}}[(\mathscr{F}f)(\omega)][\Psi(s\omega)]^*e^{i\mu\omega}d\omega\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{C}_{\psi}=2\pi\int_{\mathbb{R}^*}|\omega|^{-1}|\Psi(\omega)|^2d\omega<+\infty$$

是小波函数 $\psi(x)$ 的容许性参数，并由此说明小波变换提取的是函数 $f(x)$ 在时间点 $x=\mu$ 附近以及在频率点 $\omega=E(\Psi)/s$ 附近本质上集中在矩形联合时频窗

$$\begin{aligned}&[\mu+sE(\psi)-|s|\Delta(\psi),\mu+sE(\psi)+|s|\Delta(\psi)]\\&\times[E(\Psi)/s-\Delta(\Psi)/|s|,E(\Psi)/s-\Delta(\Psi)/|s|]\end{aligned}$$

中的联合时频信息，而且，对应的矩形联合时频窗面积是 $4\Delta(\psi)\Delta(\Psi)$，只与小波母函数 $\psi(x)$ 有关而与变换参数 (s,μ) 毫无关系.

连续小波时频窗的形状随着参数 s 而变化，这是与窗傅里叶变换和 Gabor 变换完全不同的时频分析特性，正是这一特点决定了小波变换在信号时频分析中的特殊作用. 具体地说，对于较小的 $s>0$，时间域的窗宽 $|s|\Delta(\psi)$ 随着 $s>0$ 一起变小，

时窗 $[\mu-|s|\Delta(\psi),\mu+|s|\Delta(\psi)]$ 变窄(为了方便起见假定小波母函数的中心 $E(\psi)=0$)，主频(中心频率) $E(\Psi)/s$ 变高，检测到的主要是信号的高频成分，由于高频成分在时间域的特点是变化迅速，因此，为了准确检测到在时域中某点处的高频成分，只能利用该点附近很小范围内的观察数据，这必然要求在该点的时间窗比较小，小波变换正好具备这样的自适应性；反过来，对于较大的 $s>0$，这时，时间域的窗宽 $|s|\Delta(\psi)$ 随着 s 一起变大，时窗 $[\mu-|s|\Delta(\psi),\mu+|s|\Delta(\psi)]$ 变宽，主频(中心频率) $E(\Psi)/s$ 变低，检测到的主要是信号的低频成分，由于低频成分在时间域的特点是变化缓慢，因此，为了完整地检测在时域中某点处的低频成分，必须利用该点附近较大范围内的观察数据，这必然要求在该点的时间窗比较大，小波变换也恰好具备这种自适应性. 这是小波变换作为时频分析方法的独到之处，也是小波变换的又一迷人之处.

另外，因为函数或者信号 $f(x)$ 的小波变换

$$W_f(s,\mu)=\mathcal{C}_\psi^{-0.5}\left\langle f,\psi_{(s,\mu)}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\mathcal{C}_\psi^{-0.5}|s|^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\psi^*\left(\frac{x-\mu}{s}\right)dx$$

提取的是函数 $f(x)$ 在时间点 $x=\mu$ 附近以及在频率点 $\omega=E(\Psi)/s$ 附近本质上集中在矩形联合时频窗

$$\begin{aligned}&[\mu+sE(\psi)-|s|\Delta(\psi),\mu+sE(\psi)+|s|\Delta(\psi)]\\&\times[E(\Psi)/s-\Delta(\Psi)/|s|,E(\Psi)/s+\Delta(\Psi)/|s|]\end{aligned}$$

中的那部分联合时频信息. 所以，从频率域的角度来看，小波变换已经没有像傅里叶变换那样的“频率点”的概念，取而代之的则是本质意义上的“频带”的概念；从时间域来看，小波变换所反映的也不再是某个准确的“时间点”处的变化，而是体现了原信号在某个“时间段”内的变化情况. 具体地说，信号 $f(x)$ 的小波变换 $W_f(s,\mu)$ 自适应地提取原信号在“时间段” $[\mu-|s|\Delta(\psi),\mu+|s|\Delta(\psi)]$ 内和“频带” $[E(\Psi)/s-\Delta(\Psi)/|s|,E(\Psi)/s+\Delta(\Psi)/|s|]$ 内的时频信息.

从另一个角度来看，从信号 $f(x)$ 到小波变换 $W_f(s,\mu)$ 是把信号在时间域局部化到范围 $[\mu-|s|\Delta(\psi),\mu+|s|\Delta(\psi)]$ 内，而且在频率域局部化到范围

$$[E(\Psi)/s-\Delta(\Psi)/|s|,E(\Psi)/s+\Delta(\Psi)/|s|]$$

内. 这体现的正是小波变换所特有的能够实现时间局部化同时频率局部化的时频局部化能力. 这在信号故障时间或者故障位置的诊断、图像边缘提取、图像数据压缩、信号滤波等方面都有重要应用.

这些分析同时说明，信号 $f(x)$ 的小波变换 $W_f(s,\mu)$ 只是提取了 $f(x)$ 在时频窗

$$\begin{aligned}&[\mu+sE(\psi)-|s|\Delta(\psi),\mu+sE(\psi)+|s|\Delta(\psi)]\\&\times[E(\Psi)/s-\Delta(\Psi)/|s|,E(\Psi)/s+\Delta(\Psi)/|s|]\end{aligned}$$

中的那部分时频信息，从频率域来看，小波变换是按“频带”的方式分析和处理信号，它本质上是信号 $f(x)$ 在“频带” $[E(\Psi)/s-\Delta(\Psi)/|s|, E(\Psi)/s+\Delta(\Psi)/|s|]$ 内的时频信息，在参数 μ 固定的条件下，随着参数 $s>0$ 取遍非负实数，这些频带全体覆盖了原信号 $f(x)$ 在固定时间点 $x=\mu$ 附近的各种频率成分，当然，它们之间的覆盖也是很严重的. 根据小波变换的反演公式

$$f(x)=\mathcal{C}_{\psi}^{-0.5}\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*}W_f(s,\mu)\psi_{(s,\mu)}(x)s^{-2}dsd\mu$$

和吸收反演公式

$$f(x)=2\mathcal{C}_{\psi}^{-0.5}\int_0^{+\infty}s^{-2}ds\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(s,\mu)\psi_{(s,\mu)}(x)d\mu$$

可知，一般来说，虽然 $\{W_f(s,\mu);s>0,\mu\in\mathbb{R}\}$ 的各部分之间有许多是重复的，但是，为了重现原始信号 $f(x)$，每一个 $W_f(s,\mu)$ 都是必要的、缺一不可的. 当然，这并不是说在任何情况下都是这样，实际上，离散小波变换就是例外，特别是二进小波变换和正交小波变换，它们本质上成功地解决了或者缓解了“频带”重叠问题.

(β) 二进小波时频分析

考虑二进小波 $\psi(x)$，即 $\psi(x)$ 的傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 满足稳定性条件

$$A\leqslant\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\Psi(2^j\omega)|^2\leqslant B$$

其中 A,B 都是有限正实数. 对于任意的整数 $j\in\mathbb{Z}$，引入记号：

$$\psi_{(2^{-j},\mu)}(x)=2^{j/2}\psi(2^j(x-\mu))$$

将函数 $f(x)$ 的二进小波变换记为 $W_f^j(\mu)$，定义如下：

$$\begin{aligned}W_f^{(j)}(\mu)&=W_f(2^{-j},\mu)\\&=\mathcal{C}_{\psi}^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\psi^*_{(2^{-j},\mu)}(x)dx\\&=2^{j/2}\mathcal{C}_{\psi}^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\psi^*(2^j(x-\mu))dx\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{C}_{\psi}=2\pi\int_{\mathbb{R}^*}|\omega|^{-1}|\Psi(\omega)|^2\,d\omega<+\infty$$

是小波函数 $\psi(x)$ 的容许性参数. 在这些条件下，二进小波变换的逆变换公式可以直接表示为

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}2^k\mathcal{C}_{\psi}^{0.5}W_f^{(k)}(\mu)\tau_{(2^{-k},\mu)}(x)d\mu$$

其中，函数 $\tau(x)$ 满足

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Psi(2^j\omega)\mathrm{T}(2^j\omega)=1$$

称为二进小波 $\psi(x)$ 的重构小波，其中 $\mathrm{T}(\omega)$ 是 $\tau(x)$ 的傅里叶变换.

提示：如果 $\psi(x)$ 是二进小波，那么，它的重构小波 $\tau(x)$ 必存在而且也是二进小波. 实际上，可以按照如下傅里叶变换形式构造重构小波 $\tau(x)$，

$$\mathrm{T}(\omega)=\frac{\overline{\Psi}(\omega)}{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\Psi(2^j\omega)|^2}$$

这样，需要验证 $\tau(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，而且，重构小波 $\tau(x)$ 的傅里叶变换 $\mathrm{T}(\omega)$ 满足稳定性条件：

$$C\leqslant \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\mathrm{T}(2^j\omega)|^2\leqslant D$$

其中 C,D 都是有限正实数. 这样，二进小波变换的逆变换公式可以直接验证.

注释：二进小波的重构小波未必唯一.

为了研究二进小波时频分析，先将函数 $f(x)$ 的二进小波变换 $W_f^j(\mu)$ 改写为

$$\begin{aligned}
W_f^{(j)}(\mu)&=W_f(2^{-j},\mu)\\
&=\mathcal{C}_\psi^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi^*_{(2^{-j},\mu)}(x)dx\\
&=2^{j/2}\mathcal{C}_\psi^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi^*(2^j(x-\mu))dx\\
&=\mathcal{C}_\psi^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathscr{F}f)(\omega)[2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i\omega\mu}]^*d\omega\\
&=(2\pi)^{0.5}2^{-j/2}\mathcal{C}_\psi^{-0.5}\{(2\pi)^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty}[(\mathscr{F}f)(\omega)\overline{\Psi}(2^{-j}\omega)]e^{i\omega\mu}d\omega\}
\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{C}_\psi=2\pi\int_{\mathbb{R}^*}|\omega|^{-1}|\Psi(\omega)|^2\,d\omega<+\infty$$

是二进小波 $\psi(x)$ 的容许性参数， $\Psi(\omega)$ 是 $\psi(x)$ 的傅里叶变换. $W_f^j(\mu)$ 提取的是函数 $f(x)$ 在时间点 $x=\mu$ 附近以及在频率点 $\omega=2^jE(\Psi)$ 附近本质上集中在矩形联合时频窗

$$\begin{aligned}
&[\mu+2^{-j}(E(\psi)-\Delta(\psi)),\mu+2^{-j}(E(\psi)+\Delta(\psi))]\\
&\times[2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)),2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))]
\end{aligned}$$

中的联合时频信息，而且，对应的矩形联合时频窗面积恒为 $4\Delta(\psi)\Delta(\Psi)$.

在频率域中，二进小波函数 $\psi_{(2^{-j},\mu)}(x)$ 对应的频带是

$$[2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)),2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))]$$

实际上，如果二进小波函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 的中心和半径满足

$$E(\Psi)=3\Delta(\Psi)$$

那么，二进小波函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 在统计学意义下提供了非负频率轴 $(0,+\infty)$ 的非重叠完全划分：

$$\begin{aligned}(0,+\infty)&=\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}[2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)),2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))]\\&=\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}[2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]\\&=\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}[2^{j+1},2^{j+2}]\Delta(\Psi)\end{aligned}$$

与小波变换类似地，信号或者函数 $f(x)$ 的二进小波变换 $W_f^j(\mu)$ 是按频带而不是按频率点的方式处理频域信息，那么，它是怎样描述原信号或者函数 $f(x)$ 在频带 $[2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)),2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))]=[2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]$ 中的信息的呢？

实际上，二进小波变换 $W_f^j(\mu)$ 是用这个频带的中心频率 $3\times 2^j\Delta(\Psi)$ 处的“小波谱” $W_f(2^{-j},\mu)$ 来描述 $f(x)$ 在频带 $[2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]$ 中的局部频率信息的，即所谓的以“点”代替“带”的方式. 这是二进小波时频分析的特点. 然而，对于数值计算，这还不够，因为“小波谱” $W_f(2^{-j},\mu)$ 中的参数 μ 应该取遍全部实数域 $\mathbb{R}$，所以，对于任何整数 $j\in\mathbb{Z}$，“小波谱” $W_f(2^{-j},\mu)$ 必须按参数 μ 进行重采样或者离散化参数 μ. 这个问题或者描述为利用离散数据 $\{W_f(2^{-j},\mu_k);k\in\mathbb{Z}\}$ 重建 $W_f(2^{-j},\mu)$，这时，问题集中表现为寻找函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的“子空间” $\{W_f(2^{-j},\mu);f\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})\}$ 的一组基或者一组标架(frame)，而这组基或标架应该由二进小波函数 $\psi(x)$ 按某种方式表示出来，最后将 $W_f(2^{-j},\mu)$ 展开成以 $\{W_f(2^{-j},\mu_k);k\in\mathbb{Z}\}$ 为系数的线性组合；或者将这个问题改述为利用离散数据 $\{W_f(2^{-j},\mu_k);k\in\mathbb{Z},j\in\mathbb{Z}\}$ 重建 $W_f(s,\mu)$，进一步由小波反演公式最后重建原始信号 $f(x)$，这时，问题表现为寻找函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的基或标架，而将原始信号 $f(x)$ 表示为或展开为以离散数据 $\{W_f(2^{-j},\mu_k);k\in\mathbb{Z},j\in\mathbb{Z}\}$ 为组合系数的线性组合. 这种解决方案导致正交小波的概念.

(γ) 正交小波时频分析

假设小波函数 $\psi(x)$ 是正交小波，即函数系：

$$\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

生成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基，这个函数系称为 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交小波基. 对于任意的 $(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，$\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k)$ 的傅里叶变换是

$$2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}$$

容易验证，在频率域中，对于任意的 $(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，$2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}$ 作为窗函数的中心和半径分别是 $2^j E(\Psi)$ 和 $2^j\Delta(\Psi)$.

将函数 $f(x)$ 的正交小波变换 $W_f(2^{-j},2^{-j}k)$ 改写为

$$\begin{aligned}W_f(2^{-j},2^{-j}k)&=\int_{\mathbb{R}}f(x)\bar{\psi}_{j,k}(x)dx\\&=\int_{\mathbb{R}}f(x)\cdot[2^{j/2}\psi(2^j x-k)]^*dx\\&=\int_{\mathbb{R}}(\mathscr{F}f)(\omega)\cdot[2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}]^*d\omega\end{aligned}$$

那么，$W_f(2^{-j},2^{-j}k)$ 提取的是函数 $f(x)$ 在时间点 $\mu=2^{-j}k$ 附近以及在频率点 $\omega=2^j E(\Psi)$ 附近本质上集中在矩形联合时频窗

$$\begin{aligned}&[2^{-j}(k+E(\psi)-\Delta(\psi)),2^{-j}(k+E(\psi)+\Delta(\psi))]\\&\times[2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)),2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))]\end{aligned}$$

中的联合时频信息，而且，对应的矩形联合时频窗面积恒为 $4\Delta(\psi)\Delta(\Psi)$.

在时间域中，$\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 构成小波子空间 W_j，$\forall j\in\mathbb{Z}$ 的规范正交基：

$$W_j=\text{Closespan}\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k);k\in\mathbb{Z}\}$$

它与频带 $[2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)),2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))]$ 是对应的. 对于函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的任何函数或信号 $f(x)$，其时频分析相当于 $f(x)$ 在小波子空间 W_j 上的正交投影 $f_j(x)$ 在时间域按照小波规范正交系 $\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 的展开并同时在频率域按照规范正交系 $\{(\mathscr{F}\psi_{j,k})(\omega)=2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k};k\in\mathbb{Z}\}$ 的级数展开分析，即

$$f_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{j,k}\psi_{j,k}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{j,k} \cdot 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

其中，$(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$f_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{\psi}_{j,k}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_j(x)\bar{\psi}_{j,k}(x)dx$$

而且

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}f_j)(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{j,k}(\mathscr{F}\psi_{j,k})(\omega) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{j,k} \cdot 2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k} \\ &= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (2^{-j/2} f_{j,k})e^{-i(2^{-j}\omega)k}\right]\Psi(2^{-j}\omega)\end{aligned}$$

在函数 $f(x)$ 的正交小波时频分析中，对于任意的 W_j， $f(x)$ 在时间域和频率域中级数展开系数 $f_{j,k}, k \in \mathbb{Z}$ 可以如下计算：

$$\begin{aligned}f_{j,k} &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{\psi}_{j,k}(x)dx \\ &= W_f(2^{-j}, 2^{-j}k) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_j(x)\bar{\psi}_{j,k}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\mathscr{F}f)(\omega)\cdot[(\mathscr{F}\psi_{j,k})(\omega)]^* d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\mathscr{F}f)(\omega)\cdot 2^{-j/2}\bar{\Psi}(2^{-j}\omega)e^{i(2^{-j}\omega)k}d\omega\end{aligned}$$

由此说明，$f(x)$ 的正交小波时频分析和 $f(x)$ 在小波子空间 W_j 上的正交投影 $f_j(x)$ 的时频分析是完全一样的，就是 $f_j(x)$ 在时间域按照小波规范正交系：

$$\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$$

展开的级数系数的分析，或者，在频率域按照规范正交系：

$$\{(\mathscr{F}\psi_{j,k})(\omega) = 2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}; k \in \mathbb{Z}\}$$

展开的级数系数分析.

另外，如果假设小波函数 $\psi(x)$ 是正交小波，即函数系：

$$\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k); (j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$$

生成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基，这个函数系称为 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交小波基. 对于任意的 $(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$， $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ 的傅里叶变换是

$$(\mathscr{F}\psi_{j,k})(\omega)=2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}$$

这时，对于任何 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，它在时间域和频率域具有如下的级数展开表达式：

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f_j(x)\\&=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{j,k}\psi_{j,k}(x)\\&=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2^{j/2}f_{j,k}\psi(2^jx-k)\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}f)(\omega)&=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(\mathscr{F}f_j)(\omega)\\&=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{j,k}(\mathscr{F}\psi_{j,k})(\omega)\\&=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{j,k}\cdot 2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}\\&=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{j,k}e^{-i(2^{-j}\omega)k}\right]\end{aligned}$$

其中，级数展开系数 $f_{j,k},(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 可以如下计算：

$$\begin{aligned}f_{j,k}&=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\psi}_{j,k}(x)dx\\&=\int_{\mathbb{R}}f_j(x)\overline{\psi}_{j,k}(x)dx\\&=W_f(2^{-j},2^{-j}k)\\&=\int_{\mathbb{R}}(\mathscr{F}f)(\omega)\cdot\left[(\mathscr{F}\psi_{j,k})(\omega)\right]^*d\omega\\&=\int_{\mathbb{R}}(\mathscr{F}f)(\omega)\cdot 2^{-j/2}\overline{\Psi}(2^{-j}\omega)e^{i(2^{-j}\omega)k}d\omega\end{aligned}$$

实际上，考虑到数值计算和理论分析的特殊需要，对二进小波变换处理频域的方式按照时间平移参数 μ 的离散化，获得离散数据 $\{W_f(2^{-j},\mu_k);(k,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$，为了保证原始信号域和变换域分析的一致性，当然应该要求离散后获得的数据 $\{W_f(2^{-j},\mu_k);(k,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 按某种方式可以完全重建信号 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的小波变换 $W_f(s,\mu)$ 或者原始信号 $f(x)$ 本身. 这个问题最完美的一种解决方案就是正交小波分析. 即选择小波 $\psi(x)$，使函数族

$$\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

生成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基，这个函数系称为 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交小波基. 在这里，时间中心参数 μ 的离散化是与尺度参数 s 的离散化有联系的，具体地说，对任意整数 $j \in \mathbb{Z}$，当尺度参数 $s_j = 2^{-j}$ 时，时间中心参数 $\mu_k = 2^{-j}k,\ k \in \mathbb{Z}$，与此相应，频域中的二进小波统计“频带”是 $[2^{j+1}\Delta(\Psi), 2^{j+2}\Delta(\Psi)]$，而且对应于时间域上的就是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的闭子空间

$$W_j = \text{Closespan}\{\psi_{j,k}(x); k \in \mathbb{Z}\}$$

相应时间窗是 $[2^{-j}(k-\Delta(\psi)), 2^{-j}(k+\Delta(\psi))]$ (回顾前述时间中心的约定 $E(\psi)=0$)，而且，与频域中互不相交的二进小波统计频带分割公式：

$$\begin{aligned}(0,+\infty) &= \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} [2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)), 2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))] \\ &= \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} [2^{j+1}\Delta(\Psi), 2^{j+2}\Delta(\Psi)] \\ &= \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} [2^{j+1}, 2^{j+2}]\Delta(\Psi)\end{aligned}$$

相对应的是时间域中函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的小波子空间正交直和分解：

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \text{Closespan}\{\psi_{j,k}(x); k \in \mathbb{Z}\}$$

在这个时候，也只有在这个时候，信号或者函数的时频分析才具有明确的时域空间再分割的意义. 正交小波理论提供的时频分析方法显得异常简单明了，信号或者函数的时频分析或者小波分析过程的物理意义和数学意义同时都显得清晰简洁.

在正交小波时频分析的特殊情况下，原始信号或者函数的小波变换 $W_f(s,\mu)$ 结果就是在平面二进网格点

$$\{(2^{-j}, 2^{-j}k); (k,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

上的“正交小波谱”：

$$\{W_f(2^{-j}, 2^{-j}k); (k,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

利用正交小波谱 $\{W_f(2^{-j}, 2^{-j}k); (k,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 重建原始信号或者函数 $f(x)$ 的方法就是类似于傅里叶级数的正交小波级数

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} W_f(2^{-j}, 2^{-j}k)\psi_{j,k}(x)$$

其中 $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), (j,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 是由正交小波 $\psi(x)$ 产生的在各种不同尺度下中心在不同网格点处的再生或者重建正交小波函数，它们代表了一切可能的“基本单元”或者“时频原子”，从“时频原子分解”的观点来看，这个正交小波

函数项级数公式说明，正交小波时频分析实质上是实现函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中任何信号或者函数“时频原子分解”的一种有效途径.

另一方面，将函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的正交小波子空间正交直和分解的思想分别用于闭小波子空间 W_j，就产生了正交小波包时频分析的频域频带再分割理论和时域闭线性子空间正交直和再分割理论.

7.3.3　小波包和金字塔时频分析

这里将利用多分辨率正交小波时频分析方法实现频带分割或者函数子空间正交直和分解的思想,实现对已知频带或者正交小波子空间的再次分割，将时频分析理论推向极致，逐步逼近 Heisenberg 测不准原理的核心. 正交小波包时频分析和金字塔时频分析理论几乎可以完全突破 Heisenberg 测不准原理施加在时频分析理论上的“紧箍咒”.

(α) 多分辨率分析小波与时频分析

假定小波函数 $\psi(x)$ 及其傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 都满足窗函数的要求，它们的中心和半径分别记为 $E(\psi)$ 和 $\Delta(\psi)$ 与 $E(\Psi)$ 和 $\Delta(\Psi)$.

在小波函数 $\psi(x)$ 是正交小波的条件下，规范正交函数系

$$\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k); (j,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

生成空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基，对任意 $(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ 的傅里叶变换是

$$2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}$$

这样，在频率域中，$2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}$ 作为窗函数的中心和半径分别是 $2^j E(\Psi)$ 和 $2^j\Delta(\Psi)$.

根据函数 $f(x)$ 正交小波变换 $W_f(2^{-j},2^{-j}k)$ 的时域和频域表示形式：

$$\begin{aligned} W_f(2^{-j},2^{-j}k) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot[2^{j/2}\overline{\psi}(2^j x - k)]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\mathscr{F}f)(\omega)\cdot[2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}]^* d\omega \end{aligned}$$

$W_f(2^{-j},2^{-j}k)$ 体现函数 $f(x)$ 在时间 $\mu = 2^{-j}k$ 附近以及在频点 $\omega = 2^j E(\Psi)$ 附近本质上集中在矩形联合时频窗

$$\begin{aligned} &[2^{-j}(k + E(\psi) - \Delta(\psi)), 2^{-j}(k + E(\psi) + \Delta(\psi))] \\ &\times[2^j(E(\Psi) - \Delta(\Psi)), 2^j(E(\Psi) + \Delta(\Psi))] \end{aligned}$$

中的联合时频信息，而且，对应的矩形联合时频窗面积恒为 $4\Delta(\psi)\Delta(\Psi)$.

在时间域中，$\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 构成小波子空间 W_j，$\forall j\in\mathbb{Z}$ 的规范正交基：

$$W_j=\text{Closespan}\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$$

它与频带 $\left[2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)),2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))\right]$ 相对应.

函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的任何函数或信号 $f(x)$ 的时频分析相当于 $f(x)$ 在全体小波子空间 W_j 上的正交投影 $f_j(x)$ 在时间域按照小波规范正交系

$$\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$$

展开并同时在频率域按照规范正交系

$$\{(\mathscr{F}\psi_{j,k})(\omega)=2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k};k\in\mathbb{Z}\}$$

级数展开的分析，即

$$f_j(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{j,k}\psi_{j,k}(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{j,k}\cdot 2^{j/2}\psi(2^jx-k)$$

其中

$$f_{j,k}=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\psi}_{j,k}(x)dx=\int_{\mathbb{R}}f_j(x)\overline{\psi}_{j,k}(x)dx,\quad (j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

而且

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}f_j)(\omega)&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{j,k}\cdot 2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}\\&=\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{j,k}e^{-i(2^{-j}\omega)k}\right][2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)]\\&=[2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)]\end{aligned}$$

其中，$(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，

$$f_{j,k}=\int_{\mathbb{R}}(\mathscr{F}f)(\omega)\cdot[2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}]^*d\omega$$

而且

$$f_j(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{j,k}e^{-i\omega k}$$

是周期 2π 的平方可积函数.

在频率域中，$2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)$ 与 $2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)e^{-i(2^{-j}\omega)k}$ 作为窗函数具有相同的中心和半径，即分别是 $2^jE(\Psi)$ 和 $2^j\Delta(\Psi)$. 所以，函数 $f(x)$ 在小波子空间 W_j，$\forall j\in\mathbb{Z}$ 上的时频分析，体现为 $f(x)$ 在小波子空间 W_j 上的正交投影 $f_j(x)$ 的时频分析，在频

率域中，这种时频分析最终表现为周期 $2^j\times 2\pi$ 的平方可积函数 $f_j(2^{-j}\omega)$ 被频域窗函数 $2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)$ 限制在相应的频带 $[2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)),2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))]$ 之内，这个频带的带宽 $2^j\times 2\Delta(\Psi)$ 体现频域局部化能力的强弱. 这时候，在时间域中的时间窗宽是 $2^{-j}\times 2\Delta(\psi)$，体现了时间域的局部化能力，相应的时频联合综合局部化能力,即联合时频窗面积 $[2^{-j}\times 2]\times[2^j\times 2\Delta(\Psi)]=4\Delta(\psi)\Delta(\Psi)$ 是由小波函数 $\psi(x)$ 唯一确定的.

对于任何函数或者信号 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，它的完整的正交小波时频分析体现为如下的两个级数分析：

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f_j(x)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

而且

$$(\mathscr{F}f)(\omega)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(\mathscr{F}f_j)(\omega)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}[f_j(2^{-j}\omega)][2^{-j/2}\Psi(2^{-j}\omega)]$$

其中，$j\in\mathbb{Z}$,

$$f_j(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{j,k}\psi_{j,k}(x),\quad f_j(2^{-j}\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{j,k}e^{-i(2^{-j}\omega)k}$$

这种时频分析在频域的局部化行为表现频域或者频率轴的分割.

在频率域中，时间域中的正交小波函数系 $\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 以及它张成的小波子空间 W_j：

$$W_j=\text{Closespan}\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$$

与频带 $[2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)),2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))]$ 是相对应的，这说明，经过时间域中时间窗的全部平移 $\{2^{-j}k;k\in\mathbb{Z}\}$，最终完整地提取了函数或者信号 $f(x)$ 在频域中分布在频带 $[2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)),2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))]$ 中的联合时频信息. 当 $j\in\mathbb{Z}$ 取遍全部整数时，实现对函数或者信号 $f(x)$ 的完整的时频分析，从频域来看这就相当于实现频域的如下分割：

$$\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}[2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)),2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))]$$

为了进一步揭示这种分割的本质含义，假设正交小波函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 的中心和半径满足关系 $E(\Psi)=3\Delta(\Psi)$，这样在统计学意义下得到非负频率轴 $(0,+\infty)$ 的非重叠完全划分：

$$
\begin{aligned}
(0,+\infty) &= \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}[2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)),2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))] \\
&= \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}[2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)] \\
&= \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}[2^{j+1},2^{j+2}]\Delta(\Psi)
\end{aligned}
$$

显然，在时间域中，这应该等价地对应于函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的正交小波子空间正交直和分解关系：

$$
\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \text{Closespan}\{\psi_{j,k}(x); k\in\mathbb{Z}\}
$$

这时，时频联合对应关系体现为：对于 $j\in\mathbb{Z}$,

$$
[2^j(E(\Psi)-\Delta(\Psi)),2^j(E(\Psi)+\Delta(\Psi))] = [2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]
$$

$$
\Updownarrow
$$

$$
W_j = \text{Closespan}\{\psi_{j,k}(x); k\in\mathbb{Z}\}
$$

$$
\Updownarrow
$$

$$
\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx-k); k\in\mathbb{Z}\}
$$

这种形式的时频分析体现为一种整体时频分析，只利用了小波子空间和正交小波函数的时频特性，没有把多分辨率分析小波的构造理论优势引入时频分析理论中，其中最重要的尺度子空间和尺度函数在时频分析中没有发挥应有的作用.

回顾多分辨率分析中尺度子空间序列和小波子空间序列的关系：对于 $J\in\mathbb{Z}$,

$$
V_{J+1} = \bigoplus_{j=-\infty}^{J} W_j
$$

而且

$$
V_{J+1} = \text{Closespan}\{\varphi_{J+1,k}(x) = 2^{(J+1)/2}\varphi(2^{J+1}x-k); k\in\mathbb{Z}\}
$$

因此，函数或者信号 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在 $j\leqslant J$ 的全部小波子空间 $\phi(x)$ 上的正交投影 $f_j^{(1)}(x)$ 的时频分析，总体相当于它在尺度子空间 $V_{J+1} = \bigoplus_{j=-\infty}^{J} W_j$ 上正交投影 $f_{J+1}^{(0)}(x)$ 的时频分析，即如下的函数级数分析：

$$
f_{J+1}^{(0)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{J+1,k}^{(0)}\varphi_{J+1,k}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{J+1,k}^{(0)}\cdot 2^{(J+1)/2}\varphi(2^{J+1}x-k)
$$

其中

$$
f_{J+1,k}^{(0)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi}_{J+1,k}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_{J+1}^{(0)}(x)\cdot 2^{(J+1)/2}\overline{\varphi}(2^{J+1}x-k)dx
$$

而且

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{F} f_{J+1}^{(0)})(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{J+1,k}^{(0)} \cdot 2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega)e^{-i(2^{-(J+1)}\omega)k} \\
&= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{J+1,k}^{(0)} e^{-i(2^{-(J+1)}\omega)k}\right][2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega)] \\
&= [\boldsymbol{f}_{J+1}^{(0)}(2^{-(J+1)}\omega)][2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega)]
\end{aligned}
$$

其中

$$
\boldsymbol{f}_{J+1}^{(0)}(2^{-(J+1)}\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{J+1,k}^{(0)} e^{-i(2^{-(J+1)}\omega)k}
$$

是周期 $2^{(J+1)} \times 2\pi$ 的平方可积函数.

经过这样的准备，现在的问题是：正交投影 $f_{J+1}^{(0)}(x)$ 时频分析的时频局部化中，频域局部化是怎样的?

回答这个问题的直接途径是计算频域窗函数 $2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega)e^{-i(2^{-(J+1)}\omega)k}$ 以及窗函数 $2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega)$ 的频率中心和半径，并遵循此前的演算过程刻画对应的频带. 但这不是此处引入多分辨率分析尺度函数和尺度子空间的真实意图.

在前述研究的基础上，这里应该有充分的理由相信，尺度函数的伸缩平移规范正交函数系：

$$
\{\varphi_{J+1,k}(x) = 2^{(J+1)/2}\varphi(2^{J+1}x - k); k \in \mathbb{Z}\}
$$

或者它张成的闭的尺度子空间：

$$
V_{J+1} = \text{Closespan}\{\varphi_{J+1,k}(x) = 2^{(J+1)/2}\varphi(2^{J+1}x - k); k \in \mathbb{Z}\}
$$

的时频局部化在频域被限制于如下组合频带：

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{j=-\infty}^{J} [2^j(E(\Psi) - \Delta(\Psi)), 2^j(E(\Psi) + \Delta(\Psi))] &= \bigcup_{j=-\infty}^{J} [2^{j+1}\Delta(\Psi), 2^{j+2}\Delta(\Psi)] \\
&= \bigcup_{j=-\infty}^{J} [2^{j+1}, 2^{j+2}]\Delta(\Psi) \\
&= (0, 2^{J+2})\Delta(\Psi)
\end{aligned}
$$

这与时间域中尺度子空间 V_{J+1} 的如下小波子空间正交直和分解相对应：

$$
V_{J+1} = \bigoplus_{j=-\infty}^{J} W_j
$$

不仅如此，而且与多分辨率分析中闭的尺度子空间 V_{J+1} 的有限正交直和分解

关系：

$$V_{J+1}=V_J\oplus W_J$$

相对应的时频局部化在频域将被限制为

$$\bigcup_{j=-\infty}^{J}[2^{j+1},2^{j+2}]\Delta(\Psi)=(0,2^{J+2}]\Delta(\Psi)=(0,2^{J+1}\Delta(\Psi)]\cup(2^{J+1}\Delta(\Psi),2^{J+2}\Delta(\Psi)]$$

这就是在多分辨率分析小波函数和尺度函数基础上，函数或者信号的时频分析行为和特征. 这种时频分析方法在整个函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的时频分析结构体现为，在频域局部化过程中，整个频域的分割方式是如下的半无穷组合：

$$\begin{aligned}(0,+\infty)&=\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}(2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]\\&=(0,2^{J+1}\Delta(\Psi)]\cup\bigcup_{j=J}^{+\infty}(2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]\end{aligned}$$

这个抽象的理想模式在可能的应用中必将体现为有限形式，即对于足够大的整数 J，函数或者信号 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 被近似为 $f_{J+1}^{(0)}(x)$，或者函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 被近似为 V_{J+1}，这样，函数或者信号的时频分析在频率域被局部化为

$$(0,2^{J+2}\Delta(\Psi)]=(0,2^{J+1}\Delta(\Psi)]\cup(2^{J+1}\Delta(\Psi),2^{J+2}\Delta(\Psi)]$$

回顾前述讨论可知，这相当于时间域尺度子空间 V_{J+1} 的如下正交直和分解：

$$V_{J+1}=V_J\oplus W_J$$

在这样抽象的理想模式下，利用多分辨率分析的正交小波函数和正交尺度函数的时频分析方法，本质上就是 V_{J+1} 的尺度函数伸缩平移规范正交基

$$\{\varphi_{J+1,k}(x)=2^{(J+1)/2}\varphi(2^{J+1}x-k);k\in\mathbb{Z}\}$$

被替换成 V_{J+1} 的如下由两个相互正交的伸缩平移规范正交函数系组合构成的规范正交基：

$$\{\varphi_{J,k}(x)=2^{J/2}\varphi(2^Jx-k);k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\psi_{J,k}(x)=2^{J/2}\psi(2^Jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$$

在尺度子空间 V_{J+1} 上的任何函数或者信号 $f_{J+1}^{(0)}(x)$ 的时频分析，出现如下两种正交函数级数分析模式：

$$\begin{aligned}f_{J+1}^{(0)}(x)&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{J+1,k}^{(0)}\varphi_{J+1,k}(x)\\&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_{J+1,k}^{(0)}\cdot2^{(J+1)/2}\varphi(2^{J+1}x-k)\end{aligned}$$

而且

$$
\begin{aligned}
f_{J+1}^{(0)}(x) &= f_J^{(0)}(x) + f_J^{(1)}(x) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{J,k}^{(0)} \varphi_{J,k}(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{J,k}^{(1)} \psi_{J,k}(x)
\end{aligned}
$$

其中 $f_J^{(0)}(x), f_J^{(1)}(x)$ 分别是函数或者信号 $f_{J+1}^{(0)}(x)$ 在尺度子空间 V_J 和小波子空间 W_J 上的正交投影.

根据多分辨率分析理论得到如下的时频分析模式：

$$
f_{J+1}^{(0)}(x) = f_J^{(0)}(x) + f_J^{(1)}(x)
$$

或者等价地

$$
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{J+1,k}^{(0)} \varphi_{J+1,k}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{J,k}^{(0)} \varphi_{J,k}(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{J,k}^{(1)} \psi_{J,k}(x)
$$

在频率域中，等价表示为

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{J+1,k}^{(0)} e^{-i(2^{-(J+1)}\omega)k}\right][2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega)] \\
= &\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{J,k}^{(0)} e^{-i(2^{-J}\omega)k}\right][2^{-J/2}\Phi(2^{-J}\omega)] \\
&+ \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{J,k}^{(1)} e^{-i(2^{-J}\omega)k}\right][2^{-J/2}\Psi(2^{-J}\omega)]
\end{aligned}
$$

这种时频分析方法涉及一个函数或者信号在两种不同的规范正交基下的表达问题，由此获得时频分析方法的新途径.

具体地说，根据 Heisenberg 测不准原理，成立如下三个不等式：

$$
\begin{aligned}
\Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(\mathscr{F}\varphi_{J+1,k}) &\geqslant \frac{1}{2} \\
\Delta(\varphi_{J,k})\Delta(\mathscr{F}\varphi_{J,k}) &\geqslant \frac{1}{2} \\
\Delta(\psi_{J,k})\Delta(\mathscr{F}\psi_{J,k}) &\geqslant \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

或者表示为

$$
\begin{aligned}
\Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega)) &\geqslant \frac{1}{2} \\
\Delta(\varphi_{J,k})\Delta(2^{-J/2}\Phi(2^{-J}\omega)) &\geqslant \frac{1}{2} \\
\Delta(\psi_{J,k})\Delta(2^{-J/2}\Psi(2^{-J}\omega)) &\geqslant \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

但是，前述讨论已经证明

$$\Delta(2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega)) = \Delta(2^{-J/2}\Phi(2^{-J}\omega)) + \Delta(2^{-J/2}\Psi(2^{-J}\omega))$$

从而综合得到如下关系式：

$$\begin{aligned}&\Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega))\\ &= \Delta(\varphi_{J+1,k})[\Delta(2^{-J/2}\Phi(2^{-J}\omega)) + \Delta(2^{-J/2}\Psi(2^{-J}\omega))] \geqslant \frac{1}{2}\end{aligned}$$

这个公式的基本科学含义是，在时间域分辨率或者时间域局部化完成的条件下，利用多分辨率分析理论提供的函数或者信号的等价的多种表达方法，可以通过 Mallat 分解进一步提高频率分辨率或者压缩频域局部化的频带宽度，即提高频域局部化性能，因此，从整体上改善时频联合局部化的性能，具体地说，"时频局部化综合性能"即两个联合时频窗的面积满足如下不等式：

$$\begin{aligned}&[\Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(2^{-J/2}\Phi(2^{-J}\omega))] \leqslant \Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega))\\ &[\Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(2^{-J/2}\Psi(2^{-J}\omega))] \leqslant \Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega))\end{aligned}$$

这就是多分辨率分析的小波函数和尺度函数能够改善信号或者函数时频局部化性能的基本途径和基本意义. 在这样的途径和含义下，存在一种潜在的可能性，即在一定条件下出现不等式

$$[\Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(2^{-J/2}\Phi(2^{-J}\omega))] < \frac{1}{2}$$

或者

$$[\Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(2^{-J/2}\Psi(2^{-J}\omega))] < \frac{1}{2}$$

这说明 Heisenberg 测不准原理施加在时频分析理论上的"紧箍咒"可能被突破.

(β) 小波链时频分析

多分辨率分析理论的大量应用经验表明，无论是在信号时频分析中的应用，还是在包括物理图像和数字图像在内的图像分析处理中的应用，甚至还包括在相当多的纯粹理论分析中的应用，比如函数、函数空间以及分布和算子的刻画与表达，再比如信号最优表达规范正交基的搜索、图像或者算子稀疏表达规范正交基搜索等，在这样十分广泛的科学技术研究领域，Mallat 分解方法的应用几乎都能够比较显著地改善相应问题的解决效果，与经典方法相比总能够获得更好的解决结果，而取得最终满意解决结果的状态，绝大多数时候却出现在连续多次小波分解之后. 这是为什么？

回答这个问题的途径是多种多样的，但标准方式是线性空间中特定向量或者向量集合在线性空间的某些基特别是某些规范正交基下的表达或者坐标"比较简单

而且正好适合相应问题的求解”，比如在数据压缩研究中，坐标的最大数值(峰值)绝对值接近向量的范数或者坐标数值呈现稀疏分布等，再如函数空间刻画中，函数的小波函数分解系数和尺度函数分解系数随尺度精细化表现出速降的特征等.

这里尝试用另一种方式回答这个问题，那就是在多分辨率分析理论体系下多次连续小波分解实现时频联合局部化能力的不断提高，即小波链时频分析能够不断提高时频联合局部化能力.

在多分辨率分析理论中，对于任意的整数 $J\in\mathbb{Z}$ 和任意的自然数 $L\in\mathbb{N}$，经过多次重复使用分解 $V_{J+1}=W_J\oplus V_J$ 关系公式，可以得到尺度子空间正交直和链式分解关系：(cascade decompisation)

$$
\begin{aligned}
V_{J+1} &= W_J\oplus V_J\\
&= W_J\oplus W_{J-1}\oplus V_{J-1}\\
&\ \ \vdots\\
&= W_J\oplus W_{J-1}\oplus\cdots\oplus W_{J-L}\oplus V_{J-L}=\left[\bigoplus_{k=0}^{L}W_{J-k}\right]\oplus V_{J-L}
\end{aligned}
$$

其中尺度子空间 V_{j+1} 的正交直和分解过程相当于为 V_{j+1} 提供如下的各种类型的规范正交基：

(1) $\{\varphi_{J+1,n}(x);n\in\mathbb{Z}\}$；

(2) $\{\varphi_{J,k}(x),\psi_{J,k}(x);k\in\mathbb{Z}\}$；

(3) $\{\varphi_{J-L,k}(x),\psi_{J-\ell,k}(x);\ell=0,1,2,\cdots,L,k\in\mathbb{Z}\}$，其中 L 是自然数.

这实际上是为尺度子空间 V_{j+1} 提供了 $(L+1)$ 个规范正交基，其基本思想是利用小波子空间列 $W_j,W_{j-1},\cdots,W_{j-L}$ 的规范正交小波基和尺度子空间 V_{j-L} 的尺度函数规范正交基联合得到 V_{j+1} 的新规范正交基.

为了实现函数或者信号的时频分析，利用这些规范正交基把任何函数或者信号在这些正交子空间上的正交投影用正交函数级数表示出来.

设尺度子空间 V_{J+1} 上函数或者信号 $f_{J+1}^{(0)}(x)$ 在 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间列：

$$W_J,W_{J-1},\cdots,W_{J-L},V_{J-L}$$

上的正交投影分别是

$$f_J^{(1)}(x),f_{J-1}^{(1)}(x),\cdots,f_{J-L}^{(1)}(x),f_{J-L}^{(0)}(x)$$

那么，

$$f_{J+1}^{(0)}(x)=f_J^{(1)}(x)+f_{J-1}^{(1)}(x)+\cdots+f_{J-L}^{(1)}(x)+f_{J-L}^{(0)}(x)$$

而且，$\{f_J^{(1)}(x),f_{J-1}^{(1)}(x),\cdots,f_{J-L}^{(1)}(x),f_{J-L}^{(0)}(x)\}$ 是正交函数系，满足如下时频分析分解关系公式：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}d_{J+1,n}^{(0)}\varphi_{J+1,n}(x)=\sum_{\ell=0}^{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}}d_{J-\ell,k}^{(1)}\psi_{J-\ell,k}(x)+\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_{J-L,k}^{(0)}\varphi_{J-L,k}(x)$$

其中

$$\begin{cases}f_{J+1}^{(0)}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}d_{J+1,n}^{(0)}\varphi_{J+1,n}(x)\\ f_{J-L}^{(0)}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}d_{J-L,k}^{(0)}\varphi_{J-L,k}(x)\\ f_{J-\ell}^{(1)}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}d_{J-\ell,k}^{(1)}\psi_{J-\ell,k}(x),\quad \ell=0,1,2,\cdots,L\end{cases}$$

而且

$$\begin{cases}d_{J+1,n}^{(0)}=\int_{x\in\mathbb{R}}f_{J+1}^{(0)}(x)\bar{\varphi}_{J+1,k}(x)dx=\int_{x\in\mathbb{R}}f(x)\bar{\varphi}_{J+1,k}(x)dx\\ d_{J-L,k}^{(0)}=\int_{x\in\mathbb{R}}f_{J-L}^{(0)}(x)\bar{\varphi}_{J-L,k}(x)dx=\int_{x\in\mathbb{R}}f(x)\bar{\varphi}_{J-L,k}(x)dx\\ d_{J-\ell,k}^{(1)}=\int_{x\in\mathbb{R}}f_{J-\ell}^{(1)}(x)\bar{\psi}_{J-\ell,k}(x)dx=\int_{x\in\mathbb{R}}f(x)\bar{\psi}_{J-\ell,k}(x)dx,\quad \ell=0,1,2,\cdots,L\end{cases}$$

这些投影系数序列满足如下的分解链和合成链关系：

$$\left(\begin{array}{c}\mathscr{D}_{J-\ell}^{(0)}\\ \hline \mathscr{D}_{J-\ell}^{(1)}\end{array}\right)=\boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^*\mathscr{D}_{J-\ell+1}^{(0)}=\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell^*\\ \hline \boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{J-\ell+1}^{(0)}=\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell^*\mathscr{D}_{J-\ell+1}^{(0)}\\ \hline \boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell^*\mathscr{D}_{J-\ell+1}^{(0)}\end{array}\right),\quad \ell=0,1,2,\cdots,L$$

而且，

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{J-\ell+1}^{(0)}&=\boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell\left(\begin{array}{c}\mathscr{D}_{J-\ell}^{(0)}\\ \hline \mathscr{D}_{J-\ell}^{(1)}\end{array}\right)=(\boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell\,|\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell)\left(\begin{array}{c}\mathscr{D}_{J-\ell}^{(0)}\\ \hline \mathscr{D}_{J-\ell}^{(1)}\end{array}\right)\\&=\boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell\mathscr{D}_{J-\ell}^{(0)}+\boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell\mathscr{D}_{J-\ell}^{(1)}\end{aligned}$$

其中，$\ell=L,L-1,\cdots,2,1,0$.

利用分块矩阵表示方法将递归链式关系综合为分解整体链式关系：

$$\left(\begin{array}{c}\mathscr{D}_{J-L}^{(0)}\\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(1)}\\ \hline \vdots\\ \hline \mathscr{D}_{J-1}^{(1)}\\ \hline \mathscr{D}_{J}^{(1)}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}_L^*\boldsymbol{\mathcal{H}}_{(L-1)}^*\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\\ \hline \boldsymbol{\mathcal{G}}_L^*\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_{(L-1)}^*\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\\ \hline \vdots\\ \hline \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^*\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\\ \hline \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{J+1}^{(0)}$$

其中分块矩阵(列向量)只按照行进行分块，被表示成 $(L+2)\times1$ 的分块形式，从上到

下各个分块的行数规则是

$$\frac{\infty}{2^{L+1}},\frac{\infty}{2^{L+1}},\frac{\infty}{2^{L}},\frac{\infty}{2^{L-1}},\cdots,\frac{\infty}{2^{2}},\frac{\infty}{2^{1}}$$

相应的合成整体链式关系是

$$\mathscr{D}_{J+1}^{(0)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mathcal{H}}_L^*\boldsymbol{\mathcal{H}}_{(L-1)}^*\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\\ \hline \boldsymbol{\mathcal{G}}_L^*\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_{(L-1)}^*\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\\ \hline \vdots\\ \hline \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^*\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\\ \hline \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^*\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}\mathscr{D}_{J-L}^{(0)}\\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(1)}\\ \hline \vdots\\ \hline \mathscr{D}_{J-1}^{(1)}\\ \hline \mathscr{D}_{J}^{(1)}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_{L-1}\boldsymbol{\mathcal{H}}_L\middle|\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_{L-1}\boldsymbol{\mathcal{G}}_L\middle|\cdots\middle|\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\boldsymbol{\mathcal{G}}_1\middle|\boldsymbol{\mathcal{G}}_0\right)\begin{pmatrix}\mathscr{D}_{J-L}^{(0)}\\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(1)}\\ \hline \vdots\\ \hline \mathscr{D}_{J-1}^{(1)}\\ \hline \mathscr{D}_{J}^{(1)}\end{pmatrix}$$

$$=\left[\prod_{m=0}^{L}\boldsymbol{\mathcal{H}}_m\right]\mathscr{D}_{J-L}^{(0)}+\sum_{\ell=0}^{L}\left[\prod_{m=0}^{\ell-1}\boldsymbol{\mathcal{H}}_m\right]\boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell\mathscr{D}_{J-\ell}^{(1)}$$

值得注意的是, 在序列小波合成集成链的最后一个等价表达公式中, 在无穷维序列空间 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中, 原始无穷维序列向量被表示为 $(L+2)$ 个 “同维数” 列向量的和, 而且, 这些 “同维数” 列向量是相互正交的. 在多分辨率分析理论中, 引入无穷维序列线性空间 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中的列向量符号:

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_J^{(1)}&=\boldsymbol{\mathcal{G}}_0\mathscr{D}_J^{(1)}\\ \mathscr{R}_{J-1}^{(1)}&=\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\boldsymbol{\mathcal{G}}_1\mathscr{D}_{J-1}^{(1)}\\ &\vdots\\ \mathscr{R}_{J-L}^{(1)}&=\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_{L-1}\boldsymbol{\mathcal{G}}_L\mathscr{D}_{J-L}^{(1)}\\ \mathscr{R}_{J-L}^{(0)}&=\boldsymbol{\mathcal{H}}_0\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_{L-1}\boldsymbol{\mathcal{H}}_L\mathscr{D}_{J-L}^{(0)}\end{aligned}$$

那么, 正交向量组 $\{\mathscr{R}_J^{(1)},\mathscr{R}_{J-1}^{(1)},\cdots,\mathscr{R}_{J-L}^{(1)},\mathscr{R}_{J-L}^{(0)}\}$ 与 $\mathscr{D}_{J+1}^{(0)}$ 具有如下表示关系:

$$\mathscr{D}_{J+1}^{(0)}=\mathscr{R}_J^{(1)}+\mathscr{R}_{J-1}^{(1)}+\cdots+\mathscr{R}_{J-L}^{(1)}+\mathscr{R}_{J-L}^{(0)}$$

而且, 借用序列向量空间 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的子空间列记号 $\mathscr{W}_{J-\ell},\ell=0,1,2,\cdots,L,\mathscr{V}_{J-L}$, 上述列向量分解关系实际上对应于 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的正交直和分解:

$$\ell^2(\mathbb{Z})=\mathscr{V}_{J-L}\oplus\left[\bigoplus_{\ell=0,1,2,\cdots,L}\mathscr{W}_{J-\ell}\right]$$

这就是多分辨率分析小波链时频分析理论, 提供了尺度子空间的正交直和分

解关系、尺度子空间规范正交基的转换关系、尺度子空间函数或者信号的正交投影分解关系以及它们在各自子空间规范正交基下正交函数级数表示的分解关系、这些正交投影在各自子空间规范正交基下坐标变换关系，最后，在序列空间 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中提供了时频分析数值计算需要的向量正交投影关系和序列子空间正交直和分解关系．所有这些关系都体现了多分辨率分析小波链时频分析对函数或者信号的分析过程．这个时频联合局部化过程的频率域局部化将频带分割并限制为

$$\begin{aligned}(0,2^{J+2}\Delta(\Psi)] = (0,2^{J-L+1}\Delta(\Psi)] &\cup (2^{J-L+1}\Delta(\Psi),2^{J-L+2}\Delta(\Psi)]\\ &\cup (2^{J-L+2}\Delta(\Psi),2^{J-L+3}\Delta(\Psi)]\\ &\ \ \vdots\\ &\cup (2^{J+1}\Delta(\Psi),2^{J+2}\Delta(\Psi)]\\ = (0,2^{J-L+1}\Delta(\Psi)] &\cup \bigcup_{k=0}^{L}(2^{J-L+1+k}\Delta(\Psi),2^{J-L+2+k}\Delta(\Psi)]\end{aligned}$$

与此相应的时频联合局部化能力，即联合时频窗面积关系为

$$\begin{aligned}&\Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega))\\ &=\Delta(\varphi_{J+1,k})\left[\Delta(2^{-(J-L)/2}\Phi(2^{-(J-L)}\omega))+\sum_{k=0}^{L}\Delta(2^{-(J-L+k)/2}\Psi(2^{-(J-L+k)}\omega))\right]\geqslant\frac{1}{2}\end{aligned}$$

这个关系可以理解为，在时频联合局部化过程中，由于多分辨率分析理论框架提供的理论可能性，在满足信号或者函数时频局部化的时间窗宽要求的条件下，可以利用多分辨率分析小波链方法，不断提高频率局部化的能力．

受到小波链方法分解特性的限制，在保证时间域局部化达到要求的条件下，小波链时频分析方法逐步提高频率局部化能力的方式，每次都只能将尺度子空间或者尺度子空间的规范正交尺度函数平移基对应的频带分割为均等的左右两个半频带，如果再继续这样的分割过程，也只会对左边的半频带即“更小的尺度空间对应的频带”进行再分割，每次分割得到的右边的半频带即“小的小波子空间对应的频带”不会被再次分割，因此，小波子空间对应的时频局部化频带一旦出现，由相应带宽确定的频率域局部化能力就没有机会在小波链时频分析方法中得到进一步的改善．所幸的是，这个机会在小波包理论的时频分析方法中得以幸存，并由此彻底破解了时频分析方法的“测不准魔咒”．

(γ) 小波包和金字塔时频分析方法

在多分辨率分析小波包理论体系中，对于任意的整数 $J\in\mathbb{Z}$ 和任意的自然数 $L\in\mathbb{N}$，小波包分解关系的多次重复使用可以得到尺度子空间、小波子空间和小波包子空间的小波包链和金字塔正交直和分解关系，与此对应的是，得到这些正交直和分解过程产生的各个子空间的规范正交基．这些规范正交函数系的普遍存在、极其

简单的代数结构以及它们之间相互转换的近乎完美的酉变换关系，共同为小波包理论和金字塔理论能够在函数或者信号时频分析研究领域占据绝对优势地位并最终破解时频分析方法的“Heisenberg 测不准魔咒”奠定了坚实的理论和算法基础.

尺度子空间 V_{J+1} 具有如下小波包和金字塔式正交直和分解：

$$\begin{aligned} V_{J+1} &= U_{J+1}^0 (= V_J \oplus W_J) \\ &= U_J^0 \oplus U_J^1 \\ &= U_{J-1}^0 \oplus U_{J-1}^1 \oplus U_{J-1}^2 \oplus U_{J-1}^3 \\ &\vdots \\ &= U_{j-L}^0 \oplus U_{j-L}^1 \oplus \cdots \oplus U_{j-L}^{2^{L+1}-1} \end{aligned}$$

在最后的等式中，V_{J+1} 被分解为 2^{L+1} 个相互正交的小波包子空间的正交直和，在构造这些小波包子空间的整数平移规范正交函数基时，只需要利用第 0 级小波包(尺度函数)，第 1 级小波包(小波函数)，第 2 级小波包，…，第 $(2^{L+1}-1)$ 级小波包. 小波包函数列的伸缩整数平移函数系：

$$\bigcup_{m=0}^{(2^{L+1}-1)} \{2^{(J-L)/2}\mu_m(2^{J-L}x-n); n\in\mathbb{Z}\}$$

构成尺度子空间 V_{J+1} 的组合型规范正交小波包基，它由 2^{L+1} 个相互正交的规范正交函数系合并构成，其中每个都是由一个小波包函数经过伸缩平移产生的.

小波子空间 W_J 具有如下小波包塔式正交直和分解：

$$\begin{aligned} W_J &= U_{J-1}^2 \oplus U_{J-1}^3 \\ &= U_{J-2}^4 \oplus U_{J-2}^5 \oplus U_{J-2}^6 \oplus U_{J-2}^7 \\ &\vdots \\ &= U_{J-L}^{2^L} \oplus U_{J-L}^{2^L+1} \oplus \ \cdots \ \oplus U_{J-L}^{2^{L+1}-1} \end{aligned}$$

在最后的等式中，W_J 被分解为 2^L 个相互正交的小波包子空间的正交直和，在构造这些小波包子空间的整数平移规范正交函数基时，只需利用第 2^L 级小波包，第 (2^L+1) 级小波包，…，第 $(2^{L+1}-1)$ 级小波包. 小波包整数平移函数系：

$$\bigcup_{m=0}^{(2^L-1)} \{2^{(J-L)/2}\mu_{2^L+m}(2^{J-L}x-n)\ ; n\in\mathbb{Z}\}$$

是小波子空间 W_j 的规范正交基.

小波包空间 $\mathscr{U}_{J+1}^m$ 的小波包子空间正交直和分解关系是

$$\mathscr{U}_{J+1}^m = \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m} \oplus \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+1} \oplus \cdots \oplus \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+2^{L+1}-1}$$

而且，小波包整数平移函数系

$$\bigcup_{k=0}^{(2^{L+1}-1)}\{2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m+k}(2^{J-L}x-n);n\in\mathbb{Z}\}$$

是小波包子空间 $\mathscr{U}_{J+1}^{m}$ 的规范正交基. 其中, 当 $k=0,1,2,\cdots,(2^{L+1}-1)$ 时,

$$\mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+k}=\text{Closespan}\{2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m+k}(2^{J-L}x-n);n\in\mathbb{Z}\}$$

或者具体写出如下:

$$\begin{aligned}
\mathscr{U}_{J+1}^{m}&=\text{Closespan}\{2^{(J+1)/2}\mu_{m}(2^{J+1}x-n);n\in\mathbb{Z}\}\\
\mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m}&=\text{Closespan}\{2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m}(2^{J-L}x-n)\ ;n\in\mathbb{Z}\}\\
\mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+1}&=\text{Closespan}\{2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m+1}(2^{J-L}x-n)\ ;n\in\mathbb{Z}\}\\
&\ \vdots\\
\mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+2^{L+1}-1}&=\text{Closespan}\{2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m+2^{L+1}-1}(2^{J-L}x-n)\ ;n\in\mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

在小波包子空间 $\mathscr{U}_{J+1}^{m}$ 中, 如下两个函数系都是规范正交基:

$$\{2^{(J+1)/2}\mu_{m}(2^{J+1}x-n);n\in\mathbb{Z}\}\quad 和 \quad \bigcup_{k=0}^{(2^{L+1}-1)}\{2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m+k}(2^{J-L}x-n);n\in\mathbb{Z}\}$$

它们是等价的, 即

$$\boxed{\{\mu_{m,J+1,n}(x)=2^{(J+1)/2}\mu_{m}(2^{J+1}x-n);n\in\mathbb{Z}\}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{\bigcup_{k=0}^{2^{L+1}-1}\{2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m+k}(2^{J-L}x-n);n\in\mathbb{Z}\}}$$

可以互逆地表示如下:

$$(2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m+k}(2^{J-L}x-n);n\in\mathbb{Z})=(\mu_{m,J+1,n}(x);n\in\mathbb{Z})\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_L}^{(0)}\mathcal{H}_{\varepsilon_{L-1}}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(L-1)}\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(L)}\right]$$

其中

$$0\leqslant k\leqslant(2^{L+1}-1),\quad k=\sum_{v=0}^{L}\varepsilon_v\times 2^{v}=(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$$

即将 $k=0,1,\cdots,(2^{L+1}-1)$ 表示成 $(L+1)$ 位的二进制形式的字符串. 或者, 定义如下的矩阵:

$$\mathcal{R}_k=\mathcal{R}_{(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}=\left[\mathcal{H}_{\varepsilon_L}^{(0)}\mathcal{H}_{\varepsilon_{L-1}}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(L-1)}\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(L)}\right]$$

将上面的 2^{L+1} 个分离的方程组合成一个分块型行向量-矩阵乘积联合方程:

$$
\begin{aligned}
&(\mu_{2^{L+1}m+k,J-L,n}(x);n\in\mathbb{Z},0\leqslant k\leqslant(2^{L+1}-1))\\
&=(\mu_{m,J+1,n}(x);n\in\mathbb{Z})[\mathcal{R}_0\mid\mathcal{R}_1\mid\cdots\mid\mathcal{R}_{2^{L+1}-1}]
\end{aligned}
$$

其中，$n\in\mathbb{Z}$，$0\leqslant k\leqslant(2^{L+1}-1)$，而且

$$
\mu_{2^{L+1}m+k,J-L,n}(x)=2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m+k}(2^{J-L}x-n),\quad n\in\mathbb{Z},\quad 0\leqslant k\leqslant(2^{L+1}-1)
$$

反过来，上式的酉的逆关系表示为

$$
(\mu_{m,J+1,n}(x);n\in\mathbb{Z})=\sum_{k=0}^{2^{L+1}-1}(\mu_{2^{L+1}m+k,J-L,n}(x);n\in\mathbb{Z})\mathcal{R}_k^*
$$

或者等价地表示为

$$
(\mu_{m,J+1,n}(x);n\in\mathbb{Z})=(\mu_{2^{L+1}m+k,J-L,n}(x);n\in\mathbb{Z},0\leqslant k\leqslant(2^{\ell+1}-1))\left(\begin{array}{c}\mathcal{R}_0^*\\\hline\mathcal{R}_1^*\\\hline\vdots\\\hline\mathcal{R}_{2^{L+1}-2}^*\\\hline\mathcal{R}_{2^{L+1}-1}^*\end{array}\right)
$$

总之，小波包空间 $\mathcal{U}_{j+1}^m$ 的如下两个规范正交基

$$
\{2^{(J+1)/2}\mu_m(2^{J+1}x-n);n\in\mathbb{Z}\}\quad 和\quad \bigcup_{k=0}^{(2^{L+1}-1)}\{2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m+k}(2^{J-L}x-n);n\in\mathbb{Z}\}
$$

之间相互转换的过渡关系完全取决于转换矩阵-重建矩阵关系组：

$$
\left(\mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_0^{(1)}\cdots\mathcal{H}_0^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\middle|\cdots\middle|\mathcal{H}_1^{(0)}\mathcal{H}_1^{(1)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\middle|\mathcal{H}_1^{(0)}\mathcal{H}_1^{(1)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_1^{(L)}\right)
$$

转换矩阵||重建矩阵

$$
\left(\begin{array}{c}
\left[\mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_0^{(1)}\cdots\mathcal{H}_0^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\right]^*\\\hline
\left[\mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_0^{(1)}\cdots\mathcal{H}_0^{(L-1)}\mathcal{H}_1^{(L)}\right]^*\\\hline
\vdots\\\hline
\left[\mathcal{H}_1^{(0)}\mathcal{H}_1^{(1)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\right]^*\\\hline
\left[\mathcal{H}_1^{(0)}\mathcal{H}_1^{(1)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_1^{(L)}\right]^*
\end{array}\right)
$$

利用小波包子空间 $\mathcal{U}_{J+1}^m$ 的上述两个规范正交基以及它们之间过渡转换的转换矩阵-重建矩阵关系组，可以简洁表达任意函数或者信号在这两个规范正交小波包

基下的正交投影以及正交投影系数序列向量之间的坐标变换关系，更深入地说，这为小波包子空间中的函数或者信号进行时频分析并获得最优时频表达奠定了理论基础和算法基础.

假定 $f(x)$ 在 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的小波包子空间序列：

$$\mathscr{U}_{J+1}^{m}, \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m}, \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+1}, \cdots, \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+2^{L+1}-1}$$

上的正交投影是如下的函数序列：

$$f_{J+1}^{(m)}(x), f_{J-L}^{(2^{L+1}m)}(x), f_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)}(x), \cdots, f_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)}(x)$$

那么，这些小波包正交投影可以表示为

$$\begin{aligned} f_{J+1}^{(m)}(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_{J+1,n}^{(m)} \mu_{m,J+1,n}(x) \\ f_{J-L}^{(2^{L+1}m)}(x) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m)} \mu_{2^{L+1}m,J-L,s}(x) \\ f_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)}(x) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m+1)} \mu_{2^{L+1}m+1,J-L,s}(x) \\ &\vdots \\ f_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)}(x) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)} \mu_{2^{L+1}m+2^{L+1}-1,J-L,s}(x) \end{aligned}$$

而且成立如下求和恒等式：

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_{J+1,n}^{(m)} \mu_{m,J+1,n}(x) = & \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m)} \mu_{2^{L+1}m,J-L,s}(x) \\ & + \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m+1)} \mu_{2^{L+1}m+1,J-L,s}(x) + \cdots \\ & + \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)} \mu_{2^{L+1}m+2^{L+1}-1,J-L,s}(x) \end{aligned}$$

或者表示为

$$f_{J+1}^{(m)}(x) = f_{J-L}^{(2^{L+1}m)}(x) + f_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)}(x) + \cdots + f_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)}(x)$$

按照如下方式定义小波包正交投影系数序列向量：

$$\mathscr{D}_{J+1}^{(m)} = \{d_{J+1,n}^{(m)}; n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}} : \{\mu_{m,J+1,n}(x); n\in\mathbb{Z}\}$$

而且

$$\left(\begin{array}{c} \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m)} = \{d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m)}; s\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)} = \{d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m+1)}; s\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)} = \{d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)}; s\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}} \end{array}\right) : \left\{\begin{array}{r} \mu_{2^{L+1}m,J-L,s}(x); s\in\mathbb{Z} \\ \mu_{2^{L+1}m+1,J-L,s}(x); s\in\mathbb{Z} \\ \vdots \\ \mu_{2^{L+1}m+2^{L+1}-1,J-L,s}(x); s\in\mathbb{Z} \end{array}\right\}$$

那么，这些正交小波包投影的系数序列向量之间满足如下酉变换关系：

$$\begin{pmatrix} \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m)} \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-2)} \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{D}_{J-L}^{(00\cdots00)_2} \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(00\cdots01)_2} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(11\cdots10)_2} \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(11\cdots11)_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_0^{(1)}\cdots\mathcal{H}_0^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\right]^* \\ \hline \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_0^{(1)}\cdots\mathcal{H}_0^{(L-1)}\mathcal{H}_1^{(L)}\right]^* \\ \hline \vdots \\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(0)}\mathcal{H}_1^{(1)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\right]^* \\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(0)}\mathcal{H}_1^{(1)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_1^{(L)}\right]^* \end{pmatrix} \mathscr{D}_{J+1}^{(m)}$$

其逆变换是如下酉变换关系：

$$\mathscr{D}_{J+1}^{(m)} = \left[\mathcal{R}_0 \middle| \mathcal{R}_1 \middle| \cdots \middle| \mathcal{R}_{2^{L+1}-2} \middle| \mathcal{R}_{2^{L+1}-1}\right] \begin{pmatrix} \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m)} \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-2)} \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)} \end{pmatrix}$$

或者等价地表示为

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{J+1}^{(m)} &= \sum_{u=0}^{2^{L+1}-1} \mathcal{R}_u \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+u)} \\ &= \sum_{\substack{\varepsilon_v\in\{0,1\},\\ v=0,1,\cdots,L}} \mathcal{R}_{(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)} \end{aligned}$$

其中，$0 \leqslant u \leqslant (2^{L+1}-1), u = \sum_{v=0}^{L} \varepsilon_v \times 2^v = (\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\ldots\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$，

$$\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_{(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\ldots\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} = \mathcal{H}_{\varepsilon_L}^{(0)}\mathcal{H}_{\varepsilon_{L-1}}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(L-1)}\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(L)}$$

定义如下同维系数序列向量：

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_{J+1}^{(m)} &= \mathscr{D}_{J+1}^{(m)} \\ \mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m)} &= \mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_0^{(1)}\cdots\mathcal{H}_0^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m)} \\ \mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)} &= \mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_0^{(1)}\cdots\mathcal{H}_0^{(L-1)}\mathcal{H}_1^{(L)}\mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)} \\ &\vdots \\ \mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-2)} &= \mathcal{H}_1^{(0)}\mathcal{H}_1^{(1)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-2)} \\ \mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)} &= \mathcal{H}_1^{(0)}\mathcal{H}_1^{(1)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_1^{(L)}\mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)} \end{aligned}$$

那么，如下同维系数序列向量组：

$$\{\mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m)}, \mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)}, \cdots, \mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-2)}, \mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)}\}$$

是正交向量组，即

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m+s)} \perp \mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m+r)} \\ \Updownarrow \\ \left\langle \mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m+s)}, \mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m+r)} \right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = 0 \\ 0 \leqslant s \neq r \leqslant 2^{L+1}-1\end{array}}$$

同时满足

$$\mathscr{R}_{J+1}^{(m)} = \sum_{u=0}^{2^{L+1}-1} \mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m+u)}$$

这样，在小波包子空间 $\mathscr{U}_{J+1}^{m}$ 上，$f_{J+1}^{(m)}(x)$ 的时频分析直接体现为如下的正交函数级数分解：

$$f_{J+1}^{(m)}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_{J+1,n}^{(m)} \mu_{m,J+1,n}(x)$$

利用多分辨率分析小波包理论，这个时频分析可以转换为 $f_{J+1}^{(m)}(x)$ 在小波包子空间序列：

$$\mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m}, \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+1}, \cdots, \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+2^{L+1}-1}$$

上正交投影函数序列：

$$f_{J-L}^{(2^{L+1}m)}(x), f_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)}(x), \cdots, f_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)}(x)$$

的时频分析，由于小波包子空间 $\mathscr{U}_{J+1}^{m}$ 的如下正交直和分解关系：

$$\mathscr{U}_{J+1}^{m} = \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m} \oplus \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+1} \oplus \cdots \oplus \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+2^{L+1}-1}$$

保证这种时频分析的转换是酉的绝对等价转换，同时，如下正交函数级数恒等式：

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_{J+1,n}^{(m)} \mu_{m,J+1,n}(x) = & \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m)} \mu_{2^{L+1}m,J-L,s}(x) \\ & + \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m+1)} \mu_{2^{L+1}m+1,J-L,s}(x) + \cdots \\ & + \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)} \mu_{2^{L+1}m+2^{L+1}-1,J-L,s}(x)\end{aligned}$$

表明，这种函数时频分析的转换也可以表示为这些正交投影函数的正交投影系数序列向量的坐标变换关系：

$$\left(\begin{array}{c}\mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m)}\\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)}\\ \hline \vdots \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-2)}\\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\mathscr{D}_{J-L}^{(00\ldots00)_2}\\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(00\ldots01)_2}\\ \hline \vdots \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(11\cdots10)_2}\\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(11\cdots11)_2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\left[\mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_0^{(1)}\cdots\mathcal{H}_0^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\right]^*\\ \hline \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\mathcal{H}_0^{(1)}\cdots\mathcal{H}_0^{(L-1)}\mathcal{H}_1^{(L)}\right]^*\\ \hline \vdots \\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(0)}\mathcal{H}_1^{(1)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\right]^*\\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(0)}\mathcal{H}_1^{(1)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_1^{(L)}\right]^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{J+1}^{(m)}$$

或者

$$\mathscr{D}_{J+1}^{(m)}=\left[\mathcal{R}_0\middle|\mathcal{R}_1\middle|\cdots\middle|\mathcal{R}_{2^{L+1}-2}\middle|\mathcal{R}_{2^{L+1}-1}\right]\left(\begin{array}{c}\mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m)}\\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)}\\ \hline \vdots \\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-2)}\\ \hline \mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)}\end{array}\right)$$

或者

$$\mathscr{D}_{J+1}^{(m)}=\sum_{u=0}^{2^{L+1}-1}\mathcal{R}_u\mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+u)}=\sum_{\substack{\varepsilon_v\in\{0,1\},\\ v=0,1,\cdots,L}}\mathcal{R}_{(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}\mathscr{D}_{J-L}^{(2^{L+1}m+(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0)_2)}$$

或者

$$\mathscr{R}_{J+1}^{(m)}=\sum_{u=0}^{2^{L+1}-1}\mathscr{R}_{J-L}^{(2^{L+1}m+u)}$$

总之，无论哪一种表现形式，上述这些函数正交投影及其分解、正交投影函数系数序列向量的坐标变换关系，它们本质上都体现了小波包子空间 $\mathscr{U}_{J+1}^{m}$ 中函数或者信号 $f_{J+1}^{(m)}(x)$ 的时频分析过程，在这个转换过程中，时频联合局部化发生了显著的变化：时频联合局部化过程的频率域局部化将小波包子空间 $\mathscr{U}_{J+1}^{m}$ 对应的初始频带 $(0,2^{J+2}\Delta(\Psi)]$ 分割为 2^{L+1} 个子频带：

$$(2^{J-L+1}\xi\Delta(\Psi),2^{J-L+1}(\xi+1)\Delta(\Psi)],\quad \xi=0,1,2,\cdots,(2^{L+1}-1)$$

它们实际上完全对应于小波包子空间序列：

$$\mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m},\mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+1},\cdots,\mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+2^{L+1}-1}$$

相应的频带，详细的对应关系是：对于 $\xi=0,1,2,\cdots,(2^{L+1}-1)$，

$$\mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+\xi}\Leftrightarrow(2^{J-L+1}\xi\Delta(\Psi),2^{J-L+1}(\xi+1)\Delta(\Psi)]$$

在这样的讨论过程中，小波包子空间 $\mathscr{U}_{J+1}^{m}$ 的正交直和分解关系：

$$\mathscr{U}_{J+1}^{m} = \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m} \oplus \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+1} \oplus \cdots \oplus \mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+2^{L+1}-1}$$

对等于如下的频带划分：

$$(0, 2^{J+2}\Delta(\Psi)] = \bigcup_{\xi=0}^{(2^{L+1}-1)} (2^{J-L+1}\xi\Delta(\Psi), 2^{J-L+1}(\xi+1)\Delta(\Psi)]$$

与此相应的时频联合局部化能力，即联合时频窗面积关系为

$$\begin{aligned}
&\Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega)) \\
&= \Delta(\varphi_{J+1,k}) \times [2^{J+2}\Delta(\Psi)] \\
&= \Delta(\varphi_{J+1,k}) \times 2^{L+1} \times [2^{J-L+1}\Delta(\Psi)] \geqslant \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

这个关系可以理解为，在时频联合局部化过程中，由于多分辨率分析小波包理论提供的函数或者信号表达的广泛的可能性，在满足信号或者函数时频局部化的时间窗宽要求的条件下，可以利用多分辨率分析小波包和金字塔方法，倍增地提高频率局部化的能力，使时频分析的频率域局部化过程随着小波包级别的增长或者金字塔层级的增长，初始频带被分割成数量每次倍增的大量子频带，而这些子频带的带宽是每次被分割频带带宽的一半.

遵循这样的动态时频分析思想，从一个特定的初始状态

$$\Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega))$$

出发，根据简单的计算关系

$$\Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega)) = \Delta(\varphi_{J+1,k}) \times 2^{L+1} \times [2^{J-L+1}\Delta(\Psi)]$$

可以得到小波包级别增长和金字塔层级增长与频率域局部化频带带宽的关系：

$$[2^{J-L+1}\Delta(\Psi)] = \frac{\Delta(2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega))}{2^{L+1}}$$

其中 $L = 0, 1, 2, \cdots$ 表示小波包的级别或者金字塔的层级数. 因此，一个直接的推论就是，当 L 取适当大的数值时，必然出现

$$\Delta(\varphi_{J+1,k}) \times [2^{J-L+1}\Delta(\Psi)] = \frac{\Delta(\varphi_{J+1,k})\Delta(2^{-(J+1)/2}\Phi(2^{-(J+1)}\omega))}{2^{L+1}} < \frac{1}{2}$$

这就是小波包理论和金字塔理论在动态时频分析意义下突破“Heisenberg 测不准原理”的基本事实. 这同时解释了为什么在大量的理论分析应用和实际数据处理应用中，当小波分解级别增加或者小波包级别增加或者金字塔层级增加到一定数量时，研究问题的计算过程常常能够取得比较理想甚至是非常理想的数值结果这样的规律.

注释和讨论：在上述分析过程中，为了能够简单说明问题，在统计意义下把一个尺度子空间在频率域中对应于一个频域区间 $(0,2^{J+2}\Delta(\Psi)]$，同时，把这个尺度子空间正交直和分解中的小波子空间相应地对等于 $(2^{J+1}\Delta(\Psi),2^{J+2}\Delta(\Psi)]$，这是一个合理的处理方法. 这种处理方法巧妙地提供了尺度子空间正交直和分解理论在频域的直观理解途径. 这种处理模式其实具有典型的多分辨率分析正交小波和小波包的实例支撑. 读者稍微回顾一下 Shannon 多分辨率分析中理想低通和带通滤波器组的相关内容即可发现，那里出现的尺度函数和小波函数在时间域中展现的小波、小波链、小波包和金字塔理论，除了数值上稍有差别，尺度子空间、小波子空间、小波包子空间的正交直和分解在频域中的行为是绝对精确的频域区间分割，而且，十分意外的是，尺度子空间的一次正交直和分解在频域中正好是把一个频域区间严格分割为左右(内外)两个等宽的子区间！虽然这里的抽象理论分析并不以追求这样严格意义的数值计算为目标，而且，Shannon 多分辨率分析中低通和带通滤波器组的理想性质事实上破坏了 Shannon 小波的时域局部化性能(时域衰减比较慢)，但是这里希望强调的是，正是这种巧妙的处理方法，才保证可以十分简单地把小波包理论和金字塔理论作为强有力的时频分析方法，以及在大量应用中能够获得良好计算效果的根本源泉. 这一切应归功于多分辨率分析小波包理论和金字塔理论对“Heisenberg 测不准原理”这个时频分析理论魔咒的突破.

7.3.4 正交小波谱和正交小波包谱

前述分析和讨论已经清楚表明，多分辨率分析正交小波理论和正交小波包理论不仅是功能强大、性能卓越的时频分析方法，而且，由于正交小波包函数序列和金字塔结构的特殊构造方法能够完全实现时域(空域)-频域联动的十分自然的分析处理模式，自然而然地超越了时频分析理论“Heisenberg 测不准原理”的限制，解除了函数或者信号分析的“测不准魔咒”.

但是，实际上，多分辨率分析正交小波理论和正交小波包理论能够带给科学的“思想方法可能性”和“逻辑理论可能性”都远远不止这些. 这里尝试摒弃“频率”这个基本概念强加于科学思维的“枷锁”和“桎梏”，从“小波”和“小波包”概念的“本质逻辑内涵”出发，阐述函数或者信号分析处理的小波理论方法和小波包理论方法的新颖的、先进的科学思想，建立信号或者函数分析处理的小波谱理论和小波包谱理论，揭示小波谱分析方法和小波包谱分析方法在函数、分布或者算子理论研究中的可能的巨大潜力.

(α) 小波和小波谱

设 $\psi(x)$ 是正交小波，即伸缩平移函数系：

$$\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

构成函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基，这相当于在连续小波：

$$\psi_{(s,\mu)}(x)=\frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{x-\mu}{s}\right)$$

中，时间中心参数 μ 的离散化与尺度参数 s 的离散化是相互关联的，即对 $\forall j\in\mathbb{Z}$，当尺度参数 $s=2^{-j}$ 时，时间中心参数 μ 的离散化选择为 $\mu_k=2^{-j}k, k\in\mathbb{Z}$，与此相应的，频域中的频带 $(2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]$ 对应于时域的小波子空间，即函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的闭线性子空间：

$$W_j=\text{Closespan}\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$$

而且，与频域中互不相交的二进小波统计频带分割公式：

$$(0,+\infty)=\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}[2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]$$

相对应的是时间域中函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的小波子空间正交直和分解：

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}W_j=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\text{Closespan}\{\psi_{j,k}(x);k\in\mathbb{Z}\}$$

这样，函数或者信号 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的时频分析具有明确的时域空间正交直和再分割的意义，正交小波时频分析显得简单明了，分析过程的物理意义和数学意义同时都很清晰．在正交小波这种完美情况下，函数和信号 $f(x)$ 的小波时频分析最终表现为在平面二进网格点 $\{(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 上的“正交小波谱”分布分析：

$$\{W_f(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

这时，小波谱分布对原始信号 $f(x)$ 的重建公式就是类似于傅里叶级数的正交小波级数：

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}W_f(2^{-j},2^{-j}k)\psi_{j,k}(x)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2^{j/2}f_{j,k}\psi(2^jx-k)$$

其中，$(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，

$$W_f(2^{-j},2^{-j}k)=f_{j,k}=\int_{\mathbb{R}}f(x)\bar{\psi}_{j,k}(x)dx$$

是函数或者信号 $f(x)$ 的正交小波变换，被称为 $f(x)$ 的小波谱．

这时候，函数系 $\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 是由正交小波 $\psi(x)$ 产生的在各种不同尺度下中心在不同网格点处的再生正交小波，它们表示了一切可能的“基本单元”或者“时频原子”，从“时频原子分解”的观点来看，正交小波时频分析实质上是实现函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中任何信号“时频原子分解”的一种有效途径．

这里需要特别强调的是，正交小波级数类似于傅里叶级数，但与傅里叶级数又

有着本质的区别：傅里叶级数只是对周期信号才有意义，而正交小波级数是对整个函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的函数或者信号都是有效的，更重要的是，函数或信号 $f(x)$ 的正交小波级数的系数序列，正好是把这个正交小波作为容许小波时该函数 $f(x)$ 的连续小波变换 $W_f(s,\mu)$ 在平面二进网格点 $\{(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 上的“小波谱分布” $\{W_f(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$.

在正交小波条件下，中心频率(或主频)为 $\omega=3\times2^{j+1}\Delta(\Psi)$ 的频带正好是频域区间 $(2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]$，其宽度是 $2^{j+1}\Delta(\Psi)$. 当尺度参数 $s=2^{-j}$ 越来越小(相应于 $j\in\mathbb{Z}$ 的取值越来越大)时，中心频率或者主频 $\omega=3\times2^{j+1}\Delta(\Psi)$ 将越来越高，但同时频窗宽度 $2^{j+1}\Delta(\Psi)$ 也将越来越大，这意味着频率分辨率越来越差，这就是小波时频分析的一个典型缺陷，即高频低分辨率问题.

如何解决小波时频分析的高频低分辨率问题？这就导致正交小波包和小波包谱的出现.

(β) 小波包时频分析

为了把这个问题解释清楚，再次回到多分辨率分析和正交小波构造理论.

设 $(\{V_j;j\in\mathbb{Z}\},\varphi(x))$ 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的一个多分辨率分析，小波空间列 $\{W_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 满足关系 $W_j\perp V_j$，$V_{j+1}=W_j\oplus V_j$，$j\in\mathbb{Z}$. 尺度方程和小波方程是：对于 $k\in\mathbb{Z}$，

$$\begin{cases}\varphi_{j,k}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}h_{n-2k}\varphi_{j+1,n}(x)\\ \psi_{j,k}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}g_{n-2k}\varphi_{j+1,n}(x)\end{cases}$$

其中低通和带通滤波器表示如下：

$$\mathbb{H}(\omega)=2^{-0.5}\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_ne^{-i\omega n},\qquad \mathbb{G}(\omega)=2^{-0.5}\sum_{n\in\mathbf{Z}}g_ne^{-i\omega n}$$

两者同时满足 $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}|h_n|^2=\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}|g_n|^2=1$，用 $\Phi(\omega)$ 和 $\Psi(\omega)$ 分别表示尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换，那么，尺度方程和小波方程变成

$$\begin{cases}\Phi(2^{-j}\omega)=\mathbb{H}(2^{-(j+1)}\omega)\Phi(2^{-(j+1)}\omega)\\ \Psi(2^{-j}\omega)=\mathbb{G}(2^{-(j+1)}\omega)\Phi(2^{-(j+1)}\omega)\end{cases}$$

当 $\mathbb{G}(\omega)=\overline{\mathbb{H}}(\omega+\pi)\exp(-i\omega(1+2\kappa))$ 或者 $g_n=(-1)^{2\kappa+1-n}\overline{h}_{2\kappa+1-n}$ $n\in\mathbb{Z}$ 时，

$$\mathbf{M}(\omega)=\begin{pmatrix}\mathbb{H}(\omega) & \mathbb{H}(\omega+\pi)\\ \mathbb{G}(\omega) & \mathbb{G}(\omega+\pi)\end{pmatrix}$$

是酉矩阵，满足如下恒等式：

$$\mathbf{M}(\omega)\mathbf{M}^*(\omega)=\mathbf{M}^*(\omega)\mathbf{M}(\omega)=\mathbf{I}$$

其中 $\kappa\in\mathbb{Z}$ 是一个固定的整数.

在这里需要强调的是，这个过程能够由已知的尺度函数 $\varphi(x)$ 或者低通滤波器脉冲响应系数序列 $\{h_n;\ n\in\mathbb{Z}\}$ 构造性获得正交小波函数 $\psi(x)$.

这个过程一旦完成，那么就可以把 $\{h_n;\ n\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{g_n;\ n\in\mathbb{Z}\}$ 看作已知的两个系数序列，而尺度方程和小波方程就可以看作是由尺度子空间 V_1 的整数平移规范正交基 $\{\varphi_{1,k}(x)=\sqrt{2}\varphi(2x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 分别利用这两组系数重新组合这组整数平移规范正交基，得到两个函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$，保证它们的整数平移函数系都是 V_1 的规范正交系，而且，这两个整数平移规范正交函数系合并在一起可以构成 V_1 的规范正交基.

假设这两个规范正交函数系张成的线性子空间分别是 $\tilde{V}_0$ 和 $\tilde{W}_0$，则 $\tilde{V}_0=V_0$ 且 $\tilde{W}_0=W_0$，$\tilde{V}_0\oplus\tilde{W}_0=V_1$. 这说明，尺度方程和小波方程就像函数空间 V_1 的分割器一样，将函数线性闭子空间 V_1 分割成两个闭子空间 V_0 和 W_0 的正交直和. 如果将尺度方程和小波方程中的自变量 x 写成 2^jx，那么，相应的尺度为 $s=2^j$ 的尺度方程和小波方程就像尺度子空间 V_{j+1} 的正交直和分割器一样，将 V_{j+1} 分割成相互正交的两个闭线性子空间 W_j 和 V_j 的正交直和 $V_{j+1}=W_j\oplus V_j$.

分析过程表明，能实现尺度子空间的如此正交直和分割的根本点就两点：其一，待分割线性子空间存在整数平移规范正交基；其二，低通滤波器和带通滤波器脉冲响应系数序列各自下标偶数平移的正交性以及它们相互之间的正交性，即它们构成序列空间 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的相互正交的两个规范正交系. 实际上，在正交多分辨率分析中，不仅尺度空间 V_{j+1} 中存在形如 $\{\varphi_{j+1,k}(x)=2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 这样的整数平移规范正交函数基，同样，小波空间 W_{j+1} 也存在整数平移规范正交函数基 $\{\psi_{j+1,k}(x)=2^{(j+1)/2}\psi(2^{j+1}x-k);k\in\mathbb{Z}\}$，如是，利用尺度方程和小波方程就应该可以将小波子空间 W_{j+1} 分割为两个闭线性子空间的正交直和.

利用小波包函数序列 $\{\mu_m(x)\ ;\ m=0,1,2,\cdots\}$ 的定义：

$$\mu_0(x)=\varphi(x),\quad \mu_1(x)=\psi(x)$$

而且

$$\begin{cases}\mu_{2m}(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_n\mu_m(2x-n)\\ \mu_{2m+1}(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_n\mu_m(2x-n)\end{cases}$$

其中 $m=0,1,2,\cdots$.

假设 $j\in\mathbb{Z},m=0,1,2,\cdots$，引入函数子空间记号：

$$\mathscr{U}_j^m=\text{Closespan}\{\mu_{m,j,k}(x)=2^{j/2}\mu_m(2^jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$$

称之为尺度是 $s=2^{-j}$ 的第 m 级小波包子空间. 那么,

$$\begin{cases}\mu_{0,j,k}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_{n-2k}\mu_{0,j+1,n}(x), & k\in\mathbb{Z}\\ \mu_{1,j,k}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2k}\mu_{0,j+1,n}(x), & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

将获得尺度子空间 V_{j+1} 的正交直和分解，如下的三个规范正交函数系：

$$\{\mu_{0,j+1,n}(x);n\in\mathbb{Z}\},\quad\{\mu_{0,j,k}(x);k\in\mathbb{Z}\},\quad\{\mu_{1,j,k}(x);k\in\mathbb{Z}\}$$

分别构成 V_{j+1}，V_j 和 W_j 的规范正交基，而且成立 $V_{j+1}=W_j\oplus V_j$ 和 $V_j\perp W_j$.

接下来，将尺度是 $s=2^{-j}$ 的尺度方程和小波方程右边的整数平移规范正交基 $\{\mu_{0,j+1,n}(x);n\in\mathbb{Z}\}$ 替换为小波子空间 W_{j+1} 的规范正交基 $\{\mu_{1,j+1,n}(x);n\in\mathbb{Z}\}$，即

$$\begin{cases}\mu_{2,j,\ell}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_{n-2\ell}\mu_{1,j+1,n}(x), & \ell\in\mathbb{Z}\\ \mu_{3,j,\ell}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2\ell}\mu_{1,j+1,n}(x), & \ell\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

那么成立正交直和分解关系 $W_{j+1}=\mathscr{U}_{j+1}^1=\mathscr{U}_j^2\oplus\mathscr{U}_j^3$，而且，$\mathscr{U}_{j+1}^1,\mathscr{U}_j^2,\mathscr{U}_j^3$ 分别有如下规范正交基张成关系：

$$\begin{aligned}\mathscr{U}_{j+1}^1&=\text{Closespan}\{\mu_{1,j+1,n}(x)=2^{(j+1)/2}\mu_1(2^{j+1}x-n);n\in\mathbb{Z}\}\\ \mathscr{U}_j^2&=\text{Closespan}\{\mu_{2,j,\ell}(x)=2^{j/2}\mu_2(2^jx-\ell);\ell\in\mathbb{Z}\}\\ \mathscr{U}_j^3&=\text{Closespan}\{\mu_{3,j,\ell}(x)=2^{j/2}\mu_3(2^jx-\ell);\ell\in\mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

这样，利用尺度方程和小波方程，特别是低通和带通滤波器脉冲响应系数序列，成功将尺度空间 V_{j+1} 和小波子空间 W_{j+1} 进行正交直和分解，以纯粹数学分析的角度来看，这样的程序性操作是将“较大”的线性子空间分割成两个“较小”的线性子空间的正交直和. 根据小波时频分析的特性知，当尺度参数 $s=2^{-j}$ 时，对应的二进小波变换或正交小波变换本质上是将原始信号在频域局部化到如下频带或频窗内：

$$(2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]$$

这时，正交小波提供的函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的正交直和分解

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$$

对应的频率域分割是

$$(0,+\infty) = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} [2^{j+1}\Delta(\Psi), 2^{j+2}\Delta(\Psi)]$$

这时，小波子空间 W_{j+1} 对应的频带就是 $(2^{j+2}\Delta(\Psi), 2^{j+3}\Delta(\Psi)]$．在这里我们感兴趣的是，与小波子空间正交直和分解关系 $W_{j+1}=\mathscr{U}_{j+1}^1 = \mathscr{U}_j^2 \oplus \mathscr{U}_j^3$ 对应的频带分割关系是什么样的呢？

回顾多分辨率分析时频分析理论可知，与时间域中尺度子空间 V_{j+1} 的如下小波子空间正交直和分解：

$$V_{j+1} = \bigoplus_{k=-\infty}^{j} W_k$$

相对应的频带关系是

$$\bigcup_{k=-\infty}^{j} [2^{k+1}, 2^{k+2}]\Delta(\Psi) = (0, 2^{j+2}]\Delta(\Psi)$$

而与尺度子空间 V_{j+1} 的有限正交直和分解 $V_{j+1} = W_j \oplus V_j$ 相对应的频带分割是

$$(0, 2^{j+2}]\Delta(\Psi) = (0, 2^{j+1}\Delta(\Psi)] \cup (2^{j+1}\Delta(\Psi), 2^{j+2}\Delta(\Psi)]$$

这说明，$V_{j+1} = W_j \oplus V_j$ 将较宽的频带 $(0, 2^{j+2}]\Delta(\Psi)$ 对等地分割为等宽的两个子频带 $(0, 2^{j+1}\Delta(\Psi)]$ 和 $(2^{j+1}\Delta(\Psi), 2^{j+2}\Delta(\Psi)]$．前者相对低频，后者相对高频，但带宽都是 $2^{j+1}\Delta(\Psi)$．因此，尺度参数 $s = 2^{-j}$ 的尺度方程和小波方程被认为是在频域中将较宽频带 $(0, 2^{j+2}]\Delta(\Psi)$ 分割为两个带宽减半的子频带 $(0, 2^{j+1}\Delta(\Psi)]$ 和 $(2^{j+1}\Delta(\Psi), 2^{j+2}\Delta(\Psi)]$ 的频带均分分割器，以对应于它在时间域中将较大的尺度空间 V_{j+1} 分解为较小的尺度子空间 V_j 和小波子空间 W_j 的正交直和.

即 “尺度方程和小波方程” 的组合可以被认为是一种频带均分器，这种分割方法，从信号处理相关性角度来看，分割信号所得的两部分将不相关，即对 V_{j+1} 中的任何信号 $f_{j+1}^{(0)}(x)$，它向 V_j 和 W_j 的正交投影 $f_j^{(0)}(x)$，$f_j^{(1)}(x)$ 是相互正交的，它们分别是信号 $f_{j+1}^{(0)}(x)$ 在两个子频带 $(0, 2^{j+1}\Delta(\Psi)]$ 和 $(2^{j+1}\Delta(\Psi), 2^{j+2}\Delta(\Psi)]$ 上的局部化结果.

在正交小波包函数序列的定义中，因为使用了与“尺度方程和小波方程”相同的“低通滤波器和带通滤波器组”或相同的“低通和带通滤波器组脉冲响应系数列组”，因此，在这里我们有理由相信，如下的“小波包方程组”

$$\begin{cases}\mu_{2,j,\ell}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_{n-2\ell}\mu_{1,j+1,n}(x), & \ell\in\mathbb{Z}\\ \mu_{3,j,\ell}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2\ell}\mu_{1,j+1,n}(x), & \ell\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

在将小波空间 W_{j+1} 分解为正交直和 $W_{j+1}=\mathcal{U}_{j+1}^1=\mathcal{U}_j^2\oplus\mathcal{U}_j^3$ 的过程中，在频域中实质上同时把 W_{j+1} 对应的较宽的频带 $(2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]$ 均等地分割为左右两个带宽减半的子频带，即

$$\begin{aligned}(2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]=&(2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+1}\Delta(\Psi)+2^j\Delta(\Psi)]\\&\cup(2^{j+1}\Delta(\Psi)+2^j\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]\end{aligned}$$

类似可得，小波包子空间 $\mathcal{U}_{J+1}^m$ 的如下正交直和分解关系：

$$\mathcal{U}_{J+1}^m=\mathcal{U}_{J-L}^{2^{L+1}m}\oplus\mathcal{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+2^{L+1}-1}$$

在时频联合局部化过程中，在频率域中将小波包子空间 $\mathcal{U}_{J+1}^m$ 对应的初始频带 $(0,2^{J+2}\Delta(\Psi)]$ 均分为 2^{L+1} 个带宽为 $2^{J-L+1}\Delta(\Psi)$ 的子频带：

$$(2^{J-L+1}\xi\Delta(\Psi),2^{J-L+1}(\xi+1)\Delta(\Psi)],\quad \xi=0,1,2,\cdots,(2^{L+1}-1)$$

注释：这个表达式相当于 $J=j,\quad m=0$，小波包函数序列是 2^{L+1} 个小波包函数 $\mu_k(x),k=0,1,2,\cdots,(2^{L+1}-1)$．建议读者完成更一般的计算和表示．

因为小波包空间 $\mathcal{U}_{J+1}^m$ 的小波包子空间正交直和分解关系是

$$\mathcal{U}_{J+1}^m=\mathcal{U}_{J-L}^{2^{L+1}m}\oplus\mathcal{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+2^{L+1}-1}$$

所以小波包子空间 $\mathcal{U}_{J+1}^m$ 有如下两个规范正交基：

$$\{2^{(J+1)/2}\mu_m(2^{J+1}x-n);n\in\mathbb{Z}\}\quad 和\quad \bigcup_{k=0}^{(2^{L+1}-1)}\{2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m+k}(2^{J-L}x-n);n\in\mathbb{Z}\}$$

而且，小波包子空间 $\mathcal{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+k}$ 有如下小波包整数平移规范正交基：

$$\{2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m+k}(2^{J-L}x-n);n\in\mathbb{Z}\}$$

或者表示为

$$\mathcal{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+k}=\mathrm{Closespan}\{2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m+k}(2^{J-L}x-n);n\in\mathbb{Z}\}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,(2^{L+1}-1)$．

假定 $f(x)$ 在 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的小波包子空间序列：

$$\mathcal{U}_{J+1}^m,\mathcal{U}_{J-L}^{2^{L+1}m},\mathcal{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+1},\cdots,\mathcal{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+2^{L+1}-1}$$

上的正交投影是如下的函数序列：

$$f_{J+1}^{(m)}(x), f_{J-L}^{(2^{L+1}m)}(x), f_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)}(x), \cdots, f_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)}(x)$$

那么，这些小波包正交投影可以表示为

$$\begin{aligned}
f_{J+1}^{(m)}(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_{J+1,n}^{(m)} \mu_{m,J+1,n}(x) \\
f_{J-L}^{(2^{L+1}m)}(x) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m)} \mu_{2^{L+1}m,J-L,s}(x) \\
f_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)}(x) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m+1)} \mu_{2^{L+1}m+1,J-L,s}(x) \\
&\vdots \\
f_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)}(x) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)} \mu_{2^{L+1}m+2^{L+1}-1,J-L,s}(x)
\end{aligned}$$

而且成立如下求和恒等式：

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_{J+1,n}^{(m)} \mu_{m,J+1,n}(x) = &\sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m)} \mu_{2^{L+1}m,J-L,s}(x) \\
&+ \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m+1)} \mu_{2^{L+1}m+1,J-L,s}(x) + \cdots \\
&+ \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)} \mu_{2^{L+1}m+2^{L+1}-1,J-L,s}(x)
\end{aligned}$$

或者表示为

$$f_{J+1}^{(m)}(x) = f_{J-L}^{(2^{L+1}m)}(x) + f_{J-L}^{(2^{L+1}m+1)}(x) + \cdots + f_{J-L}^{(2^{L+1}m+2^{L+1}-1)}(x)$$

这样，$f_{J-L}^{(2^{L+1}m+\xi)}(x)$ 就是初始信号或者函数 $f_{J+1}^{(m)}(x)$ 经过小波包规范正交函数系：

$$\{2^{(J-L)/2}\mu_{2^{L+1}m+\xi}(2^{J-L}x-n); n\in\mathbb{Z}\}$$

作用之后在频域中被局部化到频带

$$(2^{J-L+1}\xi\Delta(\Psi), 2^{J-L+1}(\xi+1)\Delta(\Psi)]$$

内的时频局部化信息，其中 $\xi = 0, 1, 2, \cdots, (2^{L+1}-1)$．这相当于第 $(2^{L+1}m+\xi)$ 级小波包函数 $\mu_{2^{L+1}m+\xi}(x)$ 在尺度参数 $s = 2^{-(J-L)}$ 时，把原始信号 $f(x)$ 或者等价地把它在小波包子空间 $\mathscr{U}_{J+1}^{m}$ 上的正交投影 $f_{J+1}^{(m)}(x)$，在频域局部化到频带：

$$(2^{J-L+1}\xi\Delta(\Psi), 2^{J-L+1}(\xi+1)\Delta(\Psi)]$$

内得到的时频局部化信息 $f_{J-L}^{(2^{L+1}m+\xi)}(x)$，而且

$$f_{J-L}^{(2^{L+1}m+\xi)}(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_{J-L,s}^{(2^{L+1}m+\xi)} \mu_{2^{L+1}m+\xi,J-L,s}(x)$$

这个正交函数级数表明，$d_{J-L,n}^{(2^{L+1}m+\xi)}\mu_{2^{L+1}m+\xi,J-L,n}(x)$ 就是原始信号 $f(x)$ 或者等价地它

在小波包子空间 $\mathscr{U}_{J+1}^{m}$ 上的正交投影 $f_{J+1}^{(m)}(x)$，在时间点 $\mu_n = 2^{-(J-L)}n$ 处，在频域被局部化到频带 $(2^{J-L+1}\xi\Delta(\Psi), 2^{J-L+1}(\xi+1)\Delta(\Psi)]$ 内的时频局部化信息成分，即原始函数或者信号 $f(x)$ 中包含在频带 $(2^{J-L+1}\xi\Delta(\Psi), 2^{J-L+1}(\xi+1)\Delta(\Psi)]$ 内而且在时间点 $\mu_n = 2^{-(J-L)}n$ 附近的局部化联合时频成分，作为一个“时频原子”，其频率分辨率达到 $2^{J-L+1}\Delta(\Psi)$ (频带带宽)，在这种小波包分解程度上，对任何信号 $f(x)$ 而言，只要某个 $d_{J-L,\kappa}^{(2^{L+1}m+\xi)} \neq 0$，那么，只能从整体上判断它在时间点 $\mu_\kappa = 2^{-(J-L)}\kappa$ 附近存在由 $d_{J-L,\kappa}^{(2^{L+1}m+\xi)}$ 的数值度量的包含在频带 $(2^{J-L+1}\xi\Delta(\Psi), 2^{J-L+1}(\xi+1)\Delta(\Psi)]$ 内的局部化联合信息单元 $d_{J-L,\kappa}^{(2^{L+1}m+\xi)}\mu_{2^{L+1}m+\xi,J-L,\kappa}(x)$. 在不进行其他附加分析的前提下，不能理由充分地断言原始信号 $f(x)$ 在这个频带中的局部化联合时频信息是否本质地分布在这个小频带中某个或某几个频率点上，或者分布在这个频带内某个或某几个更短的子频带上，这体现出小波包函数 $\mu_{2^{L+1}m+\xi}(x)$ 在尺度参数为 $2^{-(J-L)}$ 的条件下，作为“波包”的整体单元，只能展现出原始信号 $f(x)$ 中包含的频率差异超过 $2^{J-L+1}\Delta(\Psi)$ 的局部化信息单元，这与时间点的位置无关. “波包”整体单元 $\mu_{2^{L+1}m+\xi}(x)$ 的频带分布由尺度参数值 $2^{-(J-L)}$ 的状态决定，在频带分布确定之后，时间位置的标定由 $\mu_\kappa = 2^{-(J-L)}\kappa$ 即尺度离散化 $2^{-(J-L)}$ 的整数倍决定，此时只需考察原始信号 $f(x)$ 在时间点列 $\{\mu_\kappa = 2^{-(J-L)}\kappa; \kappa \in \mathbb{Z}\}$ 各点处“波包”的各时频单元 $\mu_{2^{L+1}m+\xi,J-L,\kappa}(x); \kappa \in \mathbb{Z}$ 的数量度量，就可以准确度量原始信号蕴藏的频率分辨率为 $2^{J-L+1}\Delta(\Psi)$ 的存在于频带 $(2^{J-L+1}\xi\Delta(\Psi), 2^{J-L+1}(\xi+1)\Delta(\Psi)]$ 上的局部化时频联合信息.

总之，原始信号 $f(x)$ 在小波包子空间 $\mathscr{U}_{J+1}^{m}$ 上的正交投影 $f_{J+1}^{(m)}(x)$ 只需要由小波包函数正交级数：

$$f_{J+1}^{(m)}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_{J+1,n}^{(m)}\mu_{m,J+1,n}(x)$$

完成表示，而且，时间采样点列是 $\{\mu_n = 2^{-(J+1)}n; n \in \mathbb{Z}\}$，采样函数是

$$\mu_{m,J+1,n}(x) = 2^{(J+1)/2}\mu_m(2^{(J+1)}x - n)$$

函数或者信号的采样值为

$$d_{J+1,n}^{(m)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{\mu}_{m,J+1,n}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_{J+1}^{(m)}(x)\bar{\mu}_{m,J+1,n}(x)dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

相应地，它们的频率分辨率是 $2^{J+1}\Delta(\Psi)$，局部化频带是 $(0, 2^{J+2}\Delta(\Psi)]$，而此时的时间分辨率由 $s = 2^{-(J+1)}$ 决定. 当 J 为极大的数值时，$s = 2^{-(J+1)}$ 将变得非常小，从而

获得极高的时间分辨效果，但同时，频带 $(0,2^{J+2}\Delta(\Psi)]$ 将变得极宽，主频(或中心频率) $2^{J+1}\Delta(\Psi)$ 极高．由此突出显示了高频低分辨现象．

前述分析论证说明，多分辨率分析小波包理论为解决这个问题提供了最有效的途径．利用小波包空间 $\mathscr{U}_{J+1}^{m}$ 的小波包子空间正交直和分解关系：

$$\mathscr{U}_{J+1}^{m}=\mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m}\oplus\mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+1}\oplus\cdots\oplus\mathscr{U}_{J-L}^{2^{L+1}m+2^{L+1}-1}$$

可以把小波包子空间 $\mathscr{U}_{J+1}^{m}$ 对应的初始频带 $(0,2^{J+2}\Delta(\Psi)]$ 均分为 2^{L+1} 个带宽为 $2^{J-L+1}\Delta(\Psi)$ 的子频带 $(2^{J-L+1}\xi\Delta(\Psi),2^{J-L+1}(\xi+1)\Delta(\Psi)],\xi=0,1,2,\cdots,(2^{L+1}-1)$，即

$$(2^{j+1}\Delta(\Psi),2^{j+2}\Delta(\Psi)]=\bigcup_{\xi=0}^{(2^{L+1}-1)}(2^{J-L+1}\xi\Delta(\Psi),2^{J-L+1}(\xi+1)\Delta(\Psi)]$$

这样，通过小波包函数序列 $\{\mu_{2^{L+1}m+\xi}(x);\xi=0,1,2,\cdots,(2^{L+1}-1)\}$ 的分解，频率分辨能力为 $2^{J+1}\Delta(\Psi)$ 的高频采样信号 $f_{J+1}^{(m)}(x)$，将被 2^{L+1} 个频率分辨能力为 $2^{J-L+1}\Delta(\Psi)$ 的采样周期为 $s=2^{-(J-L)}$ 的低频采样信号 $f_{J-L}^{(2^{L+1}m+\xi)}(x)$，其中，$\xi=0,1,2,\cdots,(2^{L+1}-1)$ 所代替，频率分辨率得到显著提高．这种多级小波包分解或者多层金字塔分解方法不仅解决了小波或者小波包时频分析理论高频成分频率分辨能力差的问题，而且，7.3.3 小节已经论证了这种途径能够不断减小动态联合时频窗面积的下限，使这个下限迅速地、远远地小于“Heisenberg 测不准原理”设定的下限值 0.5，从而最终突破信号时频分析“测不准魔咒”的制约．

(γ) 小波包谱分析

在前述分析中，时间域的局部化和频率域的局部化是分别得以实现的，小波包时频局部化可以达到时间域和频率域各自的任意分辨率水平，这个过程不能同时满足这两个要求，但多分辨率分析小波包理论内在的逻辑可能性保证这两者在这个过程的不同阶段得以实现．这种理解方式同时解决了小波时频分析理论高频成分频率分辨能力差的问题和测不准原理对小波时频分析方法时频联合局部化能力的限制问题．

解决上述这些问题的基本前提是，信号的原始观察域是时间域或者空间域，而变换域或转换域是频率域．因此，除了原始信号的时间(空间)刻画外，需要使用信号的频率域刻画，即信号傅里叶频谱．在这样的概念体系中，产生了时频相平面、信号的时频联合窗、信号的时频联合表述，以及信号的联合时频局部化等再生概念，原始信号被局部化到联合时频窗的局部化信息，本质上是原始信号的特定时频成分，在特定应用需要的时候，比如在理想状态下，希望能够在准确的时间点仅存在单一

频率的“波”，就像在乐谱中所表现的那样，这就出现了在时域和频域同时精确定位的联合时频描述.

从测不准原理的角度来看，这是不可能的. 那为什么乐谱客观存在而理想的单一时间点单一频率这样的时域和频域同时精确定位的时频描述方法却不可能存在呢？

首先，乐谱中的“波”，任何时刻位置上的这种“波”，不是单一频率波；其次，从物理真理来看，单一频率的波在时间域的表现形式或存在形式是，以一个固定的波形、固定的周期和固定的幅值，从远古的从前，到现在讨论的目前，以及往后永不结束的未来存在于全时间域，即这是一种绝对的存在，只有这样，它才可能是一个单一频率的波，这和要求它在单一时间点存在，本身从逻辑上就是相矛盾的. 物理现实中的这个矛盾关系，在逻辑学中是不可调和的. 而测不准原理恰好是这种逻辑上不可调和的矛盾的一个刻画：要想获得时域的高精度定位，必然要以牺牲频域分辨率为代价，反之亦然. 而且，同时实现时频联合的时间和频率任意高精度定位是不可能的，最多只能达到某种程度即必然终止. 因此，可以认为测不准原理体现的实质是“频率”这个概念内蕴的不可调和的矛盾：当前要讨论的“波”的“频率”，必须要本质地联系到这个波从前的存在、目前正在讨论时的存在以及往后永不结束的未来的存在，即“频率”是一个绝对的永恒的存在，或者换一种说法，所谓的“波”就是像正弦或余弦那样的绝对的永恒的波，即它能记忆和回顾以前的状态，准确观察到目前的状态并完全预测到往后的永不结束的未来状态，矛盾集中体现为要判断某一个“波”是否存在，不能仅靠目前的观测，还必须像上帝一样，了解它已经流逝的过去，并准确预测它尚未变成现实的未来. 这个矛盾存在于任何以经典的“波”为工具和方法进行研究的科学问题中. 测不准原理用最简单的形式直接揭示了这样的矛盾.

乐谱的智慧给出了解决问题的另一个途径，即在特定的时间段内演奏特定的音符，而特定的音符由主频特别突出的谐波混合而成. 小波和小波包就具有这样的特征，即表明原始信号在某个时间点附近的一段时间内，是否包含特定频带或频率窗的波动，换言之，就是在指定的某些时间点附近是否存在相应的小波成分或小波包成分. 小波包理论提供了一种逻辑学自洽而且存在现实可能性的理论途径，能够在特定时间点和时间段范围观察和研究具有适当变化的现象，不仅如此，观察时间段范围的大小与观察对象或者现象变化的快慢之间具有一定的制约关系，这样，就可能在时间或者位置确定之后，通过选择观察的延续时间段或者空间的分布范围，再确定小波包函数级别以匹配适当的频带范围满足频率分辨率的要求，实现时间域和频率域双方期望高精度的定位，从而以这种方式突破测不准原理的限制.

这种突破测不准原理的解释方式，仍然使用以“频率”作为基础概念的“频带”进行说明，虽然解决了“测不准魔咒”的限制问题，但总有削足适履的感觉.

“频率”本质上是以正弦和余弦这种基本波形作为衡量工具刻画波动信号变化快慢，仿照这种理念，如果刻画波动信号变化快慢的衡量工具不再是正弦和余弦那样绝对标准的理想波形，而是像小波波形或小波包波形那样“有始有终”“显著波形有宽度”“变化快慢有规律”的“波”，那么，小波包理论与测不准原理之间的关系一下子就变得简单明了，毫无悬念.

因为，在时间域存在的小波或小波包(其实也包括尺度函数，因为它是父小波)，总是体现为在一段特定的时间内出现本质的波动，在此之前以及在此之后，这样的波动实际上本质地消失了，而这个有效时间段的长短以及“波”在该时间段内的“波形复杂度”就决定它本身作为“基本单元”的变化快慢，所以，就像理想的正弦或余弦波在频率域体现为在特定频率点处具有特定高度(对应幅值)的单谱线那样，尺度函数(父小波)、小波函数(母小波)、小波包函数(小波包)作为新的“基本单元”，它们在小波域(不再是频率域!)将体现为在特定的尺度参数 s 标定的点处具有特定高度(对应尺度函数分解系数、小波函数分解系数或小波包函数分解系数)的单谱线，这样，信号或者函数的尺度分析、小波分析和小波包分析最终集中体现为信号的小波谱和小波包谱分析. 当原始信号在尺度参数 s 的某些特殊取值(常被离散化为 2 的整数次幂的形式)以及位移参数 μ 取值为某些特定时间点时，相应的尺度变换系数或小波变换系数或小波包变换系数不为 0 时，在这些尺度参数点和位移参数点上以相应尺度系数或者小波系数或者小波包系数为高度的小波包谱线分布就构成了原始信号的小波包谱. 与傅里叶谱分析最大的区别在于，任何能量有限信号的小波包谱都是离散谱，没有必要讨论它的所谓连续谱，这是由小波包自身的理论性质决定的. 在这样的概念体系下，小波包理论的分析思想就彻底摆脱了以“绝对频率”为根本支撑的“测不准魔咒”的束缚.

核心思想体现在两个方面，这里研究第一方面. 在时间域某时刻附近一段时间内存在的尺度波、小波和小波包，在小波域的小波谱表现为一个谱点上的有一定高度的谱线，虽然具有一定的时宽，但在小波域的谱宽变为 0，即单点，这样，从原始观察域(比如时间域或者空间域)与变换分析域(比如小波域)的联合局部化能力，即联合窗面积就是 0，不会有大于 0 的某个常数下限，这种解释只针对作为“衡量标准工具”的尺度函数、小波函数和小波包函数来说明，对于任何原始信号，其对应的小波包变换所能达到的原始观察域(时域或者频域等)与小波域的联合局部化，体现为它在小波域(或小波包域)中的由大量小波谱线组成的离散小波谱或者小波包谱.

全体函数或者信号处理的共同标准模式是在谱点 $\{(2^{-j},2^{-j}k);(k,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ (即平面二进网格点)上的分离谱线分布，虽然在时间域中，谱点 $(2^{-j},2^{-j}k)$ 标志小波包 $\mu_{m,j,k}(x)=2^{j/2}\mu_m(2^jx-k)$ 在尺度参数 $s=2^{-j}$ 刻画的时刻点 $\mu_{j,k}=2^{-j}k$ 附近范围内的本质存在，而且具有一定量的时间窗宽，但是，在小波域中，这是一个孤立的谱

点，谱窗宽度是 0，而且从测度论的观点来看，在 2 维平面 s - μ 中，谱点

$$\{(2^{-j},2^{-j}k);(k,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

的测度是 0，这样，吸收了原始信号全部信息的小波包谱把原始信号在小波域精确局部化到这些准确的谱点上，而无任何谱宽. 这从第一方面说明了小波包理论对测不准原理的根本突破. 这种突破首先体现在概念体系被突破，从原来的“频率域”改变为“小波域”；其次体现在“测不准”的原始测量域与分析度量域联合局部化能力的下限被突破，从原来的最大下限 0.5 彻底放弃了下限，即下限变成唯一的 0. 但是研究和看待问题的方式没有被突破，即两者都采用了“原始测量域”与“分析度量域”联合局部化信息的方式来研究傅里叶变换、加窗傅里叶变换、小波变换、小波包变换的信息局部化能力. 这是一种有限的突破，即在无信息损失的前提下，研究联合局部化信息表达方式的综合局部化能力.

(δ) 小波与完美采样重构

现在讨论小波理论和小波包理论对测不准原理的真正彻底突破和扬弃，这就是小波和小波包突破测不准原理的第二方面，即最紧凑和最精致的无信息损失离散信号表达方法.

在测不准原理中，在使用时频联合窗局部化信息的过程中，为了保证无信息损失的信号表达，测不准原理给出了信号表达所用的最小时频联合窗，即信息局部化只能紧凑到这样的程度，当然，这个问题的前提是研究工作针对全部能量有限信号或者平方可积函数.

比如，对带限信号 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，存在 $\mathrm{B}>0$，当 $|\omega|>\mathrm{B}$ 时，

$$(\mathscr{F}f)(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=0$$

在这样的条件下，如果 $0<\Delta\leqslant\pi/\mathrm{B}$，那么 $f(x)$ 的信息全部有效地集中在 $x=n\Delta$，$n\in\mathbb{Z}$ 这样的离散点列上，而且

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n\Delta)\frac{\sin(\Delta^{-1}\pi)(x-n\Delta)}{(\Delta^{-1}\pi)(x-n\Delta)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n\Delta)\varphi(x-n\Delta)$$

其中

$$\varphi(x)=\frac{\sin(\Delta^{-1}\pi)x}{(\Delta^{-1}\pi)x}$$

这样，信息单元 $\varphi(x-n\Delta),n\in\mathbb{Z}$ 提供了信号 $f(x)$ 的最紧凑无信息损失的离散表达方式，而 $f(n\Delta)$ 正好是原始信号 $f(x)$ 在采样时间点 $x=n\Delta,n\in\mathbb{Z}$ 上的原始测量

值. 这样，信号 $f(x)$ 就被精确定位到准确的离散时间采样点列 $\{x=n\Delta;n\in\mathbb{Z}\}$ 上，此时，信息单元 $\varphi(x-n\Delta)$ 是中心在 $x=n\Delta$ 处的宽度由 Δ 确定的 sinc 信号，它被作为衡量工具用于吸收或衡量原始信号 $f(x)$ 的信息，再者，而且这是非常重要的，函数或者信号 $f(x)$ 在信息单元 $\varphi(x-n\Delta)$ 衡量下恰好是 $f(x)$ 在 $x=n\Delta$ 处的原始测量值，这体现了另一种意义下的紧凑性质，即对前述带限信号 $f(x)$ 而言，Shannon 插值方法不仅把 $f(x)$ 的信息按时间分布从全时间域紧凑地集中到离散时间采样点列 $\{x=n\Delta;n\in\mathbb{Z}\}$ 上，而且，集中在各采样点上的信息也仅仅集中了原始信号在该时间点上的原始测量值，与附近其他的以及更远处的信号取值都没有直接关系.

这是一种双重的紧凑格式，即信息的空间连续分布或者时间连续分布被紧凑地集中到离散采样点列，同时把分布在连续空间上或者连续时间上的信息紧凑地集中到函数或者信号在这些离散采样点上的原始函数值或者信号取值，具有非常优美的表达形式.

遗憾的是，这种方法只对部分能量有限信号是有效的，还有大量其他信号，无法利用这种方法进行有效表达. 而恰恰是在这一方面，小波和小波包理论提供了绝无仅有的完美表达，彻底颠覆了测不准原理的理念. 下面的研究工作被称为完美采样及重构定理.

在 $\psi(x)$ 是正交小波的条件下，作为空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基，正交小波函数系 $\{\psi_{j,k}(x);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 是容许小波函数系 $\{\psi_{(s,\mu)}(x);(s,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\}$ 按照基函数参数 $(s,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ 首先折叠为参数半平面 $\{(s,\mu);(s,\mu)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\}$ 之后再离散化为平面二进网格点 $\{(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 进行抽取构成的可数基. 虽然函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的这两个规范正交基都可以提供函数的有效正交表达，但是可数的正交小波函数系具有充分的理由应该更受青睐. 下面的小波完美采样理论就是最好的例证之一.

回顾第 3 章的小波基本理论以及相应的符号，如果 $\psi(x)$ 是正交小波，即函数系 $\{\psi_{j,k}(x);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交小波基，定义如下的线性变换：

$$\begin{aligned}\mathscr{W}:\ &\mathcal{L}^2(\mathbb{R})\to\ell^2(\mathbb{Z}^2)\\ &\psi_{j,k}(x)\mapsto\delta_{(j,k)},\quad (j,k)\in\mathbb{Z}^2\end{aligned}$$

其中，$\delta_{(j,k)}=(a_{r,s};(r,s)\in\mathbb{Z}^2)\in\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 定义如下：

$$a_{r,s}=\begin{cases}1, & (r,s)=(j,k)\\ 0, & (r,s)\neq(j,k)\end{cases}$$

可以证明这个线性变换是一个酉算子. 这个酉算子 $\mathscr{W}:\mathcal{L}^2(\mathbb{R})\to\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 也可以重新

表示如下：

$$\mathscr{W}: \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{Z}^2)$$
$$f(x) \mapsto \mathscr{W}_f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} W_f(2^{-j}, 2^{-j}k)\delta_{(j,k)} \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$$

由于正交小波 $\psi(x)$ 同时也是容许小波，将函数或者信号 $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的连续小波变换表示为

$$\mathbb{W}: \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^2, s^{-2}dsd\mu)$$
$$f(x) \mapsto (\mathbb{W}f)(s,\mu) = W_f(s,\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi_{(s,\mu)}(x)dx$$

利用这些记号和性质可知，如下的采样算子

$$\mathscr{S}: \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^2, s^{-2}dsd\mu) \to \ell^2(\mathbb{Z}^2)$$
$$W(s,\mu) \mapsto \mathscr{S}_W \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$$
$$\mathscr{S}_W(j,k) = W(2^{-j}, 2^{-j}k), \quad (j,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

是一个酉算子.

这个采样算子表明，从小波变换的“像空间” $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^2, s^{-2}dsd\mu)$ 利用容许小波变换算子的酉性逆返回到函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，**再利用正交小波级数算子的酉性从函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 映射到“无穷矩阵空间”** $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$，这两个步骤涉及的算子都是线性酉算子，这样可以把采样算子抽象地表示为

$$\mathscr{S} = \mathscr{W}\mathbb{W}^{-1}: \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^2, s^{-2}dsd\mu) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{Z}^2)$$

因为 $\mathscr{S} = \mathscr{W}\mathbb{W}^{-1}$ 是两个线性酉算子的“乘积”，所以它必然是线性酉算子. 这就是小波完美采样定理，$\mathscr{S}$ 被称为小波完美采样算子.

小波采样算子把二元函数空间 $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^2, s^{-2}dsd\mu)$ 中的任何二元函数 $W(s,\mu)$ 按照共同的格式转化为 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中的“无穷矩阵” $\mathscr{S}_W$，特别之处在于，

$$\mathscr{S}_W = \{\mathscr{S}_W(j,\ k) = W(2^{-j}, 2^{-j}k); (j,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

正好是在半平面 $\{(s,\mu); (s,\mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$ 中网格 $\{(2^{-j}, 2^{-j}k); (j,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 上二元函数 $W(s,\mu)$ 的函数值，而且这个转换过程是线性的和酉性的.

小波完美采样算子 $\mathscr{S}$ 的逆算子是酉算子，可以形式化表示如下：

$$\mathbb{S} = \mathscr{S}^{-1} = \mathbb{W}\mathscr{W}^{-1}: \ell^2(\mathbb{Z}^2) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, s^{-2}dsd\mu)$$

具体地，如果 $\alpha = \{\alpha_{j,k}; (j,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 是 $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, s^{-2}dsd\mu)$ 中函数 $W(s,\mu)$ 在 $\{(s,\mu); (s,\mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$ 上网格 $\{(2^{-j}, 2^{-j}k); (j,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 上的小波采样：

$$\alpha_{j,k} = W(2^{-j}, 2^{-j}k), \quad (j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

那么，成立如下小波完美插值公式：

$$W(s,\mu) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{j,k} \xi_{j,k}(s,\mu)$$

其中，$\forall (j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$，

$$\xi_{j,k}(s,\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j,k}(x) \overline{\psi}_{(s,\mu)}(x) dx$$

这就是小波插值基元函数系.

正交小波完美插值公式可以表示为

$$W(s,\mu) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(2^{-j}, 2^{-j}k) \xi_{j,k}(s,\mu)$$

其中，小波插值基元函数系 $\{\xi_{j,k}(s,\mu); (j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ 独立于函数 $W(s,\mu)$，完全由小波函数 $\psi(x)$ 决定，而正交小波函数 $\psi(x)$ 是与函数空间 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, s^{-2} ds d\mu)$ 密切关联的. 利用小波完美采样算子 $\mathscr{O}$ 与小波完美插值算子 $\mathbb{S}$ 的互逆性和酉性可知，小波插值基元函数系 $\{\xi_{j,k}(s,\mu); (j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ 构成 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, s^{-2} ds d\mu)$ 的可数规范正交基.

显然，希尔伯特空间 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, s^{-2} ds d\mu)$，$\ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ 和 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 不仅是同构的，而且还保持内积和范数的完全一致性. 比如，仿照函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中的正交小波级数理论，在希尔伯特空间 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, s^{-2} ds d\mu)$ 中存在一个“镜像”一样的“正交函数项级数”理论，即在希尔伯特空间 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, s^{-2} ds d\mu)$ 中存在如下的“正交函数项级数”展开公式：

$$W(s,\mu) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(2^{-j}, 2^{-j}k) \xi_{j,k}(s,\mu)$$

其中，$\forall (j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$W(2^{-j}, 2^{-j}k) = \iint_{\mathbb{R}^2} W(s,\mu) [\xi_{j,k}(s,\mu)]^* s^{-2} ds d\mu$$

对于任意的 $W(s,\mu) \in \mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, s^{-2} ds d\mu)$ 都成立.

这个定理说明，在函数空间 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, s^{-2} ds d\mu)$ 中，函数的采样插值重建公式与函数的正交级数展开表达式完全一致.

可数函数系 $\{\xi_{j,k}(s,\mu); (j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, s^{-2} ds d\mu)$ 的规范正交基，同时也是插值基元函数系，即它是完全的规范正交函数系：

$$\left\langle \xi_{j,k}(s,\mu),\xi_{j',k'}(s,\mu),\right\rangle_{\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)}=\left\langle \psi_{j,k}(x),\psi_{j',k'}(x)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\delta(j-j')\delta(k-k')$$

其中 $(j,k,j',k')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^4$.

根据小波插值基元函数的定义

$$\xi_{j,k}(s,\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{j,k}(x)\overline{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx,\quad \forall(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

可知，小波插值基元函数 $\xi_{j,k}(s,\mu)$ 是 $\psi_{j,k}(x)$ 的连续小波变换. 因为 $\psi(x)$ 是正交小波函数，所以，当 $(s,\mu)=(2^{-j},2^{-j}k)$ 时，$\xi_{j,k}(s,\mu)=\xi_{j,k}(2^{-j},2^{-j}k)=1$，除此之外，当 $(s,\mu)=(2^{-m},2^{-m}n)$ 而且 $(j,k)\neq(m,n)$ 时，$\xi_{j,k}(s,\mu)=\xi_{j,k}(2^{-m},2^{-m}n)=0$. 在半平面 $\{(s,\mu);(s,\mu)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\}$ 上的网格 $\{(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 之外，即

$$(s,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}-\{(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

小波插值基元函数 $\xi_{j,k}(s,\mu)$ 与 sinc 函数类似.

(ε) 完美信息凝聚

在正交小波 $\psi(x)$ 给定之后，

$$\{\psi_{(s,\mu)}(x);(s,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\},\quad \{\psi_{(s,\mu)}(x);x\in\mathbb{R}\}$$
$$\{\psi_{j,k}(x);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\},\quad \{\xi_{j,k}(s,\mu);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$$

都是规范正交函数系，它们使空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$, $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$ 和 $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$ 是保内积一致同构的.

将前述分析获得的结果总结在如下两个矩形方框中.

$$W(s,\mu)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}W(2^{-j},2^{-j}k)\xi_{j,k}(s,\mu),\quad (s,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$$
$$\xi_{j,k}(s,\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{j,k}(x)\overline{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx,\quad (j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

而且

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R},dx)$, $f(x)$ $\xrightarrow{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\psi^*_{(s,\mu)}(x)dx\Rightarrow W(s,\mu)}$ $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$, $W(s,\mu)$

$\xleftarrow{f(x)\Leftarrow\iint_{\mathbb{R}^2}W(s,\mu)\psi_{(s,\mu)}(x)s^{-2}dsd\mu}$

$\Updownarrow$

$\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$, $\{\alpha_{j,k},(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ $\xrightarrow{\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{j,k}\xi_{j,k}(s,\mu)\Rightarrow W(s,\mu)}$ $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$, $W(s,\mu)$

$\xleftarrow{W(2^{-j},2^{-j}k)\Leftarrow\iint_{\mathbb{R}^2}W(s,\mu)[\xi_{j,k}(s,\mu)]^*s^{-2}dsd\mu}$

在正交小波 $\psi(x)$ 给定之后，把小波插值基元函数

$$\xi_{j,k}(s,\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{j,k}(x)\overline{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx,\quad \forall(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

称为万能函数, 相应地, 把函数方程

$$W(s,\mu)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}W(2^{-j},2^{-j}k)\xi_{j,k}(s,\mu)$$

其中 $W(s,\mu)\in\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$，称为局部化函数空间 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$ 上的万能公式.

实际上, 在正交小波 $\psi(x)$ 给定之后, 可数函数系 $\{\xi_{j,k}(s,\mu);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$ 的规范正交基, 其中的任何向量(函数) W 既可以用连续自变量 $(s,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ 表示成 $W(s,\mu)$，也可用 $\{(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 这样的网格表示成"无穷矩阵" $\{W(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$. 这两种表示方法完全等价, 可以任意自由转化, 转化方式简单、线性而且保内积.

因此, 在正交小波 $\psi(x)$ 给定之后, 函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 以及其中函数或者信号的研究可以完全在保线性运算和内积的条件下等价转换到局部化函数空间

$$\mathcal{L}^2_{Loc}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$$

对任何函数或者信号 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，在"孪生空间" $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$ 中, 它被表示为 $W_f(s,\mu)\in\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$，或者被无条件地、绝对精确地局部化到小波域采样网格点 $\{(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 上, 没有信息损失, 最紧凑地由 $W_f(s,\mu)$ 的离散函数数值 $\{W_f(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 进行完美的表达. 它们之间具有简单的转换关系:

$$\boxed{\begin{gathered}f(x)=\int_{\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}}W_f(s,\mu)\psi_{(s,\mu)}(x)s^{-2}dsd\mu\\ \Updownarrow\\ W_f(s,\mu)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}W_f(2^{-j},2^{-j}k)\xi_{j,k}(s,\mu)\end{gathered}}$$

其中,

$$\xi_{j,k}(s,\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{j,k}(x)\overline{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx,\quad \forall(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

是万能函数, 独立于函数或者信号 $f(x)$.

另外, 如果返回到函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, 那么, 上述关系公式可以等价地表现为由小波谱分布对原始信号 $f(x)$ 的重建公式正交小波级数:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W_f(2^{-j}, 2^{-j}k)\psi_{j,k}(x) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{j/2} f_{j,k}\psi(2^j x - k) \end{aligned}$$

其中,

$$f_{j,k} = W_f(2^{-j}, 2^{-j}k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{\psi}_{j,k}(x)dx, \quad (j,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

是函数或者信号 $f(x)$ 的正交小波变换, 被称为 $f(x)$ 的小波谱.

信息表达的这种紧凑格式把信息空间分布彻底局部化到空间测度为 0 的网格点 $\{(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 上, 同时, $W_f(s,\mu)\in\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$ 的全体信息数值也被局部化到 $W_f(s,\mu)$ 在空间采样网格点 $\{(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 的每一点的函数值 $\{W_f(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 上, 即空间位置分布被精确局部化到网格点 $(2^{-j},2^{-j}k)$ 时, 相应地, 函数信息数值也被精确局部化到 $W_f(s,\mu)$ 在该点处的信息数值 $W_f(2^{-j},2^{-j}k)$, 不同点之间相互独立互不影响. 实现了堪称完美的信息凝聚.

除此之外, 在局部化函数空间 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$ 中, 信息凝聚或者采样的方式是完全一致的网格 $\{(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$, 即使改变正交小波函数, 这类信息凝聚或者采用的完美方式永远都是在相同的网格 $\{(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 上实现的, 同时也独立于局部化函数空间 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$. 因为局部化函数空间 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$ 与函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的线性保内积完全同构, 所以, 正交小波理论简洁地、最紧凑和最精致地实现了完美信息凝聚.

(ζ) 小波包谱的延伸

前述分析讨论充分说明, 在小波谱和小波包谱的概念体系下, 无论是原始测量域与分析度量域(变换域)的联合表述, 还是信息的最紧凑和最精致的完美凝聚, 在局部化函数空间 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$ 和在函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中刻画函数或者信号 $f(x)$ 或者 $W_f(s,\mu)$ 或者矩阵 $\{W_f(2^{-j},2^{-j}k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 本质上完全等价, 只是形式不同而已, 都体现了小波理论和小波包理论在函数表达或者信号表达研究中局部化信息或者完美凝聚信息的优越性.

这里尝试示范性利用小波包理论和方法, 扩充和延伸这种函数或者信号刻画方法的表达形式, 从方法论的角度为函数、函数空间、分布和算子研究提供更广泛的可选途径和思想方法.

从函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 正交直和分解的形式出发, 此前的分析仅仅建立在函数空间

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的小波子空间正交直和分解的如下形式上：

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \text{Closespan}\{\psi_{j,k}(x); k\in\mathbb{Z}\}$$

多分辨率分析正交小波包理论能够为函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 正交直和分解提供异常丰富和广泛的选择形式.

比如，在多分辨率分析理论中，函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 具有如下正交直和分解：

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = V_J \oplus \left[\bigoplus_{j\geqslant J} W_j\right] = V_J \oplus \left[\bigoplus_{j=J}^{+\infty} W_j\right]$$

这样，对任何函数或者信号 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，将它在闭子空间列：

$$V_J, W_J, W_{J+1}, \cdots, W_{J+L}, \cdots$$

上的正交投影表示为

$$f_J^{(0)}(x),\quad f_j^{(1)}(x),\quad j = J, J+1, \cdots$$

那么，

$$f(x) = f_J^{(0)}(x) + \sum_{j=J}^{+\infty} f_j^{(1)}(x)$$

而且，对于 $j = J, J+1, \cdots$,

$$\begin{cases} f_J^{(0)}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} V_f(2^{-J}, 2^{-J}k)\varphi_{J,k}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{J/2} f_{J,k}^{(0)}\varphi(2^J x - k) \\ f_j^{(1)}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} W_f(2^{-j}, 2^{-j}k)\psi_{j,k}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{j/2} f_{j,k}^{(1)}\psi(2^j x - k) \end{cases}$$

其中，$j = J, J+1, \cdots$, $k\in\mathbb{Z}$,

$$V_f(2^{-J}, 2^{-J}k) = f_{J,k}^{(0)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi}_{J,k}(x)dx$$

$$W_f(2^{-j}, 2^{-j}k) = f_{j,k}^{(1)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi}_{j,k}(x)dx$$

而且 $k\in\mathbb{Z}$ 时的 $V_f(2^{-J}, 2^{-J}k)$ 可以理解为如下定义的尺度变换函数 $V_f(s,\mu)$：

$$\begin{aligned} V_f(s,\mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\varphi}_{(s,\mu)}(x)dx \\ &= |s|^{-0.5}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^*(s^{-1}(x-\mu))dx \end{aligned}$$

其中 $(s,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$，在网格点 $(2^{-J}, 2^{-J}k)$ 上的函数取值.

利用尺度子空间和小波子空间的规范正交基，可以得到

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V_f(2^{-J}, 2^{-J}k)\varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=J}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} W_f(2^{-j}, 2^{-j}k)\psi_{j,k}(x)$$

在上式两端 $\times\bar{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx$ 积分得到在局部化函数空间 $\mathcal{L}^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$ 中的等价表达形式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\bar{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx=\sum_{k\in\mathbb{Z}}V_f(2^{-J},2^{-J}k)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{J,k}(x)\bar{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx$$
$$+\sum_{j\geqslant J}\sum_{k\in\mathbb{Z}}W_f(2^{-j},2^{-j}k)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{j,k}(x)\bar{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx$$

直接演算得到

$$W_f(s,\mu)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}V_f(2^{-J},2^{-J}k)\zeta_{J,k}(s,\mu)+\sum_{j=J}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}W_f(2^{-j},2^{-j}k)\xi_{j,k}(s,\mu)$$

其中，$j=J,J+1,\cdots$，$k\in\mathbb{Z}$，

$$\begin{cases}\zeta_{J,k}(s,\mu)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{J,k}(x)\bar{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx\\ \xi_{j,k}(s,\mu)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{j,k}(x)\bar{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx\end{cases}$$

这种处理模式的根据是在多分辨率分析中将 W_j，$j=J-1,J-1,\cdots$ 这样的小波子空间列合并生成尺度子空间 V_J：

$$V_J=\bigoplus_{j=-\infty}^{J-1}W_j$$

需要注意的是，多分辨率分析保证这个尺度子空间存在由尺度函数 $\varphi(x)$ 的伸缩平移构成的规范正交基.

这个分析模式的最显著特征是，因为尺度子空间 V_J 以及它的由尺度函数 $\varphi(x)$ 的伸缩平移构成的规范正交基

$$\{\varphi_{J,k}(x)=2^{J/2}\varphi(2^Jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$$

的引入，函数或者信号 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的“小波谱”变成了“尺度谱和小波谱”的混合谱，即

$$\{V_f(2^{-J},2^{-J}k),W_f(2^{-j},2^{-j}k);j\geqslant J,k\in\mathbb{Z}\}$$

而且谱线在平面网格中只分布在如下的有限宽度网格点上：

$$\{(2^{-j},2^{-j}k);j\geqslant J,k\in\mathbb{Z}\}$$

这类处理模式引入了尺度子空间和尺度函数，相应地，除了出现典型的小波谱 $\{W_f(2^{-j},2^{-j}k);j\geqslant J,k\in\mathbb{Z}\}$ 之外，还出现了尺度谱成分 $\{V_f(2^{-J},2^{-J}k);k\in\mathbb{Z}\}$.

另一类小波包谱分析延伸模式是，函数或者信号分析过程中混合出现尺度谱、小波谱和小波包谱.

比如，在此前的分析模式中，将小波子空间 W_L 分解为两个小波包子空间的正交直和 $W_L = \mathscr{U}_L^1 = \mathscr{U}_{L-1}^2 \oplus \mathscr{U}_{L-1}^3$，其中 $L > J$，而且

$$\mathscr{U}_{L-1}^2 = \text{Closespan}\{\mu_{2;L-1,k}(x); k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\mathscr{U}_{L-1}^3 = \text{Closespan}\{\mu_{3;L-1,k}(x); k \in \mathbb{Z}\}$$

这相当于在多分辨率分析理论中函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的如下正交直和分解：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) &= V_J \oplus \left[\bigoplus_{j\geqslant J, j\neq L} W_j\right] \\ &= V_J \oplus \left[\bigoplus_{j=J}^{L-1} W_j\right] \oplus \left[\mathscr{U}_{L-1}^2 \oplus \mathscr{U}_{L-1}^3\right] \oplus \left[\bigoplus_{j=L+1}^{+\infty} W_j\right]\end{aligned}$$

这样，对任何函数或者信号 $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，将它在闭子空间列：

$$V_J, W_J, W_{J+1}, \cdots, W_{L-1}, \mathscr{U}_{L-1}^2, \mathscr{U}_{L-1}^3, W_{L+1}, \cdots$$

上的正交投影表示为

$$\begin{aligned}&f_J^{(0)}(x), \quad f_j^{(1)}(x), \quad j = J, \cdots, (L-1)\\ &f_{L-1}^{(2)}(x), \quad f_{L-1}^{(3)}(x), \quad f_j^{(1)}(x), \quad j = L+1, L+2, \cdots\end{aligned}$$

那么，

$$f(x) = f_J^{(0)}(x) + \sum_{j=J, j\neq L}^{+\infty} f_j^{(1)}(x) + f_{L-1}^{(2)}(x) + f_{L-1}^{(3)}(x)$$

而且，对于 $j = J, J+1, \cdots, L-1, L+1, \cdots$，

$$\begin{cases} f_J^{(0)}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} V_f(2^{-J}, 2^{-J}k)\varphi_{J,k}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{J/2} f_{J,k}^{(0)} \varphi(2^J x - k) \\ f_j^{(1)}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} W_f(2^{-j}, 2^{-j}k)\psi_{j,k}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{j/2} f_{j,k}^{(1)} \psi(2^j x - k) \\ f_{L-1}^{(2)}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \mathscr{U}_f^2(2^{-(L-1)}, 2^{-(L-1)}k)\mu_{2;L-1,k}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{(L-1)/2} f_{(L-1),k}^{(2)} \mu_2(2^{(L-1)}x - k) \\ f_{L-1}^{(3)}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \mathscr{U}_f^3(2^{-(L-1)}, 2^{-(L-1)}k)\mu_{3;L-1,k}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{(L-1)/2} f_{(L-1),k}^{(3)} \mu_3(2^{(L-1)}x - k) \end{cases}$$

其中，$j \neq L, j = J, J+1, \cdots$，$k \in \mathbb{Z}$，

$$\begin{cases} V_f(2^{-J}, 2^{-J}k) = f_{J,k}^{(0)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi}_{J,k}(x)dx \\ W_f(2^{-j}, 2^{-j}k) = f_{j,k}^{(1)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi}_{j,k}(x)dx \\ \mathscr{U}_f^2(2^{-(L-1)}, 2^{-(L-1)}k) = f_{(L-1),k}^{(2)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\mu}_{2;L-1,k}(x)dx \\ \mathscr{U}_f^3(2^{-(L-1)}, 2^{-(L-1)}k) = f_{(L-1),k}^{(3)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\mu}_{3;L-1,k}(x)dx \end{cases}$$

利用各个闭子空间各自的规范正交基，可以得到

$$
\begin{aligned}
f(x)=&\sum_{k=-\infty}^{+\infty}V_f(2^{-J},2^{-J}k)\varphi_{J,k}(x)\\
&+\sum_{j=J,j\neq L}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}W_f(2^{-j},2^{-j}k)\psi_{j,k}(x)\\
&+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathscr{U}_f^2(2^{-(L-1)},2^{-(L-1)}k)\mu_{2;L-1,k}(x)\\
&+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathscr{U}_f^3(2^{-(L-1)},2^{-(L-1)}k)\mu_{3;L-1,k}(x)
\end{aligned}
$$

在上式两端 $\times\bar{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx$ 积分得到在局部化函数空间 $\mathscr{L}^2_{\rm Loc}(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},s^{-2}dsd\mu)$ 中的等价表达形式：

$$
\begin{aligned}
W_f(s,\mu)=&\sum_{k=-\infty}^{+\infty}V_f(2^{-J},2^{-J}k)\zeta_{J,k}(s,\mu)\\
&+\sum_{j=J,j\neq L}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}W_f(2^{-j},2^{-j}k)\xi_{j,k}(s,\mu)\\
&+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathscr{U}_f^2(2^{-(L-1)},2^{-(L-1)}k)\gamma_{L-1,k}(s,\mu)\\
&+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathscr{U}_f^3(2^{-(L-1)},2^{-(L-1)}k)\lambda_{L-1,k}(s,\mu)
\end{aligned}
$$

其中，$j\neq L,j=J,J+1,\cdots$，$k\in\mathbb{Z}$，

$$
\begin{cases}
\zeta_{J,k}(s,\mu)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{J,k}(x)\bar{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx\\
\xi_{j,k}(s,\mu)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{j,k}(x)\bar{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx\\
\gamma_{L-1,k}(s,\mu)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mu_{2;L-1,k}(x)\bar{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx\\
\lambda_{L-1,k}(s,\mu)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mu_{3;L-1,k}(x)\bar{\psi}_{(s,\mu)}(x)dx
\end{cases}
$$

这种分析方法相当于在前述分析模式下，把 $f(x)$ 在小波子空间 W_L 上的正交投影 $f_L^{(1)}(x)$ 进行了二次局部化，根据正交直和分解 $W_L=\mathscr{U}_L^1=\mathscr{U}_{L-1}^2\oplus\mathscr{U}_{L-1}^3$ 将 $f_L^{(1)}(x)$ 分别再次向 $\mathscr{U}_{L-1}^2,\mathscr{U}_{L-1}^3$ 进行正交投影得到 $f_{L-1}^{(2)}(x),f_{L-1}^{(3)}(x)$，在这个重新局部化过程中，标准离散信息单元是 $\{\mu_{2;L-1,k}(x),\mu_{3;L-1,k}(x);k\in\mathbb{Z}\}$，而连续形式的信息单元是

$$
\{\mu_{2;(s,\mu)}(x)=|\,s\,|^{-0.5}\ \mu_2(s^{-1}(x-\mu));(s,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\}
$$
$$
\{\mu_{3;(s,\mu)}(x)=|\,s\,|^{-0.5}\ \mu_3(s^{-1}(x-\mu));(s,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\}
$$

其中

$$\begin{cases}\mu_2(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_n\psi(2x-n)\\ \mu_3(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n\psi(2x-n)\end{cases}$$

用它们重新度量原始函数或者信号 $f(x)$，那么，度量结果是如下形式的 $f(x)$ 的连续小波包变换：

$$\mathscr{U}_f^2(s,\mu)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\mu}_{2;(s,\mu)}(x)dx=|\,s\,|^{-0.5}\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\mu}_2(s^{-1}(x-\mu))dx$$
$$\mathscr{U}_f^3(s,\mu)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\mu}_{3;(s,\mu)}(x)dx=|\,s\,|^{-0.5}\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\mu}_3(s^{-1}(x-\mu))dx$$

此时，如果使用标准离散信息单元 $\{\mu_{2;L-1,k}(x),\mu_{3;L-1,k}(x);k\in\mathbb{Z}\}$ 进行度量，那么度量结果

$$\{\mathscr{U}_f^2(2^{-(L-1)},2^{-(L-1)}k);k\in\mathbb{Z}\}$$
$$\{\mathscr{U}_f^3(2^{-(L-1)},2^{-(L-1)}k);k\in\mathbb{Z}\}$$

正好就是 $f(x)$ 的连续小波包变换 $\mathscr{U}_f^2(s,\mu),\mathscr{U}_f^3(s,\mu)$ 在尺度参数 $s=2^{-(L-1)}$ 和位移参数 $\mu=2^{-(L-1)}k$，$k\in\mathbb{Z}$ 的离散化重新采样点处的数值.

相应地，再次局部化信息成分分别是

$$\mathscr{U}_f^2(2^{-(L-1)},2^{-(L-1)}k)\gamma_{L-1,k}(s,\mu)\quad \mathscr{U}_f^3(2^{-(L-1)},2^{-(L-1)}k)\lambda_{L-1,k}(s,\mu),\quad k\in\mathbb{Z}$$

在这种情况下，需要注意的是，$f(x)$ 在 W_L 上的正交投影 $f_L^{(1)}(x)$ 的采样点列是 $\{(2^{-L},2^{-L}k);k\in\mathbb{Z}\}$，采样点的空间间隔是 $s=2^{-L}$，但是，在完成重新局部化之后，$\mathscr{U}_f^2(s,\mu)$ 和 $\mathscr{U}_f^3(s,\mu)$ 的采样点列同为 $\{(2^{-(L-1)},2^{-(L-1)}k);k\in\mathbb{Z}\}$，表面上这些点列将与原始信号第一次局部化时的采样点列重合，但实际上这是不可能的，不仅因为这些点列的空间间隔更大，而且更本质的原因是，第二次局部化和第一次局部化是在不同的小波包域中，前者是第 2, 3 级小波包函数决定的小波包域，后者是原始小波函数或第 1 级小波包函数决定的小波域，正因为这样，体现在局部化信息数值上就是，前者为

$$\{\mathscr{U}_f^2(2^{-(L-1)},2^{-(L-1)}k),\mathscr{U}_f^3(2^{-(L-1)},2^{-(L-1)}k);k\in\mathbb{Z}\}$$

后者为

$$\{W_f(2^{-L},2^{-L}k);k\in\mathbb{Z}\}$$

简而言之，前者是第 2, 3 级连续小波包变换的离散采样，后者是第 1 级连续小波包或连续小波变换的离散采样.

像这样的小波包谱分析方法的延伸是没有穷尽的，建议读者尝试写出更一般、

更复杂的重新局部化公式，此处容不赘述.

参 考 文 献

Balian R. 1981. Un principe d'incertitude fort en theorie du signal ou en mecanique quantique. Compt. Rend. Acad. Sci. Ser. II, 292(20): 1357-1362

Coifman R R, Meyer Y. 1991. Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtres. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série 1, Mathématique, 312(3): 259-261

Coifman R R, Meyer Y, Wickerhauser M V. 1992. Size properties of wavelet packets// Ruskai M B, et al., eds. Wavelets and Their Applications. New York: Academic Press, Inc: 453-470

Coifman R R, Wickerhauser M V. 1992. Entropy-based algorithms for best basis selection. IEEE Transactions on Information Theory, 38(2): 713-718

Daubechies I. 1988. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Communications on Pure and Applied Mathematics, 41(7): 909-996

Daubechies I, Jaffard S, Journé J L. 1991. A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 22(2): 554-573

Lemarié P G. 1985. Continuite sur les espaces de Besov des operateurs defines par des integrals singulieres. Annales Institut Fourier, 35(4): 175-187

Lemarié P G. 1988. Ondelettes à localisation exponentielle. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Neuvième Série, 67(3): 227-236

Lemarié P G. 1989. Base d'ondelettes sur les groupes de Lie stratifiés. Bulletin de la Société Mathématique de France, 117(2): 211-232

Lemarié P G, Meyer Y. 1986. Ondelettes et bases Hilbertiennes. Revista Matemática Iberoamericana, 2(1-2): 1-18

Meyer Y, Coifman R. 1991a. Ondelettes et Operateurs. Vol.2. Paris: Hermann

Meyer Y, Coifman R. 1991b. Ondelettes et Operateurs. Vol.3. Paris: Hermann

Meyer Y, François G, Coifman R. 1997. Brushlets: A tool for directional image analysis and image compression. Applied and Computational Harmonic Analysis, 4(2): 147-187

Séré É. 1995. Localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes. Revista Matemática Iberoamericana, 11(2): 334-354

Wilson H R. 1980. Spatiotemporal characterization of a transient mechanism in the human visual system. Vision Research, 20(5): 443-452

Wilson H R, Bergen J R. 1979. A four mechanism model for threshold spatial vision. Vision Research, 19(1): 19-32

Wilson H R, Giese S C. 1977. Threshold visibility of frequency gradient patterns. Vision Research, 17(10): 1177-1190

Wilson K G. 1971a. Renormalization group and critical phenomena. I. renormalization group and the kadanoff scaling picture. Physical Review B, 4(9): 3174-3183

Wilson K G. 1971b. Renormalization group and critical phenomena. II. phase-space cell analysis of critical behavior. Physical Review B, 4(9): 3184-3205

Wilson K G. 1971c. Renormalization group and strong interactions. Physical Review D, 3(8): 1818-1846

Wilson K G. 1974. The renormalization group and the ε expansion. Physics Reports, 12(2): 75-199

Wilson K G. 1975. The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem. Reviews of Modern Physics, 47(4): 773-840

Wilson K G. 1979. Problems in physics with many scales of length. Scientific American, 241: 158-179

Wilson K G. 1983. The renormalization group and critical phenomena. Reviews of Modern Physics, 55(3): 583-600

第 8 章　小波理论与应用

在多分辨率分析理论框架下，尺度函数、小波函数和小波包函数序列以及它们的伸缩平移规范正交函数系，构成了尺度子空间、小波子空间和小波包子空间的规范正交基，而且，它们的适当组合构成平方可积函数空间的规范正交基. 这些子空间的规范正交基以及平方可和函数空间的规范正交基的多分辨率分析结构，决定了它们在函数空间、函数、分布和算子的分析表达等研究中能够发挥重要作用.

本章第一部分内容是示范性获得线性算子的小波表示，由此建立线性算子计算的小波快速算法. 卷积算子傅里叶快速算法理论说明，线性算子对角化方法是建立线性算子快速算法理论的最佳途径，而傅里叶基是卷积算子的完全规范正交特征函数(向量)系这个科学事实，根本决定了卷积算子在这个规范正交基下必表现为对角矩阵(算子)，从而奠定了卷积算子傅里叶快速算法的理论基础. 利用小波方法完美的采样重建理论以及良好的时频(空频)局部化能力，将线性算子(二元函数)及其输入输出函数或者信号(一元函数)在小波域完成离散表达，而且，在把线性算子变换过程转化为小波域矩阵-向量乘积型线性变换的环节，获得线性算子对应矩阵的特殊形式近似对角化以及输入输出函数的紧凑向量表示(大量坐标分量数值接近零)，从而为建立线性算子小波快速算法奠定理论基础.

本章第二部分内容是在多分辨率分析正交尺度函数和正交小波函数的基础上，建立恒分辨率的小波理论体系. 这部分小波理论的基本特点是在分解和合成的过程中被处理的数字信号和数字图像以及任何中间处理结果都具有完全相同的分辨率，这本质上是一种冗余的信息表达方法，在视觉、听觉和各种传感器信息的可视化表达和分析处理中被广泛使用.

本章第三部分内容是研究在二进小波意义下的计算视觉理论体系，这些研究工作揭示了人类视觉系统以及可能还包括其他感知系统在物理本质意义下的“类似小波行为特征”，从某种意义来说，这意味着小波的客观存在性. 由此说明小波不仅像“谐波”一样作为一种自然现象在自然界广泛存在，而且，小波更可能像在人类视觉系统中作为视觉底层信息“凝聚传输”或者“压缩传输”的一种功能，在人类的听觉、嗅觉、触觉系统以及其他生命体或者智能机器的信息传感系统中以信息凝聚和传输功能的形式普遍存在.

本章最后研究周期小波的构造和简单性质，尝试说明即使在严格周期现象的研究中，和被普遍认为研究周期现象“最有效的”傅里叶级数方法相比，周期小波

和小波级数仍然具有其独特的优势.

小波理论和方法的应用非常广泛，本章的这些内容仅仅是示例性说明小波如何能够被应用于研究这些问题，这里的每一个小波应用专题都有十分丰富的研究文献供读者参考.

8.1　线性算子小波快速算法

这里将仔细研究卷积算子的傅里叶快速算法，说明线性算子快速算法与线性算子对角化表示方法的关联关系，并在多分辨率分析小波理论框架下研究线性算子小波快速算法理论.

这里将仔细回顾和研究 "卷积算子" 在傅里叶变换理论基础上的 "对角化" 问题，以此引出 "算子对角化" 或 "算子拟对角化" 或者 "算子稀疏表达" 等涉及 "大规模科学计算快速方法" 问题研究的本质是函数空间的基或者规范正交基的选择问题，同时示范给出算子展开和快速计算的小波方法. 这部分内容涉及的科学研究领域十分广泛，比如数据和图像压缩、快速科学计算方法、常微分方程和偏微分方程求解理论和快速数值计算方法、压缩感知等，出现了大量的研究文献和技术报告.

8.1.1　有限卷积与快速算法

这里先研究有限卷积及其快速傅里叶算法理论.

(α) 有限卷积

给定两个同维序列或向量 $f=(f_0,f_1,\cdots,f_{N-1})^{\mathrm{T}}, g=(g_0,g_1,\cdots,g_{N-1})^{\mathrm{T}}$，将它们的卷积记为 $f*g=h=(h_0,h_1,\cdots,h_{N-1})^{\mathrm{T}}$，$h$ 称为 f 和 g 的有限卷积，定义如下:

$$h_m=\sum_{\ell=0}^{N-1} f_\ell g_{\mathrm{mod}(m-\ell,N)},\quad m=0,1,\cdots,N-1$$

根据卷积定义，显然 $h=f*g=g*f$，而且 $h=f*g$ 可以写成如下形式:

$$h_m=\sum_{\substack{0\leqslant \ell,k\leqslant N-1\\ \mathrm{mod}(k+\ell,N)=m}} f_k g_\ell,\quad m=0,1,2,\cdots,(N-1)$$

比如，对于 $m=0$，

$$h_0=f_0g_0+f_1g_{N-1}+f_2g_{N-2}+\cdots+f_{N-1}g_1=(f_0,f_{N-1},\cdots,f_2,f_1)\begin{pmatrix} g_0\\ g_1\\ \vdots\\ g_{N-1}\end{pmatrix}$$

再如，对于 $m=1$，

$$\begin{aligned}h_1 &= f_0 g_{1-0} + f_1 g_{\mathrm{mod}(1-1,N)} + \cdots + f_{N-1} g_{\mathrm{mod}(1-(N-1),N)} \\ &= f_0 g_1 + f_1 g_0 + f_2 g_{N-1} + \cdots + f_{N-1} g_2 \\ &= (f_1, f_0, f_{N-1}, \cdots, f_2)\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{N-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因此，卷积运算也可以改写为

$$h_m = \sum_{\substack{0\leqslant \ell,k\leqslant N-1 \\ \mathrm{mod}(k+\ell,N)=m}} f_k g_\ell = \sum_{\ell=0}^{N-1} g_\ell f_{\mathrm{mod}(m-\ell,N)}, \quad m = 0,1,2,\cdots,(N-1)$$

从而，有限卷积 $h=f*g$ 可以写成矩阵-向量乘积表达形式：

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_{N-1} & \cdots & f_1 \\ f_1 & f_0 & \cdots & f_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{N-1} & f_{N-2} & \cdots & f_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{N-1}\end{pmatrix}$$

(β) 有限卷积与循环矩阵

给定向量 $f=(f_0,f_1,\cdots,f_{N-1})^{\mathrm{T}}$，引入如下循环形式的正方形矩阵：

$$\boldsymbol{f} = (f_{\mathrm{mod}(\ell-k,N)})_{0\leqslant \ell,k\leqslant N-1} = \begin{pmatrix} f_0 & f_{N-1} & \cdots & f_1 \\ f_1 & f_0 & \cdots & f_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{N-1} & f_{N-2} & \cdots & f_0 \end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{f}$ 称为 N 阶循环矩阵.

这样，有限卷积公式 $h=f*g$ 可以写成如下矩阵-向量形式：

$$h = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_{N-1} & \cdots & f_1 \\ f_1 & f_0 & \cdots & f_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{N-1} & f_{N-2} & \cdots & f_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{N-1}\end{pmatrix} = \boldsymbol{f} g$$

其中循环形式的正方形矩阵 $\boldsymbol{f} = (f_{\mathrm{mod}(\ell-k,N)})_{0\leqslant \ell,k\leqslant N-1}$ 是 $N\times N$ 矩阵，有时也称为卷积矩阵. 它的构成方式如下.

行规则：下移一行，位置右移一列，最后一列溢出的元素放置在因移动造成的空缺的第一列的位置，这样形成循环，保证元素没有丢失；

列规则: 右移一列, 位置下移一行, 最后一行溢出的元素放置在因移动造成的空缺的第一行的位置, 这样形成循环, 保证元素没有丢失.

这样, 循环矩阵或者卷积矩阵 $f=(f_{\text{mod}(\ell-k,N)})_{0\leqslant\ell,k\leqslant N-1}$ 本质上可以由它的第一列或者第一行向量唯一确定. 当然, 利用上述规则, 它可以由它的任何行向量或任何列向量唯一确定.

(γ) 有限傅里叶变换

给定正整数 N, 定义 $N\times N$ 的有限傅里叶变换矩阵(算子) $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{F}=\frac{1}{\sqrt{N}}(e^{(-2\pi i/N)\times m\times n})_{0\leqslant m,n\leqslant N-1}$$

这个矩阵或者算子 $\mathscr{F}$ 有时也被称为离散傅里叶变换或者离散傅里叶变换算子或离散傅里叶矩阵. 详细写成

$$\mathscr{F}=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & e^{(-2\pi i/N)} & e^{(-2\pi i/N)\times 2} & \cdots & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)} & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)\times 2} & \cdots & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)\times(N-1)}\end{pmatrix}_{N\times N}$$

引入记号:

$$c_{m,\ell}=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{(-2\pi i/N)\times m\times\ell},\quad 0\leqslant m,\ell\leqslant(N-1)$$

那么, 有限傅里叶变换矩阵(算子) $\mathscr{F}$ 可以写成 $\mathscr{F}=(c_{m,\ell})_{0\leqslant m,\ell\leqslant N-1}$.

容易证明, $N\times N$ 的有限傅里叶变换矩阵(算子) $\mathscr{F}$ 是对称矩阵, 而且, 它是酉矩阵.

事实上, 可以详细写出 $\mathscr{F}$ 的复数共轭转置矩阵 $\mathscr{F}^*$ 如下:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^*&=(d_{u,v})_{0\leqslant u,v\leqslant N-1}\\ &=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & e^{(2\pi i/N)} & e^{(2\pi i/N)\times 2} & \cdots & e^{(2\pi i/N)\times(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & e^{(2\pi i/N)\times(N-1)} & e^{(2\pi i/N)\times(N-1)\times 2} & \cdots & e^{(2\pi i/N)\times(N-1)\times(N-1)}\end{pmatrix}_{N\times N}\end{aligned}$$

其中

$$d_{u,v}=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{(2\pi i/N)\times u\times v},\quad 0\leqslant u,v\leqslant(N-1)$$

直接演算可以得到如下的恒等式：对于 $0 \leqslant m,v \leqslant (N-1)$,

$$\sum_{u=0}^{N-1} c_{m,u} d_{u,v} = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} e^{(-2\pi i/N)\times m\times u} e^{(2\pi i/N)\times u\times v} = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} e^{(-2\pi i/N)\times(m-v)\times u} = \delta(m-v)$$

从而得到如下等式：

$$\mathscr{F}\mathscr{F}^* = \mathscr{F}^*\mathscr{F} = \mathrm{diag}(1,1,\cdots,1)$$

这说明 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}^*$ 都是酉矩阵.

N 维列向量 $g = (g_0, g_1, \cdots, g_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 的有限傅里叶变换定义为如下的 N 维列向量 $\tilde{g} = (\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \cdots, \tilde{g}_{N-1})^{\mathrm{T}}$：

$$\tilde{g}_m = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{u=0}^{N-1} e^{(-2\pi i/N)\times m\times u} g_u, \quad m = 0,1,2,\cdots,(N-1)$$

或者按照矩阵-向量形式写成

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_0 \\ \tilde{g}_1 \\ \vdots \\ \tilde{g}_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{(-2\pi i/N)} & \cdots & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)} & \cdots & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)\times(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{pmatrix}$$

或者

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_0 \\ \vdots \\ \tilde{g}_{N-1} \end{pmatrix} = \mathscr{F} \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{pmatrix} = \mathscr{F} g$$

(δ) 有限卷积的傅里叶变换

设 $h = f * g$ 是向量 $f = (f_0, f_1, \cdots, f_{N-1})^{\mathrm{T}}, g = (g_0, g_1, \cdots, g_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 的卷积，它的傅里叶变换表示为

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} \tilde{h}_0 \\ \tilde{h}_1 \\ \vdots \\ \tilde{h}_{N-1} \end{pmatrix} = \mathscr{F} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{pmatrix} = \mathscr{F} h$$

利用卷积 $h = f * g$ 的表达式：

$$h_m = \sum_{\ell=0}^{N-1} g_\ell f_{\mathrm{mod}(m-\ell,N)}, \quad m = 0,1,2,\cdots,(N-1)$$

可以直接计算得到两个同维向量有限卷积 $f * g = h = (h_0, h_1, \cdots, h_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 的有限傅里

叶变换向量 $\tilde{h} = (\tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \cdots, \tilde{h}_{N-1})^{\mathrm{T}}$.

实际上，当 $m = 0,1,2,\cdots,(N-1)$ 时，存在如下演算过程，

$$\begin{aligned}\tilde{h}_m &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{u=0}^{N-1} e^{(-2\pi i/N)\times m\times u} h_u = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{u=0}^{N-1} e^{(-2\pi i/N)\times m\times u} \sum_{\ell=0}^{N-1} g_\ell f_{\mathrm{mod}(u-\ell,N)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} g_\ell \sum_{u=0}^{N-1} e^{(-2\pi i/N)\times m\times u} f_{\mathrm{mod}(u-\ell,N)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum_{\ell=0}^{N-1} e^{(-2\pi i/N)\times m\times \ell} g_\ell\right]\left[\sum_{v=0}^{N-1} e^{(-2\pi i/N)\times m\times v} f_v\right] = \lambda_m \tilde{g}_m\end{aligned}$$

其中，$m = 0,1,2,\cdots,(N-1)$，

$$\lambda_m = \sum_{v=0}^{N-1} e^{(-2\pi i/N)\times m\times v} f_v$$

而且 $\tilde{g} = (\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \cdots, \tilde{g}_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 是向量 $g = (g_0, g_1, \cdots, g_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 的有限傅里叶变换.

总之，卷积 $h = f * g$ 的傅里叶变换可以写成

$$\tilde{h} = \mathscr{F} h = [\mathscr{F} f \mathscr{F}^*][\mathscr{F} g] = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{g}_0 \\ \tilde{g}_1 \\ \vdots \\ \tilde{g}_{N-1} \end{pmatrix}$$

其中

$$[\mathscr{F} f \mathscr{F}^*] = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1} \end{pmatrix}$$

是循环矩阵或者卷积矩阵 $f = (f_{\mathrm{mod}(\ell-k,N)})_{0\leqslant \ell,k\leqslant N-1}$ 的有限傅里叶变换，等价说法是，这个公式是卷积算子在有限傅里叶基下的对角化表达形式.

根据线性算子谱理论可知，上述这个结果表明，有限傅里叶变换矩阵 $\mathscr{F}$ 的列向量(或者行向量)是卷积矩阵 f 的全部规范正交特征向量系，而且，特征值序列是 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{N-1}$，即如下关系成立：

$$f \mathscr{F}^* = \mathscr{F}^* \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1} \end{pmatrix}$$

(ε) 有限卷积算子的特征性质

在 N 维复数空间 $\mathbb{C}^N$ 中，在平凡规范正交基

$$e_j=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad j=1,2,\cdots,N$$

之下，向量 $f=(f_0,f_1,\cdots,f_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 和 $g=(g_0,g_1,\cdots,g_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 的卷积 $h=f*g$ 可以写成矩阵-向量乘积形式：

$$h=\begin{pmatrix}h_0\\h_1\\\vdots\\h_{N-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_0&f_{N-1}&\cdots&f_1\\f_1&f_0&\cdots&f_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\f_{N-1}&f_{N-2}&\cdots&f_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_0\\g_1\\\vdots\\g_{N-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{f}g$$

其中 $\boldsymbol{f}$ 是卷积矩阵或者卷积算子. 如果将线性空间 $\mathbb{C}^N$ 的新规范正交基选取为 N 点离散傅里叶基：

$$\beta_j=\left(\frac{1}{\sqrt{N}}e^{(2\pi i/N)\times m\times(j-1)};m=0,1,2,\cdots,N-1\right)^{\mathrm{T}},\quad j=1,2,\cdots,(N-1)$$

那么

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N)=(e_1,e_2,\cdots,e_N)\mathscr{F}^*$$

即从平凡规范正交基 $e_1,e_2,\cdots,e_N$ 过渡到新规范正交基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N$ 的过渡矩阵是有限傅里叶变换矩阵的复数共轭转置矩阵 $\mathscr{F}^*$. 利用坐标变换公式可得，两个同维向量 $h=(h_0,h_1,\cdots,h_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 和 $g=(g_0,g_1,\cdots,g_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 在新 N 维规范正交基下的坐标向量 $\tilde{h}=(\tilde{h}_0,\tilde{h}_1,\cdots,\tilde{h}_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 和 $\tilde{g}=(\tilde{g}_0,\tilde{g}_1,\cdots,\tilde{g}_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 分别是

$$\tilde{h}=\mathscr{F}h,\quad \tilde{g}=\mathscr{F}g$$

那么，卷积运算可以表示成

$$[\mathscr{F}h]=[\mathscr{F}\boldsymbol{f}\mathscr{F}^*][\mathscr{F}g]$$

将卷积矩阵 $\boldsymbol{f}$ 在新规范正交基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N$ 之下的矩阵记为 $\tilde{\boldsymbol{f}}$：

$$\tilde{\boldsymbol{f}}=[\mathscr{F}\boldsymbol{f}\mathscr{F}^*]$$

那么，在新规范正交基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N$ 之下，卷积运算表示为

$$\tilde{h}=\tilde{\boldsymbol{f}}\tilde{g}$$

现在演算 $\tilde{\boldsymbol{f}}$ 的具体表达公式或其元素的表示规律. 首先回顾有限傅里叶变换矩阵 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}^*$ 的具体表示形式：

$$\mathscr{F}=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & e^{(-2\pi i/N)} & e^{(-2\pi i/N)\times 2} & \cdots & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)} & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)\times 2} & \cdots & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)\times(N-1)}\end{pmatrix}$$

而且

$$\mathscr{F}^*=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & e^{(2\pi i/N)} & e^{(2\pi i/N)\times 2} & \cdots & e^{(2\pi i/N)\times(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & e^{(2\pi i/N)\times(N-1)} & e^{(2\pi i/N)\times(N-1)\times 2} & \cdots & e^{(2\pi i/N)\times(N-1)\times(N-1)}\end{pmatrix}$$

容易验证, 每个矩阵的列向量或行向量都构成线性空间 $\mathbb{C}^N$ 的规范正交基.

其次, 分两步计算 $\tilde{f}=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*]$, 先计算 $\hat{f}=\mathscr{F}f$, 之后再计算最终结果 $\tilde{f}=\hat{f}\mathscr{F}^*=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*]$. 如果 $\hat{f}=\mathscr{F}f=(\hat{f}_{\ell,k})_{N\times N}$, 那么, $\hat{f}_{\ell,k}$ 是 $\mathscr{F}$ 的第 ℓ 行与 $f=(f_{\mathrm{mod}(\ell-k,N)})_{0\leqslant\ell,k\leqslant N-1}$ 的第 k 列对应元素相乘的总和, 于是得到

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\hat{f}_{\ell,k}&=\sum_{m=0}^{N-1}e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times m}f_{\mathrm{mod}(m-k,N)}\\&=e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times 0}f_{\mathrm{mod}(0-k,N)}+e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times 1}f_{\mathrm{mod}(1-k,N)}+\cdots\\&\quad+e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times k}f_{\mathrm{mod}(k-k,N)}+\cdots+e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times(N-1)}f_{\mathrm{mod}(N-1-k,N)}\\&=e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times 0}f_{N-k}+\cdots+e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times(k-1)}f_{N-1}\\&\quad+e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times k}f_0+e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times(k+1)}f_1+\cdots+e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times(N-1)}f_{N-1-k}\end{aligned}$$

从最后表达式的各求和项中提取公共因子 $e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times k}$, 经过整理得到

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\hat{f}_{\ell,k}&=e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times k}\Big\{e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times 0}f_0+e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times 1}f_1+\cdots+e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times[N-(k+1)]}f_{N-(k+1)}\\&\quad+e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times[N-k]}f_{N-k}+\cdots+e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times(N-1)}f_{N-1}\Big\}\\&=e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times k}\sum_{m=0}^{(N-1)}e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times m}f_m\end{aligned}$$

从而

$$\hat{f}_{\ell,k}=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times k}\sum_{m=0}^{(N-1)}e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times m}f_m,\quad 0\leqslant\ell,k\leqslant(N-1)$$

最后，由 $\tilde{f}=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*]=\hat{f}\mathscr{F}^*=(\tilde{f}_{\ell,n})_{N\times N}$ 可知，$\tilde{f}_{\ell,n}$ 是 $\hat{f}$ 的第 ℓ 行与 $\mathscr{F}^*$ 的第 n 列对应元素之积的和，这样，可得如下演算公式：

$$\tilde{f}_{\ell,n}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{f}_{\ell,k}e^{(2\pi i/N)\times k\times n},\quad 0\leqslant \ell,n\leqslant (N-1)$$

这个公式的详细演算如下：

$$\begin{aligned}N\tilde{f}_{\ell,n}&=\sum_{k=0}^{N-1}\left[e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times k}\sum_{m=0}^{(N-1)}e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times m}f_m\right]e^{(2\pi i/N)\times k\times n}\\&=\left[\sum_{m=0}^{(N-1)}e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times m}f_m\right]\sum_{k=0}^{N-1}e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times k}e^{(2\pi i/N)\times k\times n}\\&=\left[\sum_{m=0}^{(N-1)}e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times m}f_m\right]\sum_{k=0}^{N-1}e^{(-2\pi i/N)\times(\ell-n)\times k}\\&=\left[\sum_{m=0}^{(N-1)}e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times m}f_m\right]\times N\delta(\ell-n),\quad 0\leqslant \ell,n\leqslant (N-1)\end{aligned}$$

从而

$$\tilde{f}_{\ell,n}=\left[\sum_{m=0}^{(N-1)}e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times m}f_m\right]\times\delta(\ell-n)=\begin{cases}\lambda_\ell, & \ell=n\\0, & \ell\neq n\end{cases}$$

其中，$\ell=0,1,2,\cdots,(N-1)$，

$$\lambda_\ell=\sum_{m=0}^{(N-1)}e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times m}f_m$$

上述这些计算结果说明，$\tilde{f}=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*]=\hat{f}\mathscr{F}^*=(\tilde{f}_{\ell,n})_{N\times N}$ 是对角形式的矩阵. 当 $\ell\neq n$ 时，$\tilde{f}_{\ell,n}=0$. 当 $\ell=0,1,2,\cdots,N-1$ 时，矩阵 $\tilde{f}$ 的第 $\ell=n$ 个对角元素是 $\tilde{f}_{\ell,n}=\tilde{f}_{\ell,\ell}=\tilde{f}_{n,n}=\lambda_\ell$. 这样，$\tilde{f}=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*]=\hat{f}\mathscr{F}^*=(\tilde{f}_{\ell,n})_{N\times N}$ 可以写成如下的对角矩阵：

$$\tilde{f}=\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1})$$

其中：$\ell=0,1,2,\cdots,(N-1)$，

$$\lambda_\ell=\sum_{m=0}^{(N-1)}e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times m}f_m$$

或者

$$\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_{N-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & e^{(-2\pi i/N)} & e^{(-2\pi i/N)\times 2} & \cdots & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)} & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)\times 2} & \cdots & e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)\times(N-1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_0\\ f_1\\ \vdots\\ f_{N-1}\end{pmatrix}$$

总之，在平凡规范正交基 $e_j=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, j=1,2,\cdots,N$ 之下，两个向量 $f=(f_0,f_1,\cdots,f_{N-1})^{\mathrm{T}}, g=(g_0,g_1,\cdots,g_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 的卷积 $f*g=h=(h_0,h_1,\cdots,h_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 运算关系:

$$h=\boldsymbol{f}g$$

在规范正交有限傅里叶基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N$ 之下，“卷积算子”取得如下对角形式:

$$\tilde{h}=\tilde{\boldsymbol{f}}\tilde{g}$$

或者详细写成

$$\begin{pmatrix}\tilde{h}_0\\ \tilde{h}_1\\ \vdots\\ \tilde{h}_{N-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{g}_0\\ \tilde{g}_1\\ \vdots\\ \tilde{g}_{N-1}\end{pmatrix}$$

其中，$m=0,1,2,\cdots,(N-1)$,

$$\lambda_m=\sum_{v=0}^{N-1}e^{(-2\pi i/N)\times m\times v}f_v$$

这样，综合得到

$$[\mathscr{F}\boldsymbol{f}\mathscr{F}^*]=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1}\end{pmatrix}$$

从而

$$\boldsymbol{f}\mathscr{F}^*=\mathscr{F}^*\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1}\end{pmatrix}$$

如果将矩阵 $\mathscr{F}^*$ 的列向量记为

$$\mathbb{F}_m=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix}1\\ e^{(2\pi i/N)\times 1\times m}\\ \vdots\\ e^{(2\pi i/N)\times(N-1)\times m}\end{pmatrix},\quad m=0,1,2,\cdots,(N-1)$$

那么，矩阵 $\mathscr{F}^*=(\mathbb{F}_0,\mathbb{F}_1,\cdots,\mathbb{F}_{N-1})$ 满足如下特征关系:

$$\boldsymbol{f}(\mathbb{F}_0,\mathbb{F}_1,\cdots,\mathbb{F}_{N-1})=(\mathbb{F}_0,\mathbb{F}_1,\cdots,\mathbb{F}_{N-1})\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1}\end{pmatrix}$$

或者等价地写成

$$\boldsymbol{f}\mathbb{F}_m=\lambda_m\mathbb{F}_m,\quad m=0,1,2,\cdots,(N-1)$$

最后的特征关系公式说明，有限傅里叶变换矩阵 $\mathscr{F}^*$ 的第 m 个列向量 $\mathbb{F}_m$ 是卷积算子(矩阵) $\boldsymbol{f}=(f_{\mathrm{mod}(\ell-k,N)})_{0\leqslant\ell,k\leqslant N-1}$ 的一个规范特征向量，相对应的特征值是 $\lambda_m=\sum_{v=0}^{N-1}e^{(-2\pi i/N)\times m\times v}f_v,\quad m=0,1,\cdots,N-1.$

另外，可以直接演算验证卷积算子(矩阵) $\boldsymbol{f}=(f_{\mathrm{mod}(\ell-k,N)})_{0\leqslant\ell,k\leqslant N-1}$ 的上述特征关系．对于 $m=0,1,2,\cdots,(N-1)$，假设:

$$\boldsymbol{f}\mathbb{F}_m=\begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \vdots\\ \xi_{N-1}\end{pmatrix}$$

那么，这个向量的第 $\ell=0,1,2,\cdots,(N-1)$ 行元素 ξ_ℓ 可以表示如下:

$$\xi_\ell=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}f_{\mathrm{mod}(\ell-k,N)}e^{(2\pi i/N)\times k\times m}$$

利用这个公式可以详细演算得到如下简化形式:

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\xi_\ell&=\sum_{k=0}^{N-1}f_{\mathrm{mod}(\ell-k,N)}e^{(2\pi i/N)\times k\times m}\\ &=f_\ell e^{(2\pi i/N)\times 0\times m}+f_{\ell-1}e^{(2\pi i/N)\times 1\times m}+\cdots+f_1e^{(2\pi i/N)\times(\ell-1)\times m}+f_0e^{(2\pi i/N)\times\ell\times m}\\ &\quad+f_{N-1}e^{(2\pi i/N)\times(\ell+1)\times m}+\cdots+f_{\ell+1}e^{(2\pi i/N)\times(N-1)\times m}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{(2\pi i/N)\times\ell\times m}\Big\{f_0 e^{(-2\pi i/N)\times 0\times m} + f_1 e^{(-2\pi i/N)\times 1\times m} + \cdots + f_\ell e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times m} \\
&\quad + f_{\ell+1} e^{(-2\pi i/N)\times(\ell+1)\times m} + \cdots + f_{N-1} e^{(-2\pi i/N)\times(N-1)\times m}\Big\} \\
&= \lambda_m e^{(2\pi i/N)\times\ell\times m}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\lambda_m = \sum_{u=0}^{N-1} f_u e^{(-2\pi i/N)\times u\times m}
$$

这样

$$
\xi_\ell = \lambda_m \times \frac{1}{\sqrt{N}} e^{(2\pi i/N)\times\ell\times m}, \quad \ell = 0,1,2,\cdots,(N-1)
$$

或者

$$
\boldsymbol{f}\mathbb{F}_m = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{N-1} \end{pmatrix} = \lambda_m \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{(2\pi i/N)\times 0\times m} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} e^{(2\pi i/N)\times 1\times m} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{N}} e^{(2\pi i/N)\times(N-1)\times m} \end{pmatrix} = \lambda_m \mathbb{F}_m
$$

从而最终得到如下形式的特征方程表示关系:

$$
\boldsymbol{f}\mathbb{F}_m = \lambda_m \mathbb{F}_m, \quad m = 0,1,2,\cdots,(N-1)
$$

注释: λ_m 的定义是 $\lambda_m = \sum_{u=0}^{N-1} f_u e^{(-2\pi i/N)\times u\times m}$ 与 $f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}$ 有关, 但是, 由特征方程 $\boldsymbol{f}\mathbb{F}_m = \lambda_m \mathbb{F}_m$ 决定的特征向量 $\mathbb{F}_m$, $m = 0,1,\cdots,(N-1)$ 与 $f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}$ 的取值无关, 只与由 $f = (f_0, f_1, \cdots, f_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 构成 $\boldsymbol{f}$ 的方式有关, 即这组特征关系只与卷积算子构成形式相关, 与向量 $f = (f_0, f_1, \cdots, f_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 的各元素的取值没有关系.

8.1.2　序列卷积与傅里叶级数

这里研究序列卷积算子及其在傅里叶级数表示方法下的对角化.

(α) 序列卷积

在无穷维平方可和序列空间 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中, 选定如下平凡规范正交基:

$$\left\{e_j = (\cdots,0,1,0,\cdots)^{\mathrm{T}}, j \in \mathbb{Z}\right\}$$

其中当 $\ell \in \mathbb{Z}$ 时，$e_\ell = (\cdots,0,1,0,\cdots)^{\mathrm{T}}$ 表示第 ℓ 行元素为 1 而且其他行元素为 0 的向量. 在平凡规范正交基之下，如下三个向量:

$$f = (f_m; m \in \mathbb{Z})^{\mathrm{T}}, \quad g = (g_m; m \in \mathbb{Z})^{\mathrm{T}}, \quad h = (h_m; m \in \mathbb{Z})^{\mathrm{T}}$$

如果满足关系:

$$h_m = \sum_{u\in\mathbb{Z}} g_u f_{m-u}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

则称这样的序列 h 为无穷序列 f 与 g 的卷积，记为 $h = f * g$. 显然，卷积可以等价地改写为

$$h_m = \sum_{\substack{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ m_1+m_2=m}} f_{m_1} g_{m_2}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

具体地:

$$h_0 = \sum_{m_1\in\mathbb{Z}} g_{m_1} f_{0-m_1} = \sum_{m_1\in\mathbb{Z}} f_{-m_1} g_{m_1}$$

$$h_1 = \sum_{m_1\in\mathbb{Z}} g_{m_1} f_{1-m_1} = \sum_{m_1\in\mathbb{Z}} f_{1-m_1} g_{m_1}$$

$$\vdots$$

或者，形象地，引入“$\infty \times \infty$”的卷积矩阵或者算子记号 $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{f} = (f_{\ell-m})_{(\ell,m)\in\mathbb{Z}^2} = (f_{\ell-m})_{(\ell,m)\in\mathbb{Z}^2} = (f_{\ell-m})_{\infty\times\infty}$$

将两个序列的卷积得到的新序列表示为

$$h = \boldsymbol{f} g$$

注释: 矩阵 $\boldsymbol{f} = (f_{\ell-m})_{(\ell,m)\in\mathbb{Z}^2}$ 的结构比较特殊，$\boldsymbol{f}$ 的第 $\ell = 0$ 行是无穷序列 $f^{\mathrm{T}} = (f_m; m \in \mathbb{Z})$ 的反序排列 $(f_{-m}; m \in \mathbb{Z})$，即 $(\cdots, f_1, f_0, f_{-1}, \cdots)$；其第 $\ell = 1$ 行是 $(f_{1-m}; m \in \mathbb{Z})$，即第 0 行向右平移 1 列；第 $\ell = m_1$ 行是 $(f_{m_1-m}; m \in \mathbb{Z})$，即第 0 行向右平移 $\ell = m_1$ 列，其中 $m_1 \in \mathbb{Z}$. 这是按照行的方式说明 $\boldsymbol{f}$ 的构造. 如果按照列的方式描述 $\boldsymbol{f}$，首先，其第 $\ell = 0$ 列是 $(\cdots, f_{-1}, f_0, f_1, \cdots)^{\mathrm{T}}$，标定方法是，$\boldsymbol{f}$ 矩阵之第 0 行第 0 列位置上的元素是 f_0，其次，$\boldsymbol{f}$ 的第 $\ell = 1$ 列是其第 0 列向下平移 1 行；第

$\ell = m_1$ 列是其第 0 列向下平移 $\ell = m_1$ 行，$m_1 \in \mathbb{Z}$.

(β) 序列的傅里叶级数

在线性空间 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中，选定平凡基 $\{e_j; j \in \mathbb{Z}\}$. 设 $g = (g_m; m \in \mathbb{Z})^{\mathrm{T}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 是平方可和序列(或能量有限)，即 $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|g_m\right|^2 < +\infty$. 在线性空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 中，选取规范正交基 $\{(2\pi)^{-0.5}e^{-i\omega k}; k \in \mathbb{Z}\}$，定义 g 的傅里叶级数是周期 2π 的平方可积函数 $\tilde{g}(\omega)$:

$$\tilde{g}(\omega) = (2\pi)^{-0.5} \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m e^{-i\omega m}$$

它是线性空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 中的一个向量，而且，

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left|\tilde{g}(\omega)\right|^2 d\omega &= \int_0^{2\pi} \left[(2\pi)^{-0.5} \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m e^{-i\omega m}\right]\left[(2\pi)^{-0.5} \sum_{m_1\in\mathbb{Z}} g_{m_1} e^{-i\omega m_1}\right]^* d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m_1} \sum_{m} g_{m_1} g_m^* \int_0^{2\pi} e^{-i\omega(m-m_1)} d\omega \\
&= \sum_m \left|g_m\right|^2
\end{aligned}$$

即 g 的傅里叶级数 $\tilde{g}(\omega)$ 与 g 具有相同的长度. 因此，变换关系式:

$$g = (g_m; m \in \mathbb{Z}) \leftrightarrow \tilde{g}(\omega) = (2\pi)^{-0.5} \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m e^{-i\omega m}$$

是一种保持长度不变的变换关系，即正交变换关系或酉变换关系.

(γ) 序列卷积对角化

在线性空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 中，选取基为傅里叶规范正交基 $\{(2\pi)^{-0.5}e^{i\omega k}; k \in \mathbb{Z}\}$，按照如下方式定义的线性变换:

$$\mathscr{F}: e_\ell = (\cdots,0,1,0,\cdots)^{\mathrm{T}} \mapsto (2\pi)^{-0.5} e^{-i\omega\ell}, \quad \omega \in [0,2\pi]$$

其中 $\ell \in \mathbb{Z}$，是线性空间 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 到线性空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 的酉变换，就是傅里叶级数变换. 对于任意的无穷序列 $g = (g_m; m \in \mathbb{Z})^{\mathrm{T}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$，在这个线性变换下对应的结果正好是 g 的傅里叶级数，即周期 2π 的平方可积函数 $\tilde{g}(\omega)$:

$$g = (g_m; m \in \mathbb{Z}) \leftrightarrow \tilde{g}(\omega) = (2\pi)^{-0.5} \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m e^{-i\omega m}$$

或者表示为

$$\tilde{g}(\omega)=\mathscr{F}g=(2\pi)^{-0.5}\sum_{m\in\mathbb{Z}}g_m e^{-i\omega m},\quad \omega\in[0,2\pi]$$

这样，在线性空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 中，序列卷积 $h=fg$ 可以表示为

$$[\mathscr{F}h]=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*][\mathscr{F}g]$$

或者

$$\tilde{h}=\tilde{f}\tilde{g}$$

其中

$$\tilde{h}=\mathscr{F}h,\quad \tilde{g}=\mathscr{F}g,\quad \tilde{f}=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*]$$

下面在线性空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 中，研究卷积算子或矩阵 $\tilde{f}=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*]$ 的对角化性质. 为此，将无穷序列 $g=(g_m;m\in\mathbb{Z})^{\mathrm{T}}$ 与 $\tilde{g}(\omega)$ 的对应关系:

$$g=(g_m;m\in\mathbb{Z})\leftrightarrow\tilde{g}(\omega)=(2\pi)^{-0.5}\sum_{m\in\mathbb{Z}}g_m e^{-i\omega m}$$

改写为矩阵-向量乘积形式: 对于 $\omega\in[0,2\pi]$,

$$\tilde{g}(\omega)=(\mathscr{F}g)(\omega)=((2\pi)^{-0.5}e^{-i\omega m};\ m\in\mathbb{Z})(g_m;m\in\mathbb{Z})^{\mathrm{T}}$$

这时候，可以将 $g=(g_m;m\in\mathbb{Z})^{\mathrm{T}}$ 看成是 g 在规范正交基 $\{(2\pi)^{-0.5}e^{-i\omega k};k\in\mathbb{Z}\}$ 之下的坐标向量. 这样，规范正交基 $\{(2\pi)^{-0.5}e^{-i\omega k};k\in\mathbb{Z}\}$ 的作用，可以看作将线性空间 $\ell(\mathbb{Z})$ 对应到线性空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 的规范正交线性变换(其实是酉变换)，它把 $\ell(\mathbb{Z})$ 中的双方无穷数列 $g=(g_m;m\in\mathbb{Z})^{\mathrm{T}}$ 对应到 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 的平方可积(能量有限)的 2π 周期函数 $\tilde{g}(\omega)$:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}:\ell^2(\mathbb{Z})&\to\mathcal{L}^2(0,2\pi)\\ g&\mapsto\tilde{g}\end{aligned}$$

相反地，这个规范正交线性变换的逆变换，将 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 中平方可积(能量有限)的 2π 周期函数 $\tilde{g}(\omega)$ 对应到 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中的双方无穷数列 $g=(g_m;m\in\mathbb{Z})^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^*:\mathcal{L}^2(0,2\pi)&\to\ell^2(\mathbb{Z})\\ \tilde{g}&\mapsto g\end{aligned}$$

这样, 线性变换 $g=\mathscr{F}^*\tilde{g}=(g_m;m\in\mathbb{Z})^{\mathrm{T}}$ 的作用是

$$g_m=\int_0^{2\pi}\tilde{g}(\omega)[(2\pi)^{-0.5}e^{i\omega m}]d\omega,\quad m\in\mathbb{Z}$$

或者, 形象化地把 $g=\mathscr{F}^*\tilde{g}$ 写成 "矩阵-向量" 乘积形式:

$$g=\begin{pmatrix}\vdots\\ \int_0^{2\pi}\tilde{g}(\omega)[(2\pi)^{-0.5}e^{i\omega m}]d\omega\\ m\in\mathbb{Z}\\ \vdots\end{pmatrix}_{\mathbb{Z}\times 1}=\begin{pmatrix}\vdots\\ (2\pi)^{-0.5}e^{i\omega m}\\ m\in\mathbb{Z}\\ \vdots\end{pmatrix}_{\mathbb{Z}\times[0,2\pi]}\begin{pmatrix}\vdots\\ \tilde{g}(\omega)\\ \omega\in[0,2\pi]\\ \vdots\end{pmatrix}_{[0,2\pi]\times 1}$$

在形象化表示中, 将矩阵(算子) $\mathscr{F}^*$ 理解为矩阵(算子) $\mathscr{F}$ 的复数共轭转置矩阵(严格的说法, 它们是伴随算子关系).

仿照 $g=(g_m;m\in\mathbb{Z})^{\mathrm{T}}$ 与 $\tilde{g}(\omega)$ 的表示方法, 将 $h=(h_m;m\in\mathbb{Z})^{\mathrm{T}}$ 与 $\tilde{h}(\omega)$ 的对应关系的逆 $\tilde{h}(\omega)=(\mathscr{F}h)(\omega)$ 表示为如下 "矩阵-向量" 乘积形式: 对于 $\omega\in[0,2\pi]$,

$$\begin{pmatrix}(2\pi)^{-0.5}\sum_{m\in\mathbb{Z}}h_m e^{-i\omega m}\end{pmatrix}_{[0,2\pi]\times 1}=((2\pi)^{-0.5}e^{-i\omega m};\ m\in\mathbb{Z})_{[0,2\pi]\times\mathbb{Z}}(h_m;m\in\mathbb{Z})^{\mathrm{T}}_{\mathbb{Z}\times 1}$$

这样, 序列卷积 $h=fg$ 在 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 中的表示 $[\mathscr{F}h]=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*][\mathscr{F}g]$ 可写成 "矩阵-向量" 乘积形式:

$$\begin{pmatrix}\vdots\\ \tilde{h}(\omega)\\ \omega\in[0,2\pi]\\ \vdots\end{pmatrix}_{[0,2\pi]\times 1}=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*]_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}\begin{pmatrix}\vdots\\ \tilde{g}(\omega)\\ \omega\in[0,2\pi]\\ \vdots\end{pmatrix}_{[0,2\pi]\times 1}$$

其中 $f=(f_{\ell-m})_{(\ell,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

注释: 在序列空间 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中, 序列卷积的 "行-列" 关系是 $h_{\mathbb{Z}\times 1}=f_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}g_{\mathbb{Z}\times 1}$, 在函数空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 中, 表现为 $[\mathscr{F}h]_{[0,2\pi]\times 1}=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*]_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}[\mathscr{F}g]_{[0,2\pi]\times 1}$, 因此, 按照 "矩阵-向量" 乘积规则, 序列卷积这两种形式的 "行-列" 关系存在显著差异.

利用这些记号和矩阵-向量乘积表示方法, 直接演算得到并验证序列卷积算子 f 在函数空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 中的对角化表现形式, 即卷积算子或矩阵 $\tilde{f}=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*]$ 是对角的.

模仿矩阵乘法演算 $\hat{f}=\mathscr{F}f$:

$$\sqrt{2\pi}=f\ (\cdots,e^{-i\times(-1)\times\omega},e^{-i\times 0\times\omega},e^{-i\times 1\times\omega},\cdots)_{[0,2\pi]\times\mathbb{Z}}\begin{pmatrix} & \text{第}m=-1\text{列} & \text{第}m=0\text{列} & \text{第}m=+1\text{列} & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & f_{-1-(-1)} & f_{-1-0} & f_{-1-1} & \cdots \\ & f_{0-(-1)} & f_{0-0} & f_{0-1} & \\ & f_{1-(-1)} & f_{1-0} & f_{1-1} & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$$

$$=\Big(\cdots\ ,\underbrace{\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}f_{\ell-(-1)}e^{-i\times\ell\times\omega}}_{\text{第}m=-1\text{列}},\underbrace{\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}f_{\ell-0}e^{-i\times\ell\times\omega}}_{\text{第}m=0\text{列}},\underbrace{\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}f_{\ell-1}e^{-i\times\ell\times\omega}}_{\text{第}m=+1\text{列}},\ \cdots\Big)_{[0,2\pi]\times\mathbb{Z}}$$

$$=\Big(\cdots\ ,\underbrace{e^{-i\omega(-1)}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}f_{\ell}e^{-i\ell\omega}}_{\text{第}m=-1\text{列}},\underbrace{e^{-i\omega 0}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}f_{\ell}e^{-i\ell\omega}}_{\text{第}m=0\text{列}},\underbrace{e^{-i\omega(+1)}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}f_{\ell}e^{-i\ell\omega}}_{\text{第}m=+1\text{列}},\ \cdots\Big)_{[0,2\pi]\times\mathbb{Z}}$$

$$=\left(\cdots\ \boxed{\begin{matrix}e^{-i\omega m}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}f_{\ell}e^{-i\ell\omega}\\ (\text{第}\omega\text{行第}m\text{列之元素})\end{matrix}}\ \cdots\right)_{[0,2\pi]\times\mathbb{Z}}$$

$$=\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{\lambda(\omega)e^{-i\times\omega\times m}} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{[0,2\pi]\times\mathbb{Z}}$$

其中

$$\lambda(\omega)=\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}f_{\ell}e^{-i\ell\omega},\quad \omega\in[0,2\pi]$$

这样, 得到 “$[0,2\pi]\times\mathbb{Z}$” 矩阵 $\hat{f}$:

$$\hat{f}=\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{\lambda(\omega)(2\pi)^{-0.5}e^{-i\times\omega\times m}} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{[0,2\pi]\times\mathbb{Z}}$$

最后演算 $\tilde{f}=\mathscr{F}f\mathscr{F}^{*}=\hat{f}\mathscr{F}^{*}$ 的具体表达形式:

$$2\pi\tilde{f} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{\lambda(\omega)e^{-i\times\omega\times m}} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{[0,2\pi]\times\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & e^{i\times\tilde{m}\times\tilde{\omega}} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{\mathbb{Z}\times[0,2\pi]} \begin{cases} \vdots \\ \text{第}\tilde{m}=-1\text{行} \\ \text{第}\tilde{m}=0\text{行} \\ \text{第}\tilde{m}=+1\text{行} \\ \vdots \end{cases}$$

第 $m=-1$ 列　第 $m=0$ 列　第 $m=1$ 列

因此，$\tilde{f}=\mathscr{F}f\mathscr{F}^*=\hat{f}\mathscr{F}^*=(\xi_{\omega,\tilde{\omega}})_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ 的第 ω 行第 $\tilde{\omega}$ 列的元素 $\xi_{\omega,\tilde{\omega}}$ 可以写成如下形式：对于任意的 $(\omega,\tilde{\omega})\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$，

$$\begin{aligned}\xi_{\omega,\tilde{\omega}} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}[\lambda(\omega)(2\pi)^{-0.5}e^{-i\times\omega\times m}][(2\pi)^{-0.5}e^{im\tilde{\omega}}] \\ &= \lambda(\omega)\sum_{m\in\mathbb{Z}}[(2\pi)^{-0.5}e^{-i\times\omega\times m}][(2\pi)^{-0.5}e^{im\tilde{\omega}}] \\ &= \lambda(\omega)\times(2\pi)^{-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-im(\omega-\tilde{\omega})} \\ &= \lambda(\omega)\delta(\omega-\tilde{\omega})\end{aligned}$$

其中，对于任意的 $(\omega,\tilde{\omega})\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$，

$$\delta(\omega-\tilde{\omega}) = \begin{cases}1, & \omega=\tilde{\omega} \\ 0, & \omega\neq\tilde{\omega}\end{cases}$$

因此，“$[0,2\pi]\times[0,2\pi]$”矩阵 $\tilde{f}$ 是如下的对角矩阵：

$$\tilde{f}=\mathscr{F}f\mathscr{F}^*=(\xi_{\omega,\tilde{\omega}})_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} = \operatorname{diag}(\lambda(\omega),\omega\in[0,2\pi])$$

最终可以得到结论：在线性空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 中，或者在傅里叶级数变换之下，或者在傅里叶级数规范正交基之下，序列卷积算子或矩阵 $\tilde{f}=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*]$ 是对角矩阵或者算子，而且，其对角线上的元素 $\lambda(\omega)$ 可以表示为

$$\lambda(\omega)=\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}f_\ell e^{-i\ell\omega},\quad \omega\in[0,2\pi]$$

正好是无穷序列 $f=(f_m;m\in\mathbb{Z})^{\mathrm{T}}$ 的傅里叶级数变换 $\tilde{f}(\omega)$：

$$\tilde{f}(\omega)=(2\pi)^{-0.5}\sum_{m\in\mathbb{Z}}f_m e^{-i\omega m},\quad \omega\in[0,2\pi]$$

的 $\sqrt{2\pi}$ 倍，即成立如下倍数关系：

$$\lambda(\omega)=\sqrt{2\pi}\tilde{f}(\omega),\quad \omega\in[0,2\pi]$$

这就是序列卷积算子或者矩阵 f 的对角化形式 $\tilde{f}$.

(δ) 序列卷积算子特征方程

在线性空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 中，序列卷积算子或矩阵 $\tilde{f}=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*]$ 显示为对角矩阵形式，即在线性空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 中，序列卷积可以写成

$$[\mathscr{F}h]=[\mathscr{F}f\mathscr{F}^*][\mathscr{F}g]$$

或者等价地

$$\tilde{h}=\tilde{f}\tilde{g}$$

其中，$\omega\in[0,2\pi]$,

$$\begin{cases}\tilde{h}(\omega)=(\mathscr{F}h)(\omega)=(2\pi)^{-0.5}\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}h_m e^{-i\omega m}\\ \tilde{g}(\omega)=(\mathscr{F}g)(\omega)=(2\pi)^{-0.5}\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}g_m e^{-i\omega m}\\ \tilde{f}(\omega)=(\mathscr{F}f)(\omega)=(2\pi)^{-0.5}\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}f_m e^{-i\omega m}\\ \lambda(\omega)=\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}f_m e^{-i\omega m}=(2\pi)^{0.5}\tilde{f}(\omega)\end{cases}$$

而且，正方形的“$[0,2\pi]\times[0,2\pi]$”矩阵 $\tilde{f}$ 是如下对角矩阵:

$$\tilde{f}=\mathscr{F}f\mathscr{F}^*=\operatorname{diag}(\lambda(\omega),\omega\in[0,2\pi])$$

因此，在线性空间 $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ 中，序列卷积变成乘积运算关系:

$$\tilde{h}(\omega)=\lambda(\omega)\tilde{g}(\omega),\quad \omega\in[0,2\pi]$$

这就是最常见的序列卷积在傅里叶变换下的表达形式，即“序列卷积等价于频域乘积”.

利用上述结果，得到序列卷积算子或矩阵 $f=(f_{\ell-m})_{(\ell,m)\in\mathbb{Z}^2}$ 的特征方程:

$$f\mathscr{F}^*=\mathscr{F}^*\operatorname{diag}(\lambda(\omega),\omega\in[0,2\pi])$$

详细写成如下矩阵乘积形式:

$$f\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & e^{i\times\tilde{m}\times\tilde{\omega}} & \cdots\\ & \vdots & \end{pmatrix}_{\mathbb{Z}\times[0,2\pi]}=\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & e^{i\times\tilde{m}\times\tilde{\omega}} & \cdots\\ & \vdots & \end{pmatrix}_{\mathbb{Z}\times[0,2\pi]}\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \lambda(\omega) & \cdots\\ & \vdots & \end{pmatrix}_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$$

如果“$\mathbb{Z}\times[0,2\pi]$”矩阵 $\mathscr{F}^*$:

$$\mathscr{F}^* = ((2\pi)^{-0.5}e^{i\times\tilde{m}\times\tilde{\omega}})_{(\tilde{m}\times\tilde{\omega})\in\mathbb{Z}\times[0,2\pi]} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & (2\pi)^{-0.5}e^{i\times\tilde{m}\times\tilde{\omega}} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{\mathbb{Z}\times[0,2\pi]}$$

的列向量是

$$\mathbb{F}_\omega = \{(2\pi)^{-0.5}e^{i\times m\times\omega}; m\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}},\quad \omega\in[0,2\pi]$$

这样，“$\mathbb{Z}\times[0,2\pi]$”矩阵 $\mathscr{F}^*$ 就可以重新表示为

$$\mathscr{F}^* = (\mathbb{F}_\omega; \omega\in[0,2\pi])$$

从而，序列卷积算子或矩阵 $f=(f_{\ell-m})_{(\ell,m)\in\mathbb{Z}^2}$ 的特征方程可以写成

$$f(\mathbb{F}_\omega;\omega\in[0,2\pi])_{\mathbb{Z}\times[0,2\pi]} = (\mathbb{F}_\omega;\omega\in[0,2\pi])_{\mathbb{Z}\times[0,2\pi]}\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \lambda(\omega) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$$

或者，对于任意的 $\omega\in[0,2\pi]$,

$$f\mathbb{F}_\omega = \lambda(\omega)\mathbb{F}_\omega$$

具体写成如下形式：任给 $\ell\in\mathcal{Z}$,

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{\ell-m}(2\pi)^{-0.5}e^{i\times m\times\omega} &= \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{-i\times n\times\omega}\right](2\pi)^{-0.5}e^{-i\times\ell\times\omega} \\ &= \lambda(\omega)(2\pi)^{-0.5}e^{-i\times\ell\times\omega}\end{aligned}$$

这说明，对于序列卷积算子或矩阵 $f=(f_{\ell-m})_{(\ell,m)\in\mathbb{Z}^2}$，其特征值是 $\lambda(\omega)$，与该特征值相应的特征函数或特征向量是 $\mathbb{F}_\omega = \{(2\pi)^{-0.5}e^{i\times m\times\omega}; m\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}, \omega\in[0,2\pi]$. 因此，$f=(f_{\ell-m})_{(\ell,m)\in\mathbb{Z}^2}$ 的规范正交特征向量系 $\{\mathbb{F}_\omega;\omega\in[0,2\pi]\}$ 将构成线性空间的规范正交基，以线性空间的这组规范正交基作为新基，序列卷积算子(或者矩阵) $f=(f_{\ell-m})_{(\ell,m)\in\mathbb{Z}^2}$ 将具有对角形式:

$$\tilde{f} = \mathscr{F} f \mathscr{F}^* = \operatorname{diag}(\lambda(\omega), \omega\in[0,2\pi])$$

8.1.3 函数卷积与傅里叶变换

这里研究函数卷积算子及其在傅里叶变换表示方法下的对角化.

(α) 函数卷积

设 $f(x), g(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，$h = f * g$ 的定义是

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

称 $h = f * g$ 为 f 与 g 的卷积，或者两个函数的卷积. 引入抽象矩阵(卷积核):

$$\boldsymbol{f} = (f(x-t))_{(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$$

那么，函数卷积也可以写成“矩阵-向量”形式:

$$h = \boldsymbol{f} g = (f(x-t))_{(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\, g$$

设 $h(x), g(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，它们的傅里叶变换是

$$\begin{cases} \tilde{h}(\omega) = (\mathscr{F}h)(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)e^{-i\omega x}dx, & \omega \in \mathbb{R} \\ \tilde{g}(\omega) = (\mathscr{F}g)(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i\omega x}dx, & \omega \in \mathbb{R} \end{cases}$$

这样，函数卷积关系式 $h = \boldsymbol{f} g$ 可以改写为

$$[\mathscr{F}h]=[\mathscr{F}\boldsymbol{f}\mathscr{F}^*][\mathscr{F}g]$$

或者

$$\tilde{h} = \tilde{\boldsymbol{f}}\tilde{g}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{f}} = [\mathscr{F}\boldsymbol{f}\mathscr{F}^*]$，$\mathscr{F}^*$ 是 $\mathscr{F}$ 的逆变换，是一个酉变换，保持函数或者信号的长度不变.

(β) 函数卷积对角化

根据傅里叶变换的定义知，$\tilde{h}(\omega), \tilde{g}(\omega)$ 的傅里叶逆变换可以写成

$$\begin{cases} h(x) = (\mathscr{F}^*\tilde{h})(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(\omega)e^{-i\omega x}d\omega, & \omega \in \mathbb{R} \\ g(x) = (\mathscr{F}^*\tilde{g})(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\omega)e^{-i\omega x}d\omega, & \omega \in \mathbb{R} \end{cases}$$

其中 $\tilde{h}(\omega), \tilde{g}(\omega)$ 是 $h(x), g(x)$ 的傅里叶变换.

在傅里叶变换域中，函数卷积关系式 $h = \boldsymbol{f} g$ 可以写为

$$[\mathscr{F}h] = [\mathscr{F}\boldsymbol{f}\mathscr{F}^*][\mathscr{F}g]$$

或者

$$\tilde{h} = \tilde{\boldsymbol{f}}\tilde{g}$$

其中 $\hat{f}=[\mathscr{F} f \mathscr{F}^*]$, $\mathscr{F}^*$ 是 $\mathscr{F}$ 的逆变换.

下面演算获得 $\hat{f}=[\mathscr{F} f \mathscr{F}^*]$ 的对角化表示形式. 演算分为两个步骤.

首先, 计算 $\hat{f}=\mathscr{F} f=(\hat{f}(\omega,u))_{(\omega,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega,u)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega u}f(v-u)dv\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v-u)e^{-i\omega v}dv\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-is\omega}ds\cdot e^{-iu\omega}\\&=\lambda(\omega)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-iu\omega}\end{aligned}$$

其中

$$\lambda(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-is\omega}ds$$

这个计算结果表明, 矩阵 $\hat{f}$ 的第 ω 行具有共同的因子 $\lambda(\omega)$, 而该行的其余元素 $(2\pi)^{-0.5}e^{-iu\omega};u\in\mathbb{R}$ 正好就是矩阵 $\mathscr{F}$ 的第 ω 行, 用矩阵符号表示这个结果为

$$\mathrm{diag}(\lambda(\omega);\omega\in\mathbb{R})\mathscr{F}$$

从而

$$\hat{f}=\mathscr{F} f=(\hat{f}(\omega,u))_{(\omega,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\mathrm{diag}(\lambda(\omega);\omega\in\mathbb{R})\mathscr{F}$$

其次, 计算 $\tilde{f}=[\mathscr{F} f \mathscr{F}^*]=\hat{f}\mathscr{F}^*$. 直接计算可以得到

$$\begin{aligned}\hat{f}\mathscr{F}^*&=[\mathrm{diag}(\lambda(\omega);\omega\in\mathbb{R})\mathscr{F}][\mathscr{F}^*]\\&=[\mathrm{diag}(\lambda(\omega);\omega\in\mathbb{R})][\mathscr{F}\mathscr{F}^*]\\&=[\mathrm{diag}(\lambda(\omega);\omega\in\mathbb{R})]\end{aligned}$$

这样,

$$\tilde{f}=[\mathscr{F} f \mathscr{F}^*]=\mathrm{diag}(\lambda(\omega);\omega\in\mathbb{R})$$

其中 $\mathscr{F}^*\mathscr{F}=\mathscr{F}\mathscr{F}^*$ 是单位矩阵, 即对角元素全是 1 的对角矩阵.

上述计算结果说明, 在选择规范正交傅里叶基之下, 函数卷积算子的表现形式是对角矩阵, 对角元素 $\lambda(\omega)$ 正好是构成卷积核 $f(x-t)$ 的函数 $f(x)$ 傅里叶变换 $\tilde{f}(x)$ 的 $\sqrt{2\pi}$ 倍, 即 $\lambda(\omega)=\sqrt{2\pi}\tilde{f}(\omega),\omega\in\mathbb{R}$.

在这样的条件下，函数卷积运算变成如下的乘积计算:

$$\tilde{h}=[\mathscr{F}h]=[\mathscr{F}\boldsymbol{f}\mathscr{F}^{*}][\mathscr{F}g]=\mathrm{diag}(\lambda(\omega);\omega\in\mathbb{R})\tilde{g}$$

或者

$$\tilde{h}(\omega)=\lambda(\omega)\tilde{g}(\omega),\quad \omega\in\mathbb{R}$$

这就是最常见的频域形式的函数卷积计算公式.

(γ) 函数卷积算子特征方程

在傅里叶变换域中，函数卷积关系式 $h=\boldsymbol{f}g$ 可以写为

$$[\mathscr{F}h]=[\mathscr{F}\boldsymbol{f}\mathscr{F}^{*}][\mathscr{F}g]$$

其中

$$[\mathscr{F}\boldsymbol{f}\mathscr{F}^{*}]=\mathrm{diag}(\lambda(\omega);\omega\in\mathbb{R})$$

从而得到函数卷积矩阵(算子) $\boldsymbol{f}$ 的特征关系:

$$\boldsymbol{f}\mathscr{F}^{*}=\mathscr{F}^{*}\mathrm{diag}(\lambda(\omega);\omega\in\mathbb{R})$$

将 $\mathscr{F}^{*}$ 的第 $\omega\in\mathbb{R}$ 列列向量记为 $\mathbb{F}_{\omega}$:

$$\mathbb{F}_{\omega}=\{(1/\sqrt{2\pi})e^{ix\omega};x\in\mathbb{R}\}^{\mathrm{T}},\quad \omega\in\mathbb{R}$$

这样，“$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 矩阵” $\mathscr{F}^{*}$ 就可以重新表示为

$$\mathscr{F}^{*}=(\mathbb{F}_{\omega};\omega\in\mathbb{R})$$

于是，函数卷积矩阵(算子) $\boldsymbol{f}$ 的特征方程可以改写为

$$\boldsymbol{f}(\mathbb{F}_{\omega};\omega\in\mathbb{R})=(\mathbb{F}_{\omega};\omega\in\mathbb{R})\mathrm{diag}(\lambda(\omega);\omega\in\mathbb{R})$$

或者，对于任意的 $\omega\in\mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{f}\mathbb{F}_{\omega}=\lambda(\omega)\mathbb{F}_{\omega}$$

即 $\boldsymbol{f}$ 的特征值 $\lambda(\omega)$ 相对应的特征函数是 $\mathbb{F}_{\omega}$，这些特征函数全体，即 $\{\mathbb{F}_{\omega};\omega\in\mathbb{R}\}$ 构成函数空间 $\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R})$ 的新规范正交基，在这组新基之下，函数卷积矩阵或者卷积算子对应的线性变换表现为对角化形式，此时，函数卷积运算变换成傅里叶变换域的乘积形式 $\tilde{h}(\omega)=\lambda(\omega)\tilde{g}(\omega),\omega\in\mathbb{R}$，其中，$\tilde{h}(\omega),\tilde{g}(\omega)$ 分别是原始函数 $h(x),g(x)\in\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R})$ 在新规范正交基之下的坐标，它们之间的关系是

$$\begin{cases}h(x)=(\mathscr{F}^{*}\tilde{h})(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{h}(\omega)e^{-i\omega x}d\omega, & \omega\in\mathbb{R}\\ g(x)=(\mathscr{F}^{*}\tilde{g})(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}(\omega)e^{-i\omega x}d\omega, & \omega\in\mathbb{R}\end{cases}$$

这样，因为

$$f\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}(\omega)e^{i\omega x}d\omega\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}(\omega)f(e^{i\omega x})d\omega$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}(\omega)\lambda(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(\omega)\tilde{g}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{h}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

所以，$h(x)=\boldsymbol{f}g(x)$，或者 $h=\boldsymbol{f}g$.

8.1.4　卷积算子的快速傅里叶算法

利用卷积算子在傅里叶变换域的对角化表示形式，这里研究卷积算子的快速傅里叶算法.

(α) 函数卷积和序列卷积的傅里叶快速算法

在平凡规范正交基下的卷积运算关系 $h(x)=\boldsymbol{f}g(x)$ 或者 $h=\boldsymbol{f}g$，在傅里叶变换域中可以写成

$$[\mathscr{F}h]=[\mathscr{F}\boldsymbol{f}\mathscr{F}^*][\mathscr{F}g]$$

其中

$$[\mathscr{F}\boldsymbol{f}\mathscr{F}^*]=\mathrm{diag}(\lambda(\omega);\omega\in\mathbb{R})$$

或者

$$\tilde{h}(\omega)=\lambda(\omega)\tilde{g}(x),\quad \omega\in\mathbb{R}$$

即在傅里叶变换域中，卷积算子表现为对角算子，这样，卷积运算在变换域中变成两个函数的乘积.

函数卷积运算 $h(x)=\boldsymbol{f}g(x)$ 或者 $h=\boldsymbol{f}g$ 存在快速算法. 这里研究函数卷积的快速计算方法. 假设在原始域中，两个函数的卷积定义为

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)f(x-t)dt,\quad x\in\mathbb{R}$$

这种函数卷积的快速计算方法是:

(1) $\lambda(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)e^{-iv\omega}dv,\ \omega\in\mathbb{R}$;

(2) $\tilde{g}(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i\omega x}dx,\ \omega\in\mathbb{R}$;

(3) $\tilde{h}(\omega)=\lambda(\omega)\tilde{g}(\omega),\ \omega\in\mathbb{R}$;

(4) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(\omega)e^{i\omega x}d\omega,\ x\in\mathbb{R}$.

在这种函数卷积快速计算方法中，步骤(3)体现了函数卷积在傅里叶变换域中乘积的本质，即卷积算子在傅里叶变换域中表现为对角算子或者对角矩阵. 另外，步骤(2)和(4)是傅里叶变换对，整个算法的关键支撑是傅里叶变换对的快速计算和卷积算子在傅里叶变换域的完全对角化表示方法.

(β) 有限维向量卷积的傅里叶快速算法

这里研究有限维向量卷积运算 $fg=h$ 的快速计算方法.

根据定义，两个同维的有限维向量 $f=(f_0,f_1,\cdots,f_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 和 $g=(g_0,g_1,\cdots,g_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 的卷积是同维的有限维向量 $h=f*g=(h_0,h_1,\cdots,h_{N-1})^{\mathrm{T}}$，具体写成

$$h_m=\sum_{\ell=0}^{N-1} f_\ell g_{\mathrm{mod}(m-\ell,N)},\quad m=0,1,\cdots,N-1$$

或者

$$h_m=\sum_{\substack{0\leqslant \ell,k\leqslant N-1\\ \mathrm{mod}(k+\ell,N)=m}} f_k g_\ell,\quad m=0,1,2,\cdots,(N-1)$$

或者定义卷积算子或矩阵 $f=(f_{\mathrm{mod}(\ell-k,N)})_{0\leqslant \ell,k\leqslant N-1}$ 将卷积表示为 $h=fg$.

有限维向量卷积的快速计算方法是:

(1) $\lambda_\ell=\sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times m},\ell=0,1,2,\cdots,(N-1)$;

(2) $\tilde{g}_\ell=\sum_{m=0}^{N-1} g_m\cdot\dfrac{1}{\sqrt{N}}e^{(-2\pi i/N)\times\ell\times m},\ell=0,1,2,\cdots,(N-1)$;

(3) $\tilde{h}_\ell=\lambda_\ell\tilde{g}_\ell,\ell=0,1,2,\cdots,(N-1)$;

(4) $h_m=\sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{h}_\ell\cdot\dfrac{1}{\sqrt{N}}e^{(2\pi i/N)\times\ell\times m},m=0,1,2,\cdots,(N-1)$.

在该算法中，由 $\{g_m,m=0,1,2,\cdots,(N-1)\}$ 计算 $\{\tilde{g}_\ell,\ell=0,1,2,\cdots,(N-1)\}$ 的步骤(2)以及由 $\{\tilde{h}_\ell,\ell=0,1,2,\cdots,(N-1)\}$ 计算 $\{h_m,m=0,1,2,\cdots,(N-1)\}$ 的步骤(4)利用著名的 FFT(快速有限傅里叶变换)实现，其计算复杂度是 $O(N\lg N)$. 在有限傅里叶变

换域中，由 $\{\tilde{g}_\ell, \ell = 0,1,2,\cdots,(N-1)\}$ 计算 $\{\tilde{h}_\ell, \ell = 0,1,2,\cdots,(N-1)\}$ 的步骤(3)的计算复杂度是 $O(N)$ (此处最多就是 N 次乘法). 因此，总的计算复杂度是 $O(N\lg N)$. 这就是计算两个有限维向量卷积的完美快速算法理论.

总结上述分析过程知：决定这种快速算法的两个核心步骤分别是快速的坐标变换(有限傅里叶变换的快速算法)和傅里叶变换域中卷积算子或者卷积矩阵的对角化表示形式(卷积运算在傅里叶变换域表现为乘积运算).

8.1.5　线性算子小波快速算法

这里研究线性算子的小波表示以及线性算子小波表示的特殊结构，从而为建立线性算子小波快速算法奠定必要的理论基础和算法基础.

(α) 线性算子小波表示

现在研究线性算子:

$$T_f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{K}(x,y)f(y)dy$$

的快速计算问题，其中包括 $T_f(x)$ 的离散取值的数值计算问题.

针对可能的应用需要假定算子核 $\mathscr{K}(x,y)$ 和变换基元函数 $f(y)$ 都是紧支撑的，支撑集分别是 $[0,A]\times[0,A]$ 和 $[0,A]$. 关于这类线性算子的数值计算问题，最简单的方法就是达布和近似方法.

对给定的自然数 N，将区间 $[0,A]$ 均等地分成间隔是 $\Delta = A/N$ 的 N 等份，引入记号 $x_j = j\Delta,\ y_j = j\Delta,\ j = 0,1,\cdots,N$，将这个线性算子离散化并近似为

$$T_f(x_m) = \sum_{j=0}^{N} \mathscr{K}(x_m,y_j)f(y_j)\Delta,\ \ m = 0,1,2,\cdots,N$$

引入向量和矩阵记号

$$\begin{cases} T_f = [T_f(x_0),\ T_f(x_1),\ \cdots,\ T_f(x_N)]^{\mathrm{T}} \\ f = [f(y_0),\ f(y_1),\ \cdots,\ f(y_N)]^{\mathrm{T}} \\ \mathscr{K} = \left[\Delta\mathscr{K}(x_m,y_j)\right]_{(N+1)(N+1)} \end{cases}$$

将线性算子的上述离散近似表达式简洁地写成矩阵-向量乘积形式:

$$T_f = \mathscr{K} f$$

当 N 比较大时，直接完成这种矩阵-向量乘积型计算的计算量将是很大的. 实际数值计算并不使用这种算法，常常是寻求一些较好的快速计算方法.

实际上，如果算子 $T_f(x)$ 是卷积算子，即它的算子核 $\mathscr{K}(x,y)$ 是如下形式的卷积

算子核:

$$\mathscr{K}(x,y)=\kappa(x-y)$$

那么, 前述研究结果确保这类线性算子在傅里叶变换域中表现为对角化形式, 从而可以建立这类线性算子数值计算的傅里叶快速算法.

这里简单回顾卷积算子的傅里叶快速算法. 将 $\kappa(x)$ 的傅里叶变换记为 $\mathrm{K}(\omega)$, $f(x)$ 的傅里叶变换记为 $\mathrm{F}(\omega)$, $T_f(x)$ 的傅里叶变换记为 $(\mathscr{F}T_f)(\omega)$, 那么, 在傅里叶变换域中, 卷积线性算子可以转化为如下对角形式:

$$(\mathscr{F}T_f)(\omega)=\mathrm{K}(\omega)\mathrm{F}(\omega)$$

在离散化条件下, 利用有限傅里叶变换可以得到相应的离散函数或者信号(有限维向量)卷积算子(矩阵)运算的频域对角化表达式:

$$(\mathscr{F}T_f)(\omega_m)=\mathrm{K}(\omega_m)\mathrm{F}(\omega_m),\quad m=0,1,2,\cdots,N$$

有限维向量卷积傅里叶快速算法研究已经明确指出, 如果使用如下方法去计算 $T_f(x)$, 则计算量将大为减少: 对已知的 $f(x)$, 由快速有限傅里叶变换算法, 比如 FFT 算法, 求出它的离散傅里叶变换 $\mathrm{F}(\omega)$; 接着根据离散卷积算子的上述频域对角化表达形式用乘积方法得到频域中的 $(\mathscr{F}T_f)(\omega)$; 最后, 再次用快速有限傅里叶变换算法从 $(\mathscr{F}T_f)(\omega)$ 返回到原始表达域(比如时间域或者空间域)得到 $T_f(x)$, 从而最终实现卷积算子的快速数值计算.

在这种快速算法中, 由有限傅里叶变换的快速算法理论知, 前述算法的第一、三两步的计算量均为 $O(N\ln N)$; 第二步的计算量即 N 次乘法对应的计算量就是 $O(N)$, 因此, 总的计算量是 $O(N\ln N)$. 这其中的关键在于频域计算量是 $O(N)$, 或者卷积线性算子核函数(二元函数或者矩阵) $\mathscr{K}(x,y)=\kappa(x-y)$ 的二维傅里叶变换或者频谱

$$(\mathscr{F}\mathscr{K})(\omega_x,\omega_y)=(\mathscr{F}\kappa)(\omega_x)\delta(\omega_x-\omega_y)=\mathrm{diag}(\mathrm{K}(\omega);\omega\in\Omega)$$

是对角型矩阵, 从而保证离散卷积算子运算 $T_f=\mathscr{K}f$ 的频域形式

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}T_f)(\omega_x)&=(\mathscr{F}\mathscr{K}\mathscr{F}^*)(\mathscr{F}f)(\omega_x)\\&=(\mathscr{F}\mathscr{K})(\omega_x,\omega_y)(\mathscr{F}f)(\omega_x)\\&=(\mathscr{F}\kappa)(\omega_x)\delta(\omega_x-\omega_y)(\mathscr{F}f)(\omega_x)\\&=\mathrm{diag}(\mathrm{K}(\omega_x);\omega_x\in\Omega)(\mathscr{F}f)(\omega_x)\end{aligned}$$

表现为对角矩阵-向量乘积形式, 或者简单地表示为如下的频域乘积公式:

$$(\mathscr{F}T_f)(\omega_x)=\mathrm{K}(\omega_x)(\mathscr{F}f)(\omega_x)$$

其中如果 $\omega_x\in\mathbb{R}$ 即 $\Omega=\mathbb{R}$, 上述公式所给出的就是连续卷积的频域计算关系公式, 如果 $\omega_x\in\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_N\}$ 即 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_N\}$, 上述公式给出的就是有限维向量卷

积算子的频域计算公式.

卷积线性算子 $T_f(x)$ 能够在频域中表现为极其特殊的对角化形式的根本原因在于, 傅里叶变换的基函数系 $\exp(i\omega x)$ 正好是卷积算子的特征函数系, 而傅里叶变换的规范正交基函数系 $(2\pi)^{-0.5}\exp(i\omega x)$ 恰好构成相应的函数线性空间的规范正交基. 按照线性代数理论, 这个卷积算子的核函数(二元函数)或者核矩阵, 在函数线性空间的这个规范正交基之下, 必然表现为对角形式.

前述分析说明, 一方面, 如果相应线性算子不是卷积算子, 那么, 前述例子的第二步算法, 也是最关键的算法就失效了, 也就是说, 傅里叶变换的方法就不再合适了; 另一方面, 对应于将卷积算子进行傅里叶变换, 对某种或某几种特定的线性算子, 是否进行特殊的一些变换就可以使之对角化或者"近似"对角化? 比如进行小波变换, 使相应线性算子的核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 在变换域中最好是对角化的, 即使不能实现完全的对角化, 至少也应该是近似对角化的, 这意味着, 在连续形式下, 它的变换结果在相应的变换域表达方式下主要支撑在某种意义的"对角线的"两旁"附近"; 在离散形式下, 相应的变换矩阵主要集中在某种意义的"主对角线的"两旁"附近", 成为特殊的稀疏矩阵, 这样, 就有理由期望, 像有限快速傅里叶变换之于有限维向量卷积算子那样, 大大地减少相应线性算子数值计算的计算量.

这样线性算子或者线性算子核函数(矩阵)的小波表示以及这种小波表示出现特殊形式, 是研究线性算子小波快速算法的核心问题.

(β) 线性算子 Haar 小波表示

这里示范性写出线性算子 Haar 小波表示, 即作为线性算子"原像"和"真像"的一元函数和作为线性算子核函数的二元函数在 Haar 正交小波基下的"坐标"或者"图像", 并按照适当的方式写出矩阵-向量乘积表达形式.

按照多分辨率分析理论模式, 在多分辨率分析的尺度函数和小波函数伸缩平移构成的规范正交函数系下, 将一元函数 $f(x)$ 和 $T_f(x)$ 的尺度函数正交级数和小波函数正交级数的系数序列作为无穷维平方可和序列空间 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的向量, 给出这两个向量之间的离散线性算子或者线性变换对应的矩阵(在无穷维矩阵空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中), 而这个离散线性算子或者线性变换对应的矩阵必定与线性算子 $T_f(x)$ 的核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 作为物理图像的二维正交小波变换有密切关系, 根据物理图像小波理论, 在两个一维多分辨率分析张量积产生的二维多分辨率分析体系下, 线性算子 $T_f(x)$ 的核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 的正交尺度变换和正交小波变换产生相应的数字图像, 将这些数字图像按照分块矩阵的规则适当排列才能得到这个离散线性算子或者线性变换对应的矩阵. 通过这种方式产生的离散线性算子或者线性变换对应的矩阵就是原始线

性算子的小波表示. 线性算子小波快速算法就建立在这种离散线性算子或者线性变换对应的矩阵具有近似对角化(分块矩阵对角化)表达形式的基础上.

在研究 Haar 多分辨率分析时, Haar 函数 $\psi(x)$ 定义如下:

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0\\ 1, & 0\leqslant x<0.5\\ -1, & 0.5\leqslant x<1\\ 0, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

这个函数的伸缩平移函数系按照如下方式定义: 当 $(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 时,

$$\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k)=\begin{cases}0, & -\infty<x<2^{-j}k\\ 2^{j/2}, & 2^{-j}k\leqslant x<2^{-j}(k+0.5)\\ -2^{j/2}, & 2^{-j}(k+0.5)\leqslant x<2^{-j}(k+1.0)\\ 0, & 2^{-j}(k+1.0)\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

那么, 这个伸缩平移函数系 $\{\psi_{j,k}(x)=2^{-j/2}\psi(2^j x-k);(j,k)\in\mathbb{Z}^2\}$ 构成平方可积函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基. 这就是 Haar 正交小波基.

这里为了表述方便, 适当修改 Haar 正交小波基的形式并引进一些记号. 当 $(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 时, 定义二进区间

$$I_{j,k}=[2^j(k-1),2^j k]$$

支撑在区间 $I_{j,k}$ 上的 Haar 函数 $h_{j,k}(x)$ 被如下定义:

$$h_{j,k}(x)=\psi_{-j,k-1}(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<2^j(k-1)\\ 2^{-j/2}, & 2^j(k-1)\leqslant x<2^j(k-0.5)\\ -2^{-j/2}, & 2^j(k-0.5)\leqslant x<2^j k\\ 0, & 2^j k\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

这样, $h_{0,1}(x)=\psi(x)$ 就是在多分辨率分析中的 Haar 小波函数. 在不致引起混淆的条件下, 有时也使用下面的记号:

$$h_{j,k}(x)=h_{I_{j,k}}(x)=h_I(x)=2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-(k-1))=\psi_{-j,k-1}(x)$$

将区间 $I_{j,k}$ 上的标准化示性函数或者特征函数记为

$$\chi_{I_{j,k}}(x)=\begin{cases}\left|I_{j,k}\right|^{-0.5}, & x\in I_{j,k}\\ 0, & x\notin I_{j,k}\end{cases}$$

其中 $\left|I_{j,k}\right|$ 表示区间 $I_{j,k}$ 的长度, 在这里 $\left|I_{j,k}\right|=2^j$. 同样, 有时也使用记号

$$\chi_{j,k}(x) = \chi_{I_{j,k}}(x)$$

另外，如果 $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 及 $I \subset \mathbb{R}$，定义函数 $f(x)$ 在集合 I 上的 Haar 系数 d_I 和平均值 s_I 分别为

$$\begin{cases} d_I = \int_{\mathbb{R}} f(x) h_I(x) dx \\ s_I = \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_I(x) dx \end{cases}$$

容易验证

$$d_I = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_{I'} - s_{I''})$$

其中 I' 和 I'' 是区间 I 的左右两等份.

现在给出函数 $f(x)$ 在 Haar 小波基下的分解. 假设 $f(x)$ 支撑在区间 $[0,1]$ 上，而原始观察值理解为 $f(x)$ 在长度是 2^{-n} 的二进区间上的平均值:

$$s_k^{(0)} = 2^{n/2} \int_{I_{n,k}} f(x) dx$$

在这种理解下，函数 $f(x)$ 在长度是 2^{-n+1} 的区间上的 Haar 系数和平均值是

$$\begin{cases} d_k^{(1)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(s_{2k-1}^{(0)} - s_{2k}^{(0)}) \\ s_k^{(1)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(s_{2k-1}^{(0)} + s_{2k}^{(0)}) \end{cases}$$

如果已经得到 $f(x)$ 在长度是 2^{-n+m} 的二进区间上的 Haar 系数和平均值，则它在长度是 2^{-n+m+1} 的二进区间上的 Haar 系数和平均值可由下述递推公式给出:

$$\begin{cases} d_k^{(m+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(s_{2k-1}^{(m)} - s_{2k}^{(m)}) \\ s_k^{(m+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(s_{2k-1}^{(m)} + s_{2k}^{(m)}) \end{cases}$$

其中 $m = 0,1,\cdots,(n-1)$ 且 $k = 1,2,\cdots,2^{n-m-1}$，其算法结构就是多分辨率分析正交小波链式分解算法，多分辨率分析正交小波链式分解算法理论以及分解形式、数字信号及数字图像的相应算法公式都在前面详细讨论过，这里不再赘述.

在线性算子小波快速算法的过程中，还需要作为线性算子积分核函数的二维函数(物理图像)的二维正交多分辨率分析小波级数展开表达式.

在这里，由张量积方法构造二维 Haar 尺度函数和小波函数，二维 Haar 尺度函数就是纵横坐标区间标准化示性函数的乘积，但是，二维的正交小波函数是如下构造的三个函数:

$$h_I(x)h_I(y),\quad h_I(x)\chi_I(y),\quad \chi_I(x)h_{I'}(y)$$

假设线性算子积分核 $\mathscr{K}(x,y)$ 支撑在正方形 $[0,1;0,1]=[0,1]\times[0,1]$ 上，且 I 和 I' 都是相同长度的二进区间. 研究如下表达形式的积分线性算子:

$$(T_f)(x)=\int_{\mathbb{R}}\mathscr{K}(x,y)f(y)dy$$

在多分辨率分析 Haar 小波基下，将线性算子 T 的核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 作为物理图像，按照图像小波理论展开成如下形式的正交基本子图像(正交二维小波函数和尺度函数)的级数和:

$$\mathscr{K}(x,y)=\sum_{\ell=1}^{3}\sum_{(I,I')}\alpha_{(\ell,I,I')}h_{\ell,I,I'}(x,y)$$

其中

$$\begin{cases}h_{1,I,I'}(x,y)=h_I(x)h_{I'}(y)\\ h_{2,I,I'}(x,y)=h_I(x)\chi_{I'}(y)\\ h_{3,I,I'}(x,y)=\chi_I(x)h_{I'}(y)\end{cases}$$

而且,

$$\alpha_{(\ell,I,I')}=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\mathscr{K}(x,y)h_{\ell,I,I'}(x,y)dxdy,\quad \ell=1,2,3$$

其中级数求和范围是一切二进正方形 $I\times I'$, $|I|=|I'|$, $I=I_{j,k}$, $I'=I_{j,k'}$,所以，如果采用整数组下标，那么，上式可以改写成为

$$\alpha^{(j)}_{(\ell,k,k')}=\alpha_{(\ell,I,I')}$$

$$\ell=1,2,3;\quad j=1,\cdots,(n-1),n;\quad k,k'=1,2,\cdots,2^{n-j-1}$$

这样，可以得到线性算子 T 的如下级数展开计算公式:

$$\begin{aligned}(T_f)(x)&=\sum_{\ell=1}^{3}\sum_{(I,I')}\alpha_{(\ell,I,I')}\int_{\mathbb{R}}h_{(\ell,I,I')}(x,y)f(y)dy\\&=\sum_{I}h_I(x)\cdot\sum_{I'}\alpha_{(1,I,I')}\int_{\mathbb{R}}h_{I'}(y)f(y)dy\\&\quad+\sum_{I}h_I(x)\cdot\sum_{I'}\alpha_{(2,I,I')}\int_{\mathbb{R}}\chi_{I'}(y)f(y)dy\\&\quad+\sum_{I}\chi_I(x)\cdot\sum_{I'}\alpha_{(3,I,I')}\int_{\mathbb{R}}h_{I'}(y)f(y)dy\\&=\sum_{I}h_I(x)\sum_{I'}\alpha_{(1,I,I')}d_{I'}+\sum_{I}h_I(x)\sum_{I'}\alpha_{(2,I,I')}s_{I'}+\sum_{I}\chi_I(x)\sum_{I'}\alpha_{(3,I,I')}d_{I'}\end{aligned}$$

在研究线性算子数值计算小波快速算法时，必须进行有限的离散的形式处理，为此定义投影算子:

$$P_jf=\sum_{|I|=2^{-n+j}}\left\langle f,\chi_I\right\rangle\chi_I,\quad j=0,1,2,\cdots,n$$

在 $j=0$ 时，它相当于最原始的采样函数，在一般情况下，它是台阶形式的函数. 定义算子 T_0 为

$$T_0 = P_0 T P_0$$

考虑到数值计算的需要，用 T_0 逼近或近似代替 T，从而实现近似离散化处理. 通过简单的变化可将 T_0 改写成

$$\begin{aligned}
T_0 &= P_0 T P_0 \\
&= \sum_{j=1}^{n}(P_{j-1}TP_{j-1} - P_jTP_j) + P_nTP_n \\
&= \sum_{j=1}^{n}[(P_{j-1} - P_j)T(P_{j-1} - P_j)] + P_nTP_n \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}[(P_{j-1} - P_j)TP_j] + \sum_{j=1}^{n}[P_jT(P_{j-1} - P_j)] \\
&= \sum_{j=1}^{n}(Q_jTQ_j + Q_jTP_j + P_jTQ_j) + P_nTP_n
\end{aligned}$$

其中算子 $Q_j = P_{j-1} - P_j$ 称为“偏差算子”，它的作用相当于将函数 $f(x)$ 在长度为 2^{-n+j-1} 的两个相邻二进区间上的平均值，用一个更长区间上的平均值代替之后造成的“偏差”，这个更长的区间以这两个二进区间为其左右两等份子区间，它也是二进区间，而且长度为 2^{-n+j}. 实际上，$Q_j = P_{j-1} - P_j$ 就是宽度分别为 2^{-n+j-1} 和 2^{-n+j} 的两个“台阶”函数的差，这两个“台阶”函数都是作为原函数 $f(x)$ 的特殊的逼近出现的.

在离散算子 T_0 的算子级数展开表达式中，出现了在连续形式线性算子 T 核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 二维正交小波级数展开表达式中没有的“多余的”项 P_nTP_n，究其原因，是最长的二进区间只有 $[0,1]$ 这一个，无法与更长的二进区间产生“偏差”，因此，如果需要进行数值计算的区间是全实数轴，就不会出现“多余”的项. T_0 的其余各展开项都与 $\mathscr{K}(x,y)$ 的展开项相对应：在核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 展开中的 $\ell = 1,2,3$ 这三项正好依次对应于 T_0 展开式中求和号内的 $Q_jTQ_j, Q_jTP_j, P_jTQ_j$ 这三项；T_0 级数展开式中的求和指标 j，相应于算子核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 小波级数展式中等长的二进区间 I 和 I' 共同的尺度标准

$$\Delta_j = 2^{-n+j}$$

的下标 j, $j = 0,1,2,\cdots,n$.

现在用向量和矩阵的语言来讨论这个问题. 假设函数 $f(x)$ 已经采样

$$\{s_k^{(0)}; k=1,2,\cdots,N\}$$

其中 $N=2^n$. 由 Haar 系数和平均值的递推公式依次计算得到

$$s_k^{(j)}, d_k^{(j)};\quad k=1,2,\cdots,2^{n-j},\ \ j=1,2,\cdots,(n-1),n$$

利用这些数据构造一个维数是 $\mathfrak{N}=2\times(2^n-1)$ 的列向量 $\mathfrak{f}\in\mathbb{R}^{2\times(2^n-1)}$:

$$\mathfrak{f}=(d_1^{(1)},\cdots,d_{2^{n-1}}^{(1)};s_1^{(1)},\cdots,s_{2^{n-1}}^{(1)};d_1^{(2)},\cdots,d_{2^{n-2}}^{(2)};s_1^{(2)},\cdots,s_{2^{n-2}}^{(2)};\cdots;d_1^{(n)};s_1^{(n)})^{\mathrm{T}}$$

此外, 利用线性算子 $T_f(x)$ 的核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 的小波系数构造矩阵:

$$\Gamma_j^{(\ell)}=(\alpha_{(\ell,k,k')}^{(j)})_{2^{n-j}\times 2^{n-j}},\quad \ell=1,2,3;\ \ j=1,2,\cdots,n$$

并将这 $3n$ 个矩阵按照分块矩阵模式构造一个总行数和总列数 $\mathfrak{N}=2\times(2^n-1)$ 的 $\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}$ 矩阵 Γ, 将矩阵 Γ 按分块矩阵形式写成 $n\times n$ 分块矩阵:

$$\Gamma=(\Gamma_{(\xi,\zeta)})_{n\times n}$$

详细地, 这里需要定义 $n\times n$ 个分块子矩阵 $\Gamma_{(\xi,\zeta)}$, 每个 $\Gamma_{(\xi,\zeta)}$ 再次按照 2×2 分块矩阵形式被定义如下: 对于 $1\leqslant\xi,\zeta\leqslant n$,

$$\Gamma_{(\xi,\zeta)}=\begin{cases}(\gamma_{(p,q)}^{(\xi)})_{2\times 2}, & \xi=\zeta\\ \mathscr{O}_{[2\times 2^{n-\xi}]\times[2\times 2^{n-\xi}]}, & \xi\neq\zeta\end{cases}$$

其中, $\xi=1,2,\cdots,n$,

$$(\gamma_{(p,q)}^{(\xi)})_{2\times 2}=\begin{pmatrix}\Gamma_\xi^{(1)} & \Gamma_\xi^{(2)}\\ \Gamma_\xi^{(3)} & \mathscr{O}_{2^{n-\xi}\times 2^{n-\xi}}\end{pmatrix}$$

注释: 按照分块矩阵模式, $\Gamma=(\Gamma_{(\xi,\zeta)})_{n\times n}$ 的第 (ξ,ζ) 分块子矩阵 $\Gamma_{(\xi,\zeta)}$ 实际是一个 $[2\times 2^{n-\xi}]\times[2\times 2^{n-\zeta}]$ 的“长方形矩阵”, 当 $\xi\neq\zeta$ 时, $\Gamma_{(\xi,\zeta)}=\mathscr{O}_{[2\times 2^{n-\xi}]\times[2\times 2^{n-\zeta}]}$ 是一个“零长方形矩阵”, 行数和列数是 $[2\times 2^{n-\xi}]\times[2\times 2^{n-\zeta}]$, 只有当 $\xi=\zeta$ 时, 分块子矩阵 $\Gamma_{(\xi,\zeta)}$ 才是一个 $[2\times 2^{n-\xi}]\times[2\times 2^{n-\xi}]$ 的“正方形矩阵”, 这个正方形 $\Gamma_{(\xi,\zeta)}$ 再次按照 2×2 的分块模式被定义为 $(\gamma_{(p,q)}^{(\xi)})_{2\times 2}$, 其中每个分块子矩阵都是 $2^{n-\xi}\times 2^{n-\xi}$ 正方形矩阵, 特别地, $\gamma_{(2,2)}^{(\xi)}=\mathscr{O}_{2^{n-\xi}\times 2^{n-\xi}}$ 是一个 $2^{n-\xi}\times 2^{n-\xi}$ 的“零正方形矩阵”, 除此之外, 其余三个 $2^{n-\xi}\times 2^{n-\xi}$ 的“正方形矩阵”是

$$\gamma_{(1,1)}^{(\xi)} = \Gamma_{\xi}^{(1)} = (\alpha_{(1,k,k')}^{(\xi)})_{2^{n-\xi}\times 2^{n-\xi}}$$
$$\gamma_{(1,2)}^{(\xi)} = \Gamma_{\xi}^{(2)} = (\alpha_{(2,k,k')}^{(\xi)})_{2^{n-\xi}\times 2^{n-\xi}}$$
$$\gamma_{(2,1)}^{(\xi)} = \Gamma_{\xi}^{(3)} = (\alpha_{(3,k,k')}^{(\xi)})_{2^{n-\xi}\times 2^{n-\xi}}$$

注释: 这个庞大的 $[2\times(2^n-1)]\times[2\times(2^n-1)]$ 矩阵 $\Gamma=(\Gamma_{(\xi,\zeta)})_{n\times n}$ 是按照 $n\times n$ 分块矩阵模式定义的, 它就是线性算子 $T_f(x)$ 核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 的小波域表达形式, 为了简化表达形式, $\Gamma=(\Gamma_{(\xi,\zeta)})_{n\times n}$ 实际上是核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 的冗余小波表达. 建议读者撰写更简练的表达形式, 以便计算机编程时消耗更少的储存单元而且获得更高的计算效率.

在小波变换域定义线性算子 $T_f(x)$ 像的表达形式 $\mathscr{F}\in\mathbb{R}^{2\times(2^n-1)}$, 它本质上是函数 $T_f(x)$ 的小波变换系数向量, 只不过这种表达方法是冗余的.

具体地, 定义一个 $2\times(2^n-1)$ 维列向量 $\mathscr{F}\in\mathbb{R}^{2\times(2^n-1)}$, 仿照 $\mathfrak{f}\in\mathbb{R}^{2\times(2^n-1)}$ 的坐标分量结构形式地表示为

$$\mathscr{F}=(D_1^{(1)},\cdots,D_{2^{n-1}}^{(1)};S_1^{(1)},\cdots,S_{2^{n-1}}^{(1)};D_1^{(2)},\cdots,D_{2^{n-2}}^{(2)};S_1^{(2)},\cdots,S_{2^{n-2}}^{(2)};\cdots;D_1^{(n)};S_1^{(n)})^{\mathrm{T}}$$

这样, 可以得到如下重要结论: $\mathscr{F}\in\mathbb{R}^{2\times(2^n-1)}$ 正好是线性算子 $g=T_0f$:

$$g(x)=(T_0f)(x)=(T_0[f(y)])(x)$$

在多分辨率分析 Haar 正交小波规范正交基下的冗余坐标表达或者是正交小波级数系数序列的冗余表达, 即成立如下形式的矩阵-向量乘积公式:

$$\mathscr{F}=\Gamma\mathfrak{f}$$

线性算子 $T_f(x)$ 小波快速算法的最后一个步骤是从 $\mathscr{F}\in\mathbb{R}^{2\times(2^n-1)}$ 获得 $T_f(x)$ 的像 $g=T_0f$, 即 $g(x)=(T_0f)(x)=(T_0[f(y)])(x)$ 的具体表达形式:

$$g(x)=(T_0f)(x)=(T_0[f(y)])(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2^{n-j}}(D_k^{(j)}h_{j,k}(x)+S_k^{(j)}\chi_{j,k}(x))$$

从而, 完全实现由 $f(x)$ 出发利用小波方法快速计算 $T_f(x)$ 的离散数值.

总结起来得到如下的线性算子小波快速算法流程:

(1) 构造获得线性算子 T 核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 的“小波算子核矩阵”, 即 $[2\times(2^n-1)]\times[2\times(2^n-1)]$ 矩阵 $\Gamma\in\mathbb{R}^{[2\times(2^n-1)]\times[2\times(2^n-1)]}$, 这本质上是线性算子的冗余小波表达;

(2) 构造获得函数或者信号 $f(x)$ 的冗余小波表达 $\mathfrak{f}\in\mathbb{R}^{2\times(2^n-1)}$，这本质上是函数或者信号的多分辨率分析正交小波变换系数向量；

(3) 按照线性代数的规则实现小波变换域的线性变换：

$$\mathscr{F}=\Gamma\mathfrak{f}$$

(4) 从 $\mathscr{F}\in\mathbb{R}^{2\times(2^n-1)}$ 获得 $T_f(x)$ 的像 $g=T_0f$，即 $g(x)=(T_0f)(x)$ 的具体表达形式：

$$g(x)=(T_0f)(x)=(T_0[f(y)])(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2^{n-j}}(D_k^{(j)}h_{j,k}(x)+S_k^{(j)}\chi_{j,k}(x))$$

上面每一个步骤都是有限离散形式，函数或者信号原始采样点数 $N=2^n$．在进行算法计算量分析时，只考虑四个步骤中的第二、三和四这三个步骤的运算量，每个步骤的运算量大致都是 $O(N)$，所以，总的计算量也是 $O(N)$．

(γ) 线性算子小波快速算法

线性算子 Haar 小波表示方法的算法结构是一种典型的线性算子小波快速算法，只不过 Haar 小波的局限，导致算子 $T_f(x)$ 核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 在 Haar 正交小波(二维)下的分解系数为

$$\alpha_{(\ell,k,k')}^{(\xi)}=\alpha_{(\ell,I,I')},\quad \ell=1,2,3;\quad k,k'=1,2,\cdots,2^{n-\xi-1};\quad \xi=1,2,\cdots,n$$

在偏离对角线 $I=I'$ 时，趋向零的速度不够快，导致这种快速算法对线性算子数值计算的计算量降低效果不显著，在实际计算中用处不大．究其根本原因，就是 Haar 小波的频域局部化能力不强、消失矩的阶数不高，最终导致函数或者信号小波系数分散，图像或者线性算子核函数对角化不显著．

考虑到时域(空域)实际取样的有限性，要求尺度方程只有有限长度，而且，尺度函数 $\varphi(x)$ 作为可选因素，最好是紧支撑函数，这两个要求导致相应的小波是紧支撑正交小波．另一方面，“频域局部化”即“小波分解系数域紧凑”，希望函数或者信号的小波系数较快趋于零，张量积得到的二维小波保证物理图像或者线性算子核函数能够具有显著的对角化特征，对此，存在两种解决办法：其一，要求紧支撑正交小波 $\psi(x)$ 有较好的光滑性，它保证 $\Psi(\omega)$ 有较好的局部性，这必然导致 $\psi(x)$ 的支撑集长度增加，所以，增加 $\varphi(x)$ 或 $\psi(x)$ 的支撑集长度，是实现前述要求的途径之一；其二，由 Daubechies(1988)的论述，小波 $\psi(x)$ 的消失矩的阶数越高，也就是说，小波函数 $\psi(x)$ 在时间轴或者水平轴上下的数值分布对称性越好，那么，$\psi(x)$ 的频域局部性就越好，所以，要求小波具有较高阶数的消失矩，是实现上述要求的另一

途径. 因此, 在下述讨论线性算子数值计算的问题中, 采用由 Daubechies(1988)给出的具有一定的消失矩阶数和适当支撑集长度的紧支撑集正交小波. 在实际应用时, 这完全可以根据问题的需要进行选择.

沿用 Daubechies 的记号, 假设双尺度方程和构造方程为

$$\begin{cases}\varphi(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{k=0}^{2M-1}h_{k+1}\varphi(2x-k)\\ \psi(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{k=0}^{2M-1}g_{k+1}\varphi(2x-k)\end{cases}$$

其中, $k=1,2,\cdots,2M$,

$$g_k=(-1)^{k-1}h_{2M-k+1}$$

将原始信号或者函数 $f(x)$ 的有限离散采样记为 $s_k^{(0)},k=1,2,\cdots,N(N=2^m)$. 这时, 函数或者信号的尺度分解系数和小波分解系数的递推公式是

$$\begin{cases}s_k^{(j)}=\sum\limits_{n=1}^{2M}h_n s_{n+2k-2}^{(j-1)}\\ d_k^{(j)}=\sum\limits_{n=1}^{2M}g_n s_{n+2k-2}^{(j-1)}\end{cases}$$

其中, $k=1,2,\cdots,2^{m-j};j=1,2,\cdots,m$.

注释: 在这个递推公式中, 无论是被分解的序列还是分解产生的序列, 它们都是有限长度的序列, 但是计算过程需要把它们理解为无穷长度序列. 具体地说, 出现在这个递推公式右边的序列 $\{s_n^{(j-1)};\ n=1,2,\cdots,2^{m-j+1}\}$ 理解为以连续 2^{m-j+1} 项为周期的周期序列, 而且, 递推公式产生的左边的序列

$$\{s_n^{(j)};\ n=1,2,\cdots,2^{m-j}\}\quad 和\quad \{d_n^{(j)};\ n=1,2,\cdots,2^{m-j}\}$$

被理解为以连续 2^{m-j} 项为周期的周期序列.

另外, 上述计算尺度分解系数和小波分解系数的递推公式可以写成矩阵-向量乘积形式, 这部分内容在函数或者信号的小波链算法理论和小波包、金字塔算法理论中已经进行了详尽的分析论证.

反过来, 利用原始信号或函数的尺度分解系数和小波分解系数可以完全重建函数或信号的原始采样序列, 从 $s_1^{(m)}$ 和 $d_1^{(m)};d_1^{(m-1)},d_2^{(m-1)};\cdots;d_1^{(1)},d_2^{(1)},\cdots,d_{2^{m-1}}^{(1)}$ 逐步迭代可以重新恢复原信号或者它的按间隔 $\Delta=2^{-m}$ 的采样值 $s_k^{(0)},k=1,2,\cdots,2^m$, 合成过程的逐步迭代公式可以表示为

$$\begin{cases} s_{2n}^{(j-1)} = \sum_{k=1}^{M} [h_{2k} s_{n-k+1}^{(j)} + g_{2k} d_{n-k+1}^{(j)}] \\ s_{2n-1}^{(j-1)} = \sum_{k=1}^{M} [h_{2k-1} s_{n-k+1}^{(j)} + g_{2k-1} d_{n-k+1}^{(j)}] \end{cases}$$

其中 $n = 1,2,\cdots,2^{m-j-1}$； $j = m, m-1,\cdots,1$. 利用函数或者信号尺度系数和小波系数的递推计算公式，可以得到函数或者信号的两种等价表示方式：

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{k=1}^{2^{m-j}} s_k^{(j)} 2^{(m-j)/2} \varphi(2^{m-j} x - k + 1) \\ \qquad\quad + \sum_{k=1}^{2^{m-j}} d_k^{(j)} 2^{(m-j)/2} \psi(2^{m-j} x - k + 1) \\ f(x) = \sum_{\ell=1}^{2^{m-j+1}} s_\ell^{(j-1)} 2^{(m-j+1)/2} \varphi(2^{m-j+1} x - \ell + 1) \end{cases}$$

递推地得到更一般的合成计算公式：对于 $0 \leqslant p \leqslant j \leqslant m$ ，

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{k=1}^{2^{m-p}} s_k^{(p)} 2^{(m-p)/2} \varphi(2^{m-p} x - k + 1) \\ \qquad\quad + \sum_{q=p}^{j} \sum_{k=1}^{2^{m-q}} d_k^{(q)} 2^{(m-q)/2} \psi(2^{m-q} x - k + 1) \\ f(x) = \sum_{\ell=1}^{2^{m-j+1}} s_\ell^{(j-1)} 2^{(m-j+1)/2} \varphi(2^{m-j+1} x - \ell + 1) \end{cases}$$

现在研究线性算子 $T_f(x)$ 的核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 在二维紧支撑正交小波下的小波分解系数. 仍然假定 $\mathscr{K}(x,y)$ 支撑在正方形 $[0,1;0,1] = [0,1]\times[0,1]$ 上，用张量积方法由前述的紧支撑正交小波 $\psi(x)$ 和紧支撑尺度函数 $\varphi(x)$ 构造二维紧支正交小波基，它由三组函数

$$\psi(x)\psi(y),\quad \psi(x)\varphi(y),\quad \varphi(x)\psi(y)$$

生成，在乘积中两个自变量 x 和 y 的伸缩尺度取为相同的 $\Delta = 2^{-j}$， $j \in \mathbb{Z}$. 引入如下记号：对于 $(j,k,k') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} \psi_{1,k,k'}^{(j)}(x,y) = 2^{-j} \psi(2^{-j} x - k + 1) \psi(2^{-j} y - k' + 1) \\ \psi_{2,k,k'}^{(j)}(x,y) = 2^{-j} \psi(2^{-j} x - k + 1) \varphi(2^{-j} y - k' + 1) \\ \psi_{3,k,k'}^{(j)}(x,y) = 2^{-j} \varphi(2^{-j} x - k + 1) \psi(2^{-j} y - k' + 1) \\ \psi_{4,k,k'}^{(j)}(x,y) = 2^{-j} \varphi(2^{-j} x - k + 1) \varphi(2^{-j} y - k' + 1) \end{cases}$$

对于二维函数 $\mathscr{K}(x,y)$，其小波系数定义为：对于 $\ell=1,2,3;(\ell,k,k')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$,

$$\alpha_{(\ell,k,k')}^{(j)}=\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\mathscr{K}(x,y)\psi_{(\ell,k,k')}^{(j)}(x,y)dxdy$$

那么，二维函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 对应的正交小波级数可以表示为

$$\mathscr{K}(x,y)=\sum_{\ell=1}^{3}\sum_{(\ell,k,k')}\alpha_{(\ell,k,k')}^{(j)}\psi_{(\ell,k,k')}^{(j)}(x,y)$$

另外，引入系数记号：对于 $(k,k')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$,

$$\begin{cases}\mathbf{g}(1,k,k')=g_k g_{k'}\\ \mathbf{g}(2,k,k')=g_k h_{k'}\\ \mathbf{g}(3,k,k')=h_k g_{k'}\\ \mathbf{g}(4,k,k')=h_k h_{k'}\end{cases}$$

如果把 $\mathscr{K}(x,y)$ 的初始化离散取值记为

$$\{\alpha_{(4,k,k')}^{(0)};k,k'=1,2,\cdots,2^m\}$$

分别对 $\alpha_{(4,k,k')}^{(j-1)}$ 的两下标 k,k' 利用前述递推公式可得

$$\alpha_{(\ell,k,k')}^{(j)}=\sum_{\xi,\zeta=1}^{2^{m-j+1}}\mathbf{g}(\ell,\xi,\zeta)\alpha_{(4,\xi+2k-2,\zeta+2k'-2)}^{(j-1)},\quad \ell=1,2,3,4,$$

$$k,k'=1,2,\cdots,2^{m-j};\quad j=1,2,\cdots,m$$

利用线性算子 $T_f(x)$ 的核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 的小波系数构造矩阵：

$$\Gamma_j^{(\ell)}=(\alpha_{(\ell,k,k')}^{(j)})_{2^{m-j}\times 2^{m-j}},\quad \ell=1,2,3,4;\quad j=1,2,\cdots,m$$

并将这 $3m$ 个矩阵按分块矩阵模式构造一个总行数和总列数是 $\mathfrak{N}=2\times(2^m-1)$ 的 $\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}$ 矩阵 Γ,将矩阵 Γ 按分块矩阵形式写成 $m\times m$ 分块矩阵:

$$\Gamma=(\Gamma_{(\xi,\zeta)})_{m\times m}$$

详细地，这里需要定义 $m\times m$ 个分块子矩阵 $\Gamma_{(\xi,\zeta)}$，每个 $\Gamma_{(\xi,\zeta)}$ 再次按照 2×2 分块矩阵形式被定义如下：对于 $1\leqslant\xi,\zeta\leqslant m$,

$$\Gamma_{(\xi,\zeta)}=\begin{cases}(\gamma_{(p,q)}^{(\xi)})_{2\times2}, & \xi=\zeta\\ \mathcal{O}_{[2\times2^{m-\xi}]\times[2\times2^{m-\zeta}]}, & \xi\neq\zeta\end{cases}$$

其中，$\xi=1,2,\cdots,m$,

$$(\gamma_{(p,q)}^{(\xi)})_{2\times 2}=\begin{pmatrix}\Gamma_{\xi}^{(1)} & \Gamma_{\xi}^{(2)}\\ \Gamma_{\xi}^{(3)} & \Gamma_{\xi}^{(4)}\end{pmatrix}$$

注释: 按照分块矩阵模式, $\Gamma=(\Gamma_{(\xi,\zeta)})_{m\times m}$ 的第 (ξ,ζ) 分块子矩阵 $\Gamma_{(\xi,\zeta)}$ 实际是一个 $[2\times 2^{m-\xi}]\times[2\times 2^{m-\zeta}]$ 的"长方形矩阵", 当 $\xi\neq\zeta$ 时, $\Gamma_{(\xi,\zeta)}=\mathcal{O}_{[2\times 2^{m-\xi}]\times[2\times 2^{m-\zeta}]}$ 是一个"零长方形矩阵", 行数和列数是 $[2\times 2^{m-\xi}]\times[2\times 2^{m-\zeta}]$, 只有当 $\xi=\zeta$ 时, 分块子矩阵 $\Gamma_{(\xi,\zeta)}$ 才是一个 $[2\times 2^{m-\xi}]\times[2\times 2^{m-\xi}]$ 的"正方形矩阵", 这个正方形 $\Gamma_{(\xi,\zeta)}$ 再次按照 2×2 的分块模式被定义为 $(\gamma_{(p,q)}^{(\xi)})_{2\times 2}$, 其中每个分块子矩阵都是 $2^{m-\xi}\times 2^{m-\xi}$ 正方形矩阵:

$$\begin{aligned}
\gamma_{(1,1)}^{(\xi)}&=\Gamma_{\xi}^{(1)}=(\alpha_{(1,k,k')}^{(\xi)})_{2^{m-\xi}\times 2^{m-\xi}}\\
\gamma_{(1,2)}^{(\xi)}&=\Gamma_{\xi}^{(2)}=(\alpha_{(2,k,k')}^{(\xi)})_{2^{m-\xi}\times 2^{m-\xi}}\\
\gamma_{(2,1)}^{(\xi)}&=\Gamma_{\xi}^{(3)}=(\alpha_{(3,k,k')}^{(\xi)})_{2^{m-\xi}\times 2^{m-\xi}}\\
\gamma_{(2,2)}^{(\xi)}&=\Gamma_{\xi}^{(4)}=(\alpha_{(4,k,k')}^{(\xi)})_{2^{m-\xi}\times 2^{m-\xi}}
\end{aligned}$$

注释: 这个庞大的 $[2\times(2^m-1)]\times[2\times(2^m-1)]$ 矩阵 $\Gamma=(\Gamma_{(\xi,\zeta)})_{m\times m}$ 是按照 $m\times m$ 分块矩阵模式定义的, 它就是线性算子 $T_f(x)$ 核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 的小波域表达形式, 为了简化表达形式, $\Gamma=(\Gamma_{(\xi,\zeta)})_{m\times m}$ 实际上是核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 的冗余小波表达. 建议读者撰写更简练的表达形式, 以便计算机编程时消耗更少的储存单元而且获得更高的计算效率.

在前述分析的基础上, 现在给出线性算子小波快速算法的算法及流程:

❶ 构造获得线性算子 $T_f(x)$ 核函数 $\mathscr{K}(x,y)$ 的"小波算子核矩阵", 即 $[2\times(2^m-1)]\times[2\times(2^m-1)]$ 矩阵 $\Gamma\in\mathbb{R}^{[2\times(2^m-1)]\times[2\times(2^m-1)]}$, 这本质上是线性算子的冗余小波表达;

❷ 对任何信号或函数 $f(x)$, 由采样

$$s_1^{(0)},s_2^{(0)},\cdots,s_{2^m}^{(0)}$$

利用尺度系数和小波系数递归分解公式得到函数或者信号的小波表达式: 构造一个维数是 $\mathfrak{N}=2\times(2^m-1)$ 的列向量 $\mathfrak{f}\in\mathbb{R}^{2\times(2^m-1)}$:

$$\mathfrak{f}=(d_1^{(1)},\cdots,d_{2^{m-1}}^{(1)};s_1^{(1)},\cdots,s_{2^{m-1}}^{(1)};d_1^{(2)},\cdots,d_{2^{m-2}}^{(2)};s_1^{(2)},\cdots,s_{2^{m-2}}^{(2)};\cdots;d_1^{(m)};s_1^{(m)})^{\mathrm{T}}$$

❸ 在小波变换域由矩阵-向量乘积公式计算得到线性算子 $T_f(x)$ 的小波表达向量 $\mathscr{F}$, 即冗余小波表达:

$$\mathscr{F} = \Gamma \mathfrak{f}$$

这样得到的向量 $\mathscr{F} \in \mathbb{R}^{2\times(2^m-1)}$ 是一个 $2\times(2^m-1)$ 维列向量，仿照 $\mathfrak{f} \in \mathbb{R}^{2\times(2^m-1)}$ 的坐标分量结构形式地表示为

$$\mathscr{F} = (D_1^{(1)},\cdots,D_{2^{m-1}}^{(1)};S_1^{(1)},\cdots,S_{2^{m-1}}^{(1)};D_1^{(2)},\cdots,D_{2^{m-2}}^{(2)};S_1^{(2)},\cdots,S_{2^{m-2}}^{(2)};\cdots;D_1^{(m)};S_1^{(m)})^{\mathrm{T}}$$

❹ 定义：对于 $k = 1,2,\cdots,2^{m-j}; j = 1,2,\cdots,m$，

$$\begin{cases} d_k^{(j)} = D_k^{(j)} \\ s_k^{(j)} = S_k^{(j)} \end{cases}$$

由小波合成算法递推得到 $S_n^{(0)}, n = 1,2,\cdots,2^m$，这就是线性积分算子映射象 $(T_f)(x)$ 的有限离散采样数值.

线性算子的这种小波快速算法的运算量级仍是 $O(N)$，但是，这里的实际计算量会比 Haar 小波的更小. 根本原因是矩阵 $\Gamma_j^{(\ell)} = (\alpha_{(\ell,k,k')}^{(j)})_{2^{m-j}\times 2^{m-j}}$ 的近似对角化程度会更好，即当 $k \neq k'$ 时，$\alpha_{(\ell,k,k')}^{(j)}$ 快速变小甚至变为零，即

$$\alpha_{(\ell,k,k')}^{(j)} \to 0 \quad (|k-k'| \to +\infty)$$

在步骤❸的实现过程中，为了加快处理速度，在小波变换域的矩阵-向量乘积 $\mathscr{F} = \Gamma\mathfrak{f}$ 中，把矩阵 $\Gamma \in \mathbb{R}^{[2\times(2^m-1)]\times[2\times(2^m-1)]}$ 中充分小的 $\alpha_{(\ell,k,k')}^{(j)}$ 直接置为 0，这将大量减少矩阵-向量乘积关系式 $\mathscr{F} = \Gamma\mathfrak{f}$ 的计算量.

这就是线性算子小波快速算法理论. 首先，这里给出的是实现线性算子小波快速算法的一种有效途径，针对特定的线性算子 $T_f(x)$ 或者核函数 $\mathscr{K}(x,y)$，选择合适的正交小波可以显著减少实现 $\mathscr{F} = \Gamma\mathfrak{f}$ 的数值计算的计算量；其次，实现线性算子 $T_f(x)$ 的小波快速算法存在大量其他表达形式和有效途径.

8.2　恒分辨率小波和小波包理论

恒分辨率小波理论本质上是一种冗余的多分辨率分析方法，这种利用多分辨率分析小波获得函数或者信号冗余表达的方法主要研究的问题是，给出在各种不同尺度下获得的函数或者信号的统一尺度和分辨率表达公式，它与同维正交小波合成或者同维正交小波包合成理论是不相同的，在离散采样的前提下，后者给出的是信号采样或者向量在线性空间平凡规范正交基下的表示方法，而恒分辨率小波方法能够按照相同的采样率和尺度获得在任意分解和合成步骤也就是多分辨率分析中任意尺度子空间和小波子空间中函数或者信号的冗余表达，从而保证在分解和合成过

程中被处理的数字信号和数字图像以及任何中间处理结果都具有完全相同的分辨率. 在视觉、听觉和各种传感器系统的信息分析和处理中, 如果来自具有不同物理频率信息源的信息或者利用多种信息获取途径和方法得到的来自相同信息源的具有多种物理意义的信息数据需要关联处理或者统一融合, 那么, 这种恒分辨率小波理论将会提供十分便捷的信息分析处理方法和技术.

8.2.1 小波和小波包分辨率倍率

在多分辨率分析理论框架下, 小波和小波包的分解和合成过程永远伴随着分辨率的倍率变化问题. 这里通过回顾多分辨率分析正交小波和小波包的分解合成算法, 说明在分解合成过程中必然出现的分辨率倍率变化给小波理论和小波包理论的某些应用带来不便.

(α) 尺度方程和小波方程的分辨率倍率

如果 $(\{V_j; j\in\mathbb{Z}\}, \varphi(x))$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的一个多分辨率分析, 相应的尺度函数和小波函数分别为 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$, 那么, 尺度方程和小波方程是

$$\begin{cases}\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_n\varphi(2x-n)\\ \psi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n\varphi(2x-n)\end{cases}$$

或者等价地: 对于任意的整数 $(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$,

$$\begin{cases}\varphi_{j,k}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_{n-2k}\varphi_{j+1,n}(x)\\ \psi_{j,k}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2k}\varphi_{j+1,n}(x)\end{cases}$$

而且, 尺度方程和小波方程的系数表示为

$$\begin{aligned}h_n&=\left\langle\varphi(\cdot),\sqrt{2}\varphi(2\cdot-n)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\sqrt{2}\int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x)\overline{\varphi}(2x-n)dx\\ g_n&=\left\langle\psi(\cdot),\sqrt{2}\varphi(2\cdot-n)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\sqrt{2}\int_{x\in\mathbb{R}}\psi(x)\overline{\varphi}(2x-n)dx\end{aligned}$$

它们满足 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|h_n\right|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|g_n\right|^2=1$, 而且 $g_n=(-1)^{1-n}h_{1+2\kappa-n}, n\in\mathbb{Z}$, 其中 κ 是一个固定的整数.

对于任意的整数 $(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, 引入记号:

$$\begin{cases}\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^jx-k)\\ \psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k)\\ \varphi_{j+1,k}(x)=2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-k)\end{cases}$$

那么，三个函数系 $\{\varphi_{j,k}(x);k\in\mathbb{Z}\}$，$\{\psi_{j,k}(x);k\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{\varphi_{j+1,k}(x);k\in\mathbb{Z}\}$ 分别是尺度子空间 V_j、小波子空间 W_j 和尺度子空间 V_{j+1} 的规范正交基. 因此，尺度取为 $s=2^{-j}$ 的尺度方程和小波方程，体现了尺度为 $s=2^{-(j+1)}$ 的尺度空间 V_{j+1} 被正交直和分解为尺度是 $s=2^{-j}$ 的尺度空间与小波空间的正交直和 $V_{j+1}=W_j\oplus V_j$，而且，$\{\varphi_{j,k}(x),\ \psi_{j,k}(x);k\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_{j+1} 的新的规范正交基.

因此，尺度方程和小波方程形式上表现为子空间的正交直和分解，同时本质上体现了分辨率的倍降过程，即尺度子空间被正交直和地分解为两个相互正交的分辨率减半的子空间.

(β) 正交投影的分辨率倍率

在多分辨率分析理论体系下，函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 和尺度子空间列具有如下正交直和分解表示：

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}W_j=V_J\oplus\left(\bigoplus_{j\geqslant J}W_j\right)$$

和

$$V_J=V_{J-1}\oplus W_{J-1}=\bigoplus_{j=1}^{+\infty}W_{J-j}=\bigoplus_{j=-\infty}^{J-1}W_j$$

将 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在 V_j,W_j 上的正交投影记为 $f_j^{(\ell)}(x),\ell=0,1,j\in\mathbb{Z}$，那么，它们具有如下的正交函数项级数表达式：对于 $(j,n,k)\in\mathbb{Z}^3$，

$$\begin{cases}f_{j+1}^{(0)}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}d_{j+1,n}^{(0)}\phi_{j+1,n}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}d_{j+1,n}^{(0)}\mu_{j+1,n}^{(0)}(x)\\ f_j^{(0)}(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}d_{j,k}^{(0)}\phi_{j,k}(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}d_{j,k}^{(0)}\mu_{j,k}^{(0)}(x)\\ f_j^{(1)}(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}d_{j,k}^{(1)}\psi_{j,k}(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}d_{j,k}^{(1)}\mu_{j,k}^{(1)}(x)\end{cases}$$

而且

$$f_{j+1}^{(0)}(x)=f_j^{(0)}(x)+f_j^{(1)}(x)$$

或者

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}d_{j+1,n}^{(0)}\mu_{j+1,n}^{(0)}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_{j,k}^{(0)}\mu_{j,k}^{(0)}(x)+\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_{j,k}^{(1)}\mu_{j,k}^{(1)}(x)$$

其中

$$\begin{cases} d_{j+1,n}^{(0)} = \int_{\mathbb{R}} f_{j+1}^{(0)}(x)\overline{\varphi}_{j+1,k}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi}_{j+1,k}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\mu}_{j+1,n}^{(0)}(x)dx \\ d_{j,k}^{(0)} = \int_{\mathbb{R}} f_{j}^{(0)}(x)\overline{\varphi}_{j,k}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi}_{j,k}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\mu}_{j,k}^{(0)}(x)dx \\ d_{j,k}^{(1)} = \int_{\mathbb{R}} f_{j}^{(1)}(x)\overline{\psi}_{j,k}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi}_{j,k}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\mu}_{j,k}^{(1)}(x)dx \end{cases}$$

从 $f_{j+1}^{(0)}(x), f_j^{(0)}(x), f_j^{(1)}(x)$ 的正交小波和尺度函数级数表达式可以清晰看出，函数或者信号 $f_{j+1}^{(0)}(x)$ 与 $f_j^{(0)}(x), f_j^{(1)}(x)$ 之间的分辨率倍率关系.

(γ) 小波和小波包算法的分辨率倍率

在多分辨率分析理论体系下，$f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在尺度子空间和小波子空间上正交投影的正交函数项级数系数序列 $\{d_{j+1,n}^{(0)};n\in\mathbb{Z}\}$，$\{d_{j,k}^{(0)};k\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{d_{j,k}^{(1)};k\in\mathbb{Z}\}$ 之间的尺度分解和小波分解可以写成

$$\begin{cases} d_{j,k}^{(0)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{h}_{n-2k} d_{j+1,n}^{(0)} \\ d_{j,k}^{(1)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{g}_{n-2k} d_{j+1,n}^{(0)} \end{cases}$$

或者等价地写成

$$d_{j,k}^{(\ell)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{h}_{n-2k}^{(\ell)} d_{j+1,n}^{(0)},\quad \ell=0,1,\quad k\in\mathbb{Z}$$

这就是小波分解算法，其中，$h_n^{(0)}=h_n, h_n^{(1)}=g_n, n\in\mathbb{Z}$.

或者，反过来，函数 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在尺度子空间和小波子空间上正交投影的正交函数项级数系数序列 $\{d_{j+1,n}^{(0)};n\in\mathbb{Z}\}$，$\{d_{j,k}^{(0)};k\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{d_{j,k}^{(1)};k\in\mathbb{Z}\}$ 之间存在如下的合成关系:

$$d_{j+1,n}^{(0)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (h_{n-2k} d_{j,k}^{(0)} + g_{n-2k} d_{j,k}^{(1)}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{\ell=0}^{1} h_{n-2k}^{(\ell)} d_{j,k}^{(\ell)},\quad n\in\mathbb{Z}$$

这就是小波合成算法.

小波和尺度系数序列 $\{d_{j+1,n}^{(0)};n\in\mathbb{Z}\}$ 与 $\{d_{j,k}^{(0)};k\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{d_{j,k}^{(1)};k\in\mathbb{Z}\}$ 之间的分解和合成关系，同样体现分辨率倍率关系，在这个特殊的情况下，主要表现为序列空间被正交直和分解为两个维数减半的正交子空间.

在多分辨率分析小波包理论体系下，函数 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在小波包子空间中的正交投影的正交小波包函数项级数系数序列

$$\{d_{j+1,n}^{(p)}, n\in\mathbb{Z}\}, \{d_{j,k}^{(2p+0)}, k\in\mathbb{Z}\} \text{ 和 } \{d_{j,k}^{(2p+1)}, k\in\mathbb{Z}\}$$

之间的小波包分解可以写成: 对于 $k\in\mathbb{Z}, p=0,1,2,\cdots,$

$$\begin{cases} d_{j,k}^{(2p+0)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{h}_{n-2k}^{(0)} d_{j+1,n}^{(p)} \\ d_{j,k}^{(2p+1)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{h}_{n-2k}^{(1)} d_{j+1,n}^{(p)} \end{cases}$$

或者等价地写成

$$d_{j,k}^{(2p+\ell)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{h}_{n-2k}^{(\ell)} d_{j+1,n}^{(p)},\quad \ell=0,1,\quad k\in\mathbb{Z},\quad p=0,1,2,\cdots$$

其中

$$\begin{cases} d_{j+1,n}^{(p)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\mu}_{p;j+1,n}(x)dx \\ d_{j,k}^{(2p+0)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\mu}_{2p;j,k}(x)dx \\ d_{j,k}^{(2p+1)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\mu}_{2p+1;j,k}(x)dx \end{cases}$$

而且，对于 $k\in\mathbb{Z}, p=0,1,2,\cdots$，

$$\begin{cases} \mu_{2p;j,k}(x) = \sum_{n} h_{n-2k}\mu_{p;j+1,n}(x) \\ \mu_{2p+1;j,k}(x) = \sum_{n} g_{n-2k}\mu_{p;j+1,n}(x) \end{cases}$$

这就是小波包分解算法. 作为这个关系的逆，合成算法表示为

$$d_{j+1,n}^{(p)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (h_{n-2k} d_{j,k}^{(2p+0)} + g_{n-2k} d_{j,k}^{(2p+1)}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\ell=0}^{1} h_{n-2k}^{(\ell)} d_{j,k}^{(2p+\ell)},\quad n\in\mathbb{Z}$$

而且，回顾前述已经多次使用的几个矩阵记号，其中，

$$\mathcal{H} = [h_{n,k} = h_{n-2k}; (n,k)\in\mathbb{Z}^2]_{\infty\times\frac{\infty}{2}} = [\mathbf{h}^{(2k)}; k\in\mathbb{Z}]_{\infty\times\frac{\infty}{2}}$$
$$\mathcal{G} = [g_{n,k} = g_{n-2k}; (n,k)\in\mathbb{Z}^2]_{\infty\times\frac{\infty}{2}} = [\mathbf{g}^{(2k)}; k\in\mathbb{Z}]_{\infty\times\frac{\infty}{2}}$$

和 $\infty\times\infty$ 的分块为 1×2 的矩阵 $\mathcal{A}=(\mathcal{H}|\mathcal{G})$，此外，对于任意非负整数 ℓ,相应的两个 $[2^{-\ell}\infty]\times[2^{-(\ell+1)}\infty]$ 矩阵 $\mathcal{H}_0^{(\ell)},\mathcal{H}_1^{(\ell)}$，一个 $[2^{-\ell}\infty]\times[2^{-\ell}\infty]$ 的分块为 1×2 的矩阵 $\mathcal{A}_{(\ell)}=(\mathcal{H}_0^{(\ell)}|\mathcal{H}_1^{(\ell)})$ 以及它的复数共轭转置矩阵 $\mathcal{A}_{(\ell)}^*$，这时，$[2^{-\ell}\infty]\times[2^{-\ell}\infty]$ 矩阵 $\mathcal{A}_{(\ell)}=(\mathcal{H}_0^{(\ell)}|\mathcal{H}_1^{(\ell)})$ 是酉矩阵. 这样，如果将函数 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在小波包子空间中正交投影正交小波包函数项级数系数序列

$$\{d_{j-\ell+1,n}^{(p)}, n\in\mathbb{Z}\},\ \{d_{j-\ell,k}^{(2p+0)}, k\in\mathbb{Z}\} \text{和} \{d_{j-\ell,k}^{(2p+1)}, k\in\mathbb{Z}\}$$

简记为

$$\begin{cases}\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+1)}=\{d_{j-\ell,k}^{(2p+1)},k\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}},\\ \mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+0)}=\{d_{j-\ell,k}^{(2p+0)},k\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}},\\ \mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(p)}=\{d_{j-\ell+1,n}^{(p)},n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}},\end{cases}$$

那么，小波包分解合成关系可以表示为：对于 $j\in\mathbb{Z},p=0,1,2,\cdots,(2^{\ell}-1),\ell=0,1,2,\cdots$，

$$\left(\frac{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+0)}}{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+1)}}\right)=\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\ell}^{*}\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(p)}=\left(\frac{[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(\ell)}]^{*}}{[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{1}^{(\ell)}]^{*}}\right)\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(p)}=\left(\frac{[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(\ell)}]^{*}\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(p)}}{[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{1}^{(\ell)}]^{*}\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(p)}}\right)$$

而且

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(p)}&=\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\ell}\left(\frac{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+0)}}{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+1)}}\right)\\&=(\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(\ell)}\big|\boldsymbol{\mathcal{H}}_{1}^{(\ell)})\left(\frac{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+0)}}{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+1)}}\right)\\&=\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0}^{(\ell)}\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+0)}+\boldsymbol{\mathcal{H}}_{1}^{(\ell)}\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+1)}\end{aligned}$$

总之，将 $f(x)\in\boldsymbol{\mathcal{L}}^{2}(\mathbb{R})$ 在尺度空间 V_{j+1} 上正交投影的正交小波函数项级数系数序列 $\{d_{j+1,n}^{(0)},n\in\mathbb{Z}\}$ 经过小波分解和小波包分解将产生多个分解序列，比如经过 ℓ 步的分解，将得到 $2^{\ell+1}$ 个分解序列，而每个分解序列的尺寸仅仅只是初始系数序列 $\{d_{j+1,n}^{(0)},n\in\mathbb{Z}\}$ 的 $2^{-(\ell+1)}$，形象地表示为，初始系数序列 $\{d_{j+1,n}^{(0)},n\in\mathbb{Z}\}$ 是 ∞ 维列向量，而第 ℓ 步分解得到的分解序列共有 $2^{\ell+1}$ 个，每个分解序列是 $2^{-(\ell+1)}\infty$ 维的列向量，即在小波分解和小波包分解过程中，随着分解步骤的增加，尺度级别倍增，小波包系数向量的个数倍增，同时，分解序列的尺寸倍减. 合成算法与此相反，每次将两个正交序列合并得到一个维数倍增的序列，相当于两个正交低分辨率序列合并产生一个分辨率倍增的序列. 在有限维向量空间中，这个问题显得更严谨和突出.

实际上，如果多分辨率分析低通滤波器系数序列 $\mathbf{h}_0=\{h_{0,n}=h_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 及带通滤波器系数序列 $\mathbf{h}_1=\{h_{1,n}=g_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 都只有有限项不为零，比如按照此前的假设 $h_{0,0}h_{0,M-1}\neq 0$ 且当 $n<0$ 或 $n>(M-1)$ 时，$h_{0,n}=0$，M 是偶数. 除此之外，由 $h_{1,n}=(-1)^{2\kappa+1-n}\overline{h}_{0,2\kappa+1-n}$，$n\in\mathbb{Z}$ 确定对应的带通滤波器系数序列 $\mathbf{h}_1$，选择整数 κ 满足 $2\kappa=M-2$ 或者 $\kappa=0.5M-1$，这样，带通滤波器系数序列中可能不为 0 的项只有如下 M 个:

$$
\begin{aligned}
h_{1,0} &= (-1)\overline{h}_{0,M-1} \\
h_{1,1} &= (+1)\overline{h}_{0,M-2} \\
h_{1,2} &= (-1)\overline{h}_{0,M-3} \\
h_{1,3} &= (+1)\overline{h}_{0,M-4} \\
&\vdots \\
h_{1,M-2} &= (-1)\overline{h}_{0,1} \\
h_{1,M-1} &= (+1)\overline{h}_{0,0}
\end{aligned}
$$

按照共同的周期长度 $N = 2^{N_0} > M$ 进行周期化，得到 N 维周期化序列：

$$
\mathbf{h}_\ell = \{h_{\ell,0}, h_{\ell,1}, \cdots, h_{\ell,M-2}, h_{\ell,M-1}, h_{\ell,M}, \cdots, h_{\ell,N-1}\}^{\mathrm{T}}, \quad \ell = 0,1
$$

其中 $h_{\ell,M} = \cdots = h_{\ell,N-1} = 0, \ell = 0,1$. 仿照此前方式定义如下符号：对于整数 m,

$$
\mathbf{h}_\ell^{(m)} = \{h_{\ell,\mathrm{mod}(n-m,N)}; n = 0,1,2,\cdots,N-1\}^{\mathrm{T}}, \quad \ell = 0,1
$$

当 $0 \leqslant m,k \leqslant N-1$ 时，成立如下正交关系：

$$
\begin{cases}
\left\langle \mathbf{h}_\ell^{(2m)}, \mathbf{h}_\ell^{(2k)} \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} h_{\ell,\mathrm{mod}(n-2m,N)} \overline{h}_{\ell,\mathrm{mod}(n-2k,N)} = \delta(m-k), \quad \ell = 0,1 \\
\left\langle \mathbf{h}_0^{(2m)}, \mathbf{h}_1^{(2k)} \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} h_{0,\mathrm{mod}(n-2m,N)} \overline{h}_{1,\mathrm{mod}(n-2k,N)} = 0
\end{cases}
$$

引入两个维数是 $N \times [0.5N]$ 的矩阵：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_\ell &= [h_{\ell,n,k} = h_{\ell,\mathrm{mod}(n-2k,N)}; 0 \leqslant n \leqslant N-1, 0 \leqslant k \leqslant 0.5N-1]_{N\times\frac{N}{2}} \\
&= [\mathbf{h}_\ell^{(2k)}; 0 \leqslant k \leqslant 0.5N-1]_{N\times\frac{N}{2}} \\
&= [\mathbf{h}_\ell^{(0)} | \mathbf{h}_\ell^{(2)} | \mathbf{h}_\ell^{(4)} \mathbf{h}_\ell^{(N-2)}], \quad \ell = 0,1
\end{aligned}
$$

和一个 $N \times N$ 的分块为 1×2 的矩阵 $\mathcal{A} = (\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_1)$，那么，

$$
\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \left(\frac{\mathcal{H}_0^*}{\mathcal{H}_1^*}\right)(\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_1) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_0^*\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0^*\mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_1^*\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_1^*\mathcal{H}_1 \end{pmatrix}_{N\times N} = \mathcal{I}
$$

所以，$\mathcal{A} = (\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_1)$ 是一个 $N \times N$ 的酉矩阵.

类似地，对非负整数 ℓ，引入两个 $[2^{-\ell}N] \times [2^{-(\ell+1)}N]$ 矩阵 $\mathcal{H}_0^{(\ell)}, \mathcal{H}_1^{(\ell)}$ 和一个 $[2^{-\ell}N] \times [2^{-\ell}N]$ 矩阵 $\mathcal{A}_{(\ell)} = (\mathcal{H}_0^{(\ell)} \mid \mathcal{H}_1^{(\ell)})$，那么，$\mathcal{A}_{(\ell)} = (\mathcal{H}_0^{(\ell)} \mid \mathcal{H}_1^{(\ell)})$ 也是酉矩阵.

假设信号采样是长度为 N 的有限序列 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\{d_{j+1,n}^{(0)},n=0,1,2,\cdots,(N-1)\}^{\mathrm{T}}$，按照小波分解和小波包分解方法，从尺度级别为 $s=2^{-(j+1)}$ 的尺度系数序列 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 经过 $(2^{(\ell+1)}-1)$ 次完全分解最终获得在尺度级别 $s=2^{-(j-\ell)}$ 上的 $2^{(\ell+1)}$ 个小波包系数向量 $\mathscr{D}_{j-\ell}^{(m)}=\{d_{j-\ell,k}^{(m)},k=0,1,2,\cdots,(2^{-(\ell+1)}N-1)\}^{\mathrm{T}},m=0,1,2,\cdots,(2^{(\ell+1)}-1)$，这些向量的维数是相同的，都是 $2^{-(\ell+1)}N$．对任意非负整数 ℓ，小波包分解算法可以表示为

$$\left(\frac{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2m)}}{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2m+1)}}\right)=\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\ell}^{*}\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(m)}=\left(\frac{[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\ell)}]^*}{[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\ell)}]^*}\right)\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(m)}$$
$$=\left(\frac{[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\ell)}]^*\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(m)}}{[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\ell)}]^*\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(m)}}\right),\quad m=0,1,2,\cdots,(2^{\ell}-1)$$

按照分块矩阵表示为 1×2 的矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(\ell)}=(\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\ell)}\mid\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\ell)})$ 是 $[2^{-\ell}N]\times[2^{-\ell}N]$ 矩阵．这个算法的作用是把尺度级别 $s=2^{-(j-\ell+1)}$ 的全部 2^{ℓ} 个小波包系数向量每个分解为两个尺度级别 $s=2^{-(j-\ell)}$ 上的小波包系数向量，从而得到尺度级别 $s=2^{-(j-\ell)}$ 上的 $2^{\ell+1}$ 个小波包系数向量．即尺度级别倍增，小波包系数向量的个数也倍增，但每个系数向量的维数减半．这个过程伴随着分辨率倍减．

反过来，在尺度级别 $s=2^{-(j-\ell)}$ 上的 $2^{(\ell+1)}$ 个小波包系数向量：

$$\mathscr{D}_{j-\ell}^{(m)}=\{d_{j-\ell,k}^{(m)},k=0,1,2,\cdots,(2^{-(\ell+1)}N-1)\}^{\mathrm{T}},$$
$$m=0,1,2,\cdots,(2^{(\ell+1)}-1)$$

经小波包合成算法计算得到尺度级别 $s=2^{-(j-\ell+1)}$ 上的 2^{ℓ} 个小波包系数向量

$$\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(m)}=\{d_{j-\ell+1,k}^{(m)},k=0,1,2,\cdots,(2^{-\ell}N-1)\}^{\mathrm{T}},$$
$$m=0,1,2,\cdots,(2^{\ell}-1)$$

详细计算公式和过程是：对于 $m=0,1,2,\cdots,(2^{\ell}-1)$，

$$\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(m)}=\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\ell}\left(\frac{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2m)}}{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2m+1)}}\right)$$
$$=(\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\ell)}\mid\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\ell)})\left(\frac{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2m)}}{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2m+1)}}\right)$$
$$=\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(\ell)}\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2m)}+\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(\ell)}\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2m+1)}$$

这个小波包合成算法的作用是，将尺度级别 $s=2^{-(j-\ell)}$ 上的 $2^{\ell+1}$ 个小波包系数向量合并得到尺度级别 $s=2^{-(j-\ell+1)}$ 的 2^{ℓ} 个小波包系数向量．即尺度级别减半，小波包

系数向量个数也减半, 但每个向量的尺寸倍增, 即向量维数倍增.

总之, 小波分解和小波包分解总是伴随着分辨率的倍减; 而小波合成和小波包合成总是伴随着分辨率倍增.

(δ) 金字塔算法的分辨率倍率

沿用前述矩阵记号和向量记号, 当 $\ell=0,1,\cdots,L$ 时, 小波包分解算法最终汇聚为金字塔算法, 具体计算公式表示为

$$\begin{pmatrix} \mathscr{D}_{j-L}^{(0)} \\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-2)} \\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(L-1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(L)}\right]^* \\ \hline \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(L-1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(L)}\right]^* \\ \hline \vdots \\ \hline \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(0)}\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(L-1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(L)}\right]^* \\ \hline \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(0)}\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(L-1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(L)}\right]^* \end{pmatrix} \mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$$

或者等价地, 将 $\ell=0,1,\cdots,L$ 的结果集中表示为

$$\begin{pmatrix} \mathscr{D}_{j-L}^{(0)} \\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-2)} \\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(L)}\right]^*\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(L-1)}\right]^*\cdots\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}\right]^* \\ \hline \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(L)}\right]^*\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(L-1)}\right]^*\cdots\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(0)}\right]^* \\ \hline \vdots \\ \hline \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{(L)}\right]^*\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(L-1)}\right]^*\cdots\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(0)}\right]^* \\ \hline \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(L)}\right]^*\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(L-1)}\right]^*\cdots\left[\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{(0)}\right]^* \end{pmatrix} \mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$$

对于 $\ell=L$ 时的 2^{L+1} 个小波包系数向量 $\mathscr{D}_{j-L}^{(m)}, m=0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$, 将标志小波包级别的 m 写成 $(L+1)$ 位的二进制形式:

$$\begin{aligned} m &= \sum_{\ell=0}^{L}\varepsilon_\ell\times 2^\ell = (\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \\ &= \varepsilon_L\times 2^L+\varepsilon_{L-1}\times 2^{L-1}+\cdots+\varepsilon_2\times 2^2+\varepsilon_1\times 2+\varepsilon_0 \end{aligned}$$

其中, $\varepsilon_\ell\in\{0,\ 1\}$, $\ell=0,1,\cdots,L$. 那么, 当 $m=0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$ 时,

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{j-L}^{(m)} &= [\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(L)}]^*[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(L-1)}]^*\cdots[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_{L-1}}^{(1)}]^*[\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_L}^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \\ &= [\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_L}^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_{L-1}}^{(1)}\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(L-1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(L)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}, \end{aligned}$$

集中用分块矩阵形式写成 $2^{L+1}\times 1$ 分块的表达式:

$$\left(\begin{array}{c}\mathscr{D}_{j-L}^{(0)}\\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(1)}\\ \hline \vdots\\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-2)}\\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-1)}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\mathscr{D}_{j-L}^{(00\ldots00)_2}\\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(00\ldots01)_2}\\ \hline \vdots\\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(11\ldots10)_2}\\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(11\ldots11)_2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\left[\mathcal{H}_0^{(0)}\cdots\mathcal{H}_0^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\right]^*\\ \hline \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\cdots\mathcal{H}_0^{(L-1)}\mathcal{H}_1^{(L)}\right]^*\\ \hline \vdots\\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(0)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\right]^*\\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(0)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_1^{(L)}\right]^*\end{array}\right)\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$$

其中按照行方式分块的列向量和只按照行方式分块的分块矩阵都被分为 2^{L+1} 个小分块，每个小分块的行数都是 $2^{-(L+1)}N$.

另外，矩阵 $\mathcal{H}_{\varepsilon_{L-\ell}}^{(\ell)}$ 的行数和列数分别是 $[2^{-\ell}N]\times[2^{-(\ell+1)}N], \ell=0,1,2,\cdots,L$. 因此，$\mathcal{H}_{\varepsilon_L}^{(0)}\mathcal{H}_{\varepsilon_{L-1}}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(L-1)}\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(L)}$ 是 $N\times[2^{-(L+1)}N]$ 矩阵.

反过来，从上述 2^{L+1} 个小波包系数向量 $\mathscr{D}_{j-L}^{(m)}, m=0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$ 合成得到 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 的金字塔合成算法可以统一格式表示为

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\sum_{m=(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=0}^{(2^{(L+1)}-1)}\mathcal{H}_{\varepsilon_L}^{(0)}\mathcal{H}_{\varepsilon_{L-1}}^{(1)}\cdots\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(L-1)}\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(L)}\mathscr{D}_{j-L}^{(m)}$$

其中，

$$m=(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=\varepsilon_L\times2^L+\varepsilon_{L-1}\times2^{L-1}+\cdots+\varepsilon_1\times2+\varepsilon_0$$

是非负整数 m 的 $(L+1)$ 位二进制表示，其取值范围是 $m=0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$.

形式化地，从 2^{L+1} 个小波包系数向量 $\mathscr{D}_{j-L}^{(m)}, m=0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$ 合成得到的 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 的小波包金字塔合成算法也可以表示为矩阵-向量乘积形式:

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\left(\begin{array}{c}\left[\mathcal{H}_0^{(0)}\cdots\mathcal{H}_0^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\right]^*\\ \hline \left[\mathcal{H}_0^{(0)}\cdots\mathcal{H}_0^{(L-1)}\mathcal{H}_1^{(L)}\right]^*\\ \hline \vdots\\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(0)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_0^{(L)}\right]^*\\ \hline \left[\mathcal{H}_1^{(0)}\cdots\mathcal{H}_1^{(L-1)}\mathcal{H}_1^{(L)}\right]^*\end{array}\right)^*\left(\begin{array}{c}\mathscr{D}_{j-L}^{(0)}\\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(1)}\\ \hline \vdots\\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-2)}\\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-1)}\end{array}\right)$$

为了进一步简化表达形式，引入矩阵记号：对于 $m=0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$，如果它的 $(L+1)$ 位二进制表示是

$$m = (\varepsilon_L \varepsilon_{L-1} \cdots \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0)_2 = \varepsilon_L \times 2^L + \varepsilon_{L-1} \times 2^{L-1} + \cdots + \varepsilon_1 \times 2 + \varepsilon_0$$

定义 $N \times [2^{-(L+1)}N]$ 矩阵 $\mathcal{R}_m$ 如下:

$$\mathcal{R}_m = \mathcal{R}_{(\varepsilon_L \varepsilon_{L-1} \cdots \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0)_2} = \mathcal{H}_{\varepsilon_L}^{(0)} \mathcal{H}_{\varepsilon_{L-1}}^{(1)} \cdots \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(L-1)} \mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(L)} = \left[\prod_{\ell=L}^{0} \mathcal{H}_{\varepsilon_\ell}^{(L-\ell)} \right]$$

这样, 小波包金字塔合成算法可以改写为集中形式:

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} &= (\mathcal{R}_0 \mid \mathcal{R}_1 \mid \cdots \mid \mathcal{R}_{(2^{(L+1)}-2)} \mid \mathcal{R}_{(2^{(L+1)}-1)}) \left(\begin{array}{c} \mathscr{D}_{j-L}^{(0)} \\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-2)} \\ \hline \mathscr{D}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-1)} \end{array} \right) \\
&= [\mathcal{R}_0] \mathscr{D}_{j-L}^{(0)} + [\mathcal{R}_1] \mathscr{D}_{j-L}^{(1)} + \cdots + [\mathcal{R}_{(2^{(L+1)}-1)}] \mathscr{D}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-1)}
\end{aligned}$$

或者写成更紧凑的有限项向量和形式:

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} &= \sum_{m=(\varepsilon_L \varepsilon_{L-1} \cdots \varepsilon_1 \varepsilon_0)_2=0}^{(2^{(L+1)}-1)} \mathcal{H}_{\varepsilon_L}^{(0)} \mathcal{H}_{\varepsilon_{L-1}}^{(1)} \cdots \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(L-1)} \mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(L)} \mathscr{D}_{j-L}^{(m)} \\
&= \sum_{\substack{(\varepsilon_L \varepsilon_{L-1} \cdots \varepsilon_1 \varepsilon_0)_2 \\ \varepsilon_k \in \{0,1\}, k=0,1,\cdots,L}} \mathcal{R}_{(\varepsilon_L \varepsilon_{L-1} \cdots \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0)_2} \mathscr{D}_{j-L}^{(\varepsilon_L \varepsilon_{L-1} \cdots \varepsilon_1 \varepsilon_0)_2} \\
&= \sum_{m=0}^{(2^{(L+1)}-1)} \mathcal{R}_m \mathscr{D}_{j-L}^{(m)}.
\end{aligned}$$

设 $(L+1)$ 位二进制表示 $m = (\varepsilon_L \varepsilon_{L-1} \cdots \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0)_2 = 0, 1, 2, \cdots, (2^{(L+1)} - 1)$, 定义 N 维列向量记号:

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_{j-L}^{(m)} &= \mathcal{H}_{\varepsilon_L}^{(0)} \mathcal{H}_{\varepsilon_{L-1}}^{(1)} \cdots \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{(L-1)} \mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{(L)} \mathscr{D}_{j-L}^{(\varepsilon_L \varepsilon_{L-1} \cdots \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0)_2} \\
&= \mathcal{R}_{(\varepsilon_L \varepsilon_{L-1} \cdots \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0)_2} \mathscr{D}_{j-L}^{(\varepsilon_L \varepsilon_{L-1} \cdots \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0)_2} \\
&= \mathcal{R}_m \mathscr{D}_{j-L}^{(m)}
\end{aligned}$$

或者更详细地写成

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_{j-L}^{(00\cdots00)_2} &= \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} \cdots \mathcal{H}_0^{(L-1)} \mathcal{H}_0^{(L)} \mathscr{D}_{j-L}^{(00\cdots00)_2} = \mathcal{R}_0 \mathscr{D}_{j-L}^{(0)} \\
\mathscr{R}_{j-L}^{(00\cdots01)_2} &= \mathcal{H}_0^{(0)} \mathcal{H}_0^{(1)} \cdots \mathcal{H}_0^{(L-1)} \mathcal{H}_1^{(L)} \mathscr{D}_{j-L}^{(00\cdots01)_2} = \mathcal{R}_1 \mathscr{D}_{j-L}^{(1)} \\
&\vdots \\
\mathscr{R}_{j-L}^{(11\cdots10)_2} &= \mathcal{H}_1^{(0)} \mathcal{H}_1^{(1)} \cdots \mathcal{H}_1^{(L-1)} \mathcal{H}_0^{(L)} \mathscr{D}_{j-L}^{(11\cdots10)_2} = \mathcal{R}_{(2^{(L+1)}-2)} \mathscr{D}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-2)} \\
\mathscr{R}_{j-L}^{(11\cdots11)_2} &= \mathcal{H}_1^{(0)} \mathcal{H}_1^{(1)} \cdots \mathcal{H}_1^{(L-1)} \mathcal{H}_1^{(L)} \mathscr{D}_{j-L}^{(11\cdots11)_2} = \mathcal{R}_{(2^{(L+1)}-1)} \mathscr{D}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-1)}
\end{aligned}$$

那么，从 2^{L+1} 个小波包系数向量 $\mathscr{D}_{j-L}^{(m)}, m=0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$ 合成得到的 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 的小波包金字塔合成法可以表示为 2^{L+1} 个同维列向量的代数和形式：

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = \mathscr{R}_{j-L}^{(0)} + \mathscr{R}_{j-L}^{(1)} + \cdots + \mathscr{R}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-2)} + \mathscr{R}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-1)}$$

不仅如此，在小波包金字塔合成金字塔算法如下表示中：

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} &= \sum_{m=0}^{(2^{(L+1)}-1)} \boldsymbol{\mathcal{R}}_m \mathscr{D}_{j-L}^{(m)} = \sum_{m=(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=0}^{(2^{(L+1)}-1)} \mathscr{R}_{j-L}^{(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} \\ &= \sum_{\substack{(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 \\ \varepsilon_k\in\{0,1\},k=0,1,\cdots,L}} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} \mathscr{D}_{j-L}^{(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}\end{aligned}$$

包含的 2^{L+1} 个向量构成的无穷维列向量组：

$$\{\mathscr{R}_{j-L}^{(0)}, \mathscr{R}_{j-L}^{(1)}, \cdots, \mathscr{R}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-2)}, \mathscr{R}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-1)}\} = \{\mathscr{R}_{j-L}^{(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2}; \varepsilon_k \in \{0,1\}, 0 \leqslant k \leqslant L\}$$

在无穷维序列向量空间 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中是相互正交的，即

$$\left\langle \mathscr{R}_{j-L}^{(m)}, \mathscr{R}_{j-L}^{(\ell)} \right\rangle = 0, \quad 0 \leqslant \ell \neq m \leqslant (2^{(L+1)}-1)$$

因此，如下形式的小波包金字塔合成算法：

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} &= \sum_{m=0}^{(2^{(L+1)}-1)} \boldsymbol{\mathcal{R}}_m \mathscr{D}_{j-L}^{(m)} \\ &= \sum_{m=(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2=0}^{(2^{(L+1)}-1)} \mathscr{R}_{j-L}^{(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} \\ &= \sum_{m=0}^{(2^{(L+1)}-1)} \mathscr{R}_{j-L}^{(m)}\end{aligned}$$

实际上是一种“勾股定理”分解，即成立如下恒等式：

$$\left\| \mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 = \sum_{m=0}^{(2^{(L+1)}-1)} \left\| \mathscr{R}_{j-L}^{(m)} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2$$

而且，根据无穷维序列空间 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中“欧氏范数(距离)”的定义，这些向量的欧氏长度可以表示为

$$\begin{aligned}\left\| \mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} | d_{j+1,n}^{(0)} |^2 \\ \left\| \mathscr{R}_{j-L}^{(m)} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} | d_{j-L,k}^{(m)} |^2, \quad m = 0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)\end{aligned}$$

为了准确表达这些向量的坐标所依据的规范正交基，先按 $(L+1)$ 位二进制表

示方法将 $m = 0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$ 表示如下:

$$m = (\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0)_2 = \varepsilon_L \times 2^L + \varepsilon_{L-1} \times 2^{L-1} + \cdots + \varepsilon_1 \times 2 + \varepsilon_0$$

之后将下述定义的 $N \times [2^{-(L+1)}N]$ 矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_m$:

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_m = \boldsymbol{\mathcal{R}}_{(\varepsilon_L\varepsilon_{L-1}\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0)_2} = \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_L}^{(0)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_{L-1}}^{(1)}\cdots\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}^{(L-1)}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_0}^{(L)} = \left[\prod_{\ell=L}^{0}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\varepsilon_\ell}^{(L-\ell)}\right]$$

按照列向量方式重新表述为

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_m = [\mathbf{r}(m,k); k = 0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)]_{N\times[2^{-(L+1)}N]}$$

那么, 当 $m = 0,1,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$ 时, 这些矩阵的全部列向量构成的向量系:

$$\begin{aligned}&\{\mathbf{r}(m,k);\quad k = 0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1), m = 0,1,\cdots,(2^{L+1}-1)\}\\ &= \bigcup_{m=0}^{(2^{L+1}-1)}\{\mathbf{r}(m,k); k = 0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)\}\end{aligned}$$

是 N 维序列空间 $\mathbb{C}^N$ 的规范正交基.

注释: 当 $m = 0,1,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$ 时, $\{\mathbf{r}(m,k); k = 0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)\}$ 是规范正交向量系; 当 $n = 0,1,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$ 而且 $n \neq m$ 时, 如下两个向量系正交:

$$\{\mathbf{r}(m,k); k = 0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1])\},\quad \{\mathbf{r}(n,k); k = 0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)\}$$

即

$$\{\mathbf{r}(m,k); k = 0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1])\} \perp \{\mathbf{r}(n,k); k = 0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)\}$$

另外, $\{\mathbf{r}(m,k); k = 0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1]); 0 \leqslant m \leqslant (2^{L+1}-1)\}$ 是完全规范正交系.

定义子空间序列记号如下: 当 $m = 0,1,2,\cdots,(2^{L+1}-1)$ 时,

$$\mathscr{U}_L^m = \text{Closespan}\{\mathbf{r}(m,k); k = 0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)\}$$

显然, $\{\mathscr{U}_L^m; m = 0,1,2,\cdots,(2^{L+1}-1)\}$ 是 N 维序列空间 $\mathbb{C}^N$ 中相互正交的子空间序列, 而且, $\mathbb{C}^N = \left[\bigoplus_{m=0}^{(2^{L+1}-1)}\mathscr{U}_L^m\right]$.

利用前述这些分析和讨论知, $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 在 $\mathbb{C}^N$ 的如下子空间序列:

$$\mathscr{U}_L^m; m = 0,1,2,\cdots,(2^{L+1}-1)$$

上的正交投影:

$$\mathscr{R}_{j-L}^{(0)}, \mathscr{R}_{j-L}^{(1)}, \cdots, \mathscr{R}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-2)}, \mathscr{R}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-1)}$$

在序列空间 $\mathbb{C}^N$ 的新规范正交基:

$$\bigcup_{m=0}^{(2^{L+1}-1)} \{\mathbf{r}(m,k); k=0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)\}$$

之下的坐标分别是

$$\mathscr{D}_{j-L}^{(m)} = \{d_{j-L,k}^{(m)}; k=0,1,\cdots,[2^{-(L+1)}N-1]\}^{\mathrm{T}}, \quad m=0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$$

此时, $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 的坐标是

$$\{d_{j-L,k}^{(m)}; k=0,1,\cdots,[2^{-(L+1)}N-1], m=0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)\}^{\mathrm{T}}$$

或者表示为

$$\{[\mathscr{D}_{j-L}^{(m)}]^{\mathrm{T}}; m=0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)\}^{\mathrm{T}}$$

辨析性注释: 在向量空间 $\mathbb{C}^N$ 的平凡规范正交基 $\{e_k; k=0,1,\cdots,N-1\}$ 中, 对于任意的整数 $k=0,1,\cdots,N-1$, e_k 表示第 k 行元素等于 1 而且其他各行元素都是 0 的 N 维列向量. 作为原始数据出现的 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 实际是在向量空间 $\mathbb{C}^N$ 的平凡规范正交基 $\{e_k; k=0,1,\cdots,N-1\}$ 之下给出的. 在向量空间 $\mathbb{C}^N$ 的规范正交基:

$$\bigcup_{m=0}^{(2^{L+1}-1)} \{\mathbf{r}(m,k); k=0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)\}$$

之下, 从形式上看, 对于 $m=0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$,

$$\mathscr{D}_{j-L}^{(m)} = \{d_{j-L,k}^{(m)}; k=0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)\}^{\mathrm{T}}$$

的坐标分量只有 $2^{-(L+1)}N$ 个, 但它本质上应该是 N 个分量, 只不过, 其他分量都是 0. 这里所罗列出的分量 $d_{j-L,k}^{(m)}; k=0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)$ 是 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 在子空间

$$\mathscr{U}_L^m = \mathrm{Closespan}\{\mathbf{r}(m,k); k=0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)\}$$

上正交投影相对于规范正交系 $\{\mathbf{r}(m,k); k=0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)\}$ 的坐标, 而这个正交投影在规范正交系:

$$\bigcup_{n=0,n\neq m}^{(2^{L+1}-1)} \{\mathbf{r}(n,k); k=0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)\}$$

下的坐标全部都是 0. 此外, 这也是最重要的, 在向量空间 $\mathbb{C}^N$ 的平凡规范正交基 $\{e_k; k=0,1,\cdots,N-1\}$ 之下, $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 在子空间

$$\mathscr{U}_L^m = \text{Closespan}\{\mathbf{r}(m,k); k = 0,1,\cdots,(2^{-(L+1)}N-1)\}$$

上的正交投影

$$\mathscr{D}_{j-L}^{(m)},\quad m = 0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$$

的坐标正好是

$$\mathscr{R}_{j-L}^{(0)},\mathscr{R}_{j-L}^{(1)},\cdots,\mathscr{R}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-2)},\mathscr{R}_{j-L}^{(2^{(L+1)}-1)}$$

总结这些讨论结果可得，小波包金字塔分解过程总是伴随着分辨率多次倍率降低，当完成第 L 步骤的完全小波包金字塔分解时，由此产生的 $2^{(L+1)}$ 个维数是 $2^{-(L+1)}N$ 的向量 $\mathscr{D}_{j-L}^{(m)}, m = 0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$ 的分辨率，只是原始分辨率的 L 次减半的结果，即为原始分辨率除以 $2^{(L+1)}$；反过来，小波包金字塔合成算法作为这个过程的逆，把 $2^{(L+1)}$ 个维数同为 $2^{-(L+1)}N$ 的向量系 $\mathscr{D}_{j-L}^{(m)}, m = 0,1,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$ 按照分辨率倍增的方式合成得到原始向量 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$，分辨率增长了 $2^{(L+1)}$ 倍. 只有在如下形式的小波包金字塔合成公式中:

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = \sum_{m=0}^{(2^{(L+1)}-1)} \mathscr{R}_{j-L}^{(m)}$$

这些向量才保持维数不变，它们同为 $N = 2^{m_0}$ 维的向量. 因此，在小波包金字塔算法实现过程中，仍然存在分辨率倍率变化的问题.

(ε) 信号分解合成的分辨率倍率

在小波分解、小波包分解和小波包金字塔分解过程中，当分解过程到达尺度级别 $s = 2^{-(j-L+1)}$ 时，全部小波包级别 $m = 0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$ 的小波包分解向量的尺寸都是 $2^{-(L+1)}N$, 当假设初始采样点数 $N = 2^{m_0}$ 时，只要 $L = m_0 - 1$，那么，$\mathscr{D}_{j-L}^{(m)}, m = 0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$ 中每个向量的尺寸（维数）都是 1，以这 $\mathscr{D}_{j-L}^{(m)}, m = 0,1,2,\cdots,(2^{(L+1)}-1)$ 作为分析对象的任何方法，都无法开展有效的研究工作. 但是，在多分辨率分析的理论框架下，这些形式上只有 1 个数据的对象本质上应该是原始数据采集对象在不同分辨率下的刻画结果，只不过在各自采样使用的规范正交基下采样间隔或者采样尺度已经达到或者超过原始采样时间跨度或者空间跨度的两倍，从而采样时只保留采样时间(空间)起点上的采样值，其余的采样点已经超出原始采样时间(空间)的最大范围. 在这样的情形下，有时候单一采样点或者极少数采样点的采样数值在进一步的分析中无法得到合理的结果. 这个困难是小波分解、小波包分解和小波包金字塔分解方法在有限采样数据分析时内在的固有困难.

这个问题的解决途径之一是小波合成或小波包合成方法，即在小波合成或小波包合成算法基础上，将原始采样数据向量表示成多个相互正交的同维向量代数和，其中每个向量的尺寸与原始分析数据列相同. 这解决了数据个数太少造成的问题. 但是，这样丧失了充分利用小波基和小波包基优势的机会. 这种解决途径的典型代表就是前述详细讨论过的小波合成、小波链合成、小波包合成和小波包金字塔合成体现的多分辨率分析正交小波和小波包合成理论体系.

这个问题的另一个解决途径是建立尺度空间或者小波空间或者小波包空间的"带有冗余的基"即框架，使原始数据向量在每次分解时产生尺寸相同的分解向量，以便保证进一步数据分析需要的数据个数满足要求. 当然，可以预料，这样必然牺牲这些分解向量之间的正交性.

下面将研究的恒分辨率小波分解和恒分辨率小波包分解理论就是一种具体的保持分解向量维数不降低的数据向量分解方法.

8.2.2 恒分辨率小波理论

这里将在多分辨率分析基础上，利用半单位移动尺度方程和小波方程建立恒分辨率小波理论.

(α) *半尺度移动分解*

在多分辨率分析的理论体系下，利用尺度方程和小波方程中的低通滤波器系数序列和带通滤波器系数序列构造矩阵序列 $\mathcal{A}_{(\ell)}=(\mathcal{H}_0^{(\ell)}\mid\mathcal{H}_1^{(\ell)}),\ell\in\mathbb{N}$，沿用以前的无穷序列列向量记号，将函数 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在小波包子空间下的正交投影的正交小波包函数项级数系数序列 $\{d_{j-\ell+1,n}^{(p)},n\in\mathbb{Z}\}$，$\{d_{j-\ell,k}^{(2p+0)},k\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{d_{j-\ell,k}^{(2p+1)},k\in\mathbb{Z}\}$ 表示如下：

$$\begin{cases}\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+1)}=\{d_{j-\ell,k}^{(2p+1)},k\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\\ \mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+0)}=\{d_{j-\ell,k}^{(2p+0)},k\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\\ \mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(p)}=\{d_{j-\ell+1,n}^{(p)},n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

其中，$(j,n,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},p=0,1,2,\cdots,(2^\ell-1),\ell=0,1,2,\cdots,$

$$\begin{cases}d_{j-\ell+1,n}^{(p)}=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\mu}_{j-\ell+1,n}^{(p)}(x)dx\\ d_{j-\ell,k}^{(2p+0)}=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\mu}_{j-\ell,k}^{(2p+0)}(x)dx\\ d_{j-\ell,k}^{(2p+1)}=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\mu}_{j-\ell,k}^{(2p+1)}(x)dx\end{cases}$$

此外，小波包函数系表示为：对于任意的 $k\in\mathbb{Z},p=0,1,2,\cdots,$

$$\begin{cases}\mu_{j,k}^{(2p+0)}(x)=\sum\limits_{n} h_{n-2k}\mu_{j+1,n}^{(p)}(x)\\ \mu_{j,k}^{(2p+1)}(x)=\sum\limits_{n} g_{n-2k}\mu_{j+1,n}^{(p)}(x)\end{cases}$$

这样，函数 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在小波包子空间下正交投影的小波包函数项级数系数序列的小波包分解关系可以写成：对于 $j\in\mathbb{Z}, p=0,1,2,\cdots,(2^\ell-1),\ell=0,1,2,\cdots$,

$$\left(\frac{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+0)}}{\mathscr{D}_{j-\ell}^{(2p+1)}}\right)=\mathcal{A}_\ell^*\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(p)}=\left(\frac{[\mathcal{H}_0^{(\ell)}]^*}{[\mathcal{H}_1^{(\ell)}]^*}\right)\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(p)}=\left(\frac{[\mathcal{H}_0^{(\ell)}]^*\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(p)}}{[\mathcal{H}_1^{(\ell)}]^*\mathscr{D}_{j-\ell+1}^{(p)}}\right)$$

按照分块矩阵表示为 1×2 的矩阵 $\mathcal{A}_{(\ell)}=(\mathcal{H}_0^{(\ell)}\mid\mathcal{H}_1^{(\ell)})$ 是 $[2^{-\ell}N]\times[2^{-\ell}N]$ 矩阵．这个算法的作用是把尺度级别 $s=2^{-(j-\ell+1)}$ 的全部 2^ℓ 个小波包系数向量每个分解为两个尺度级别 $s=2^{-(j-\ell)}$ 上的小波包系数向量，从而产生尺度级别 $s=2^{-(j-\ell)}$ 上的 $2^{\ell+1}$ 个小波包系数向量．即尺度级别倍增，小波包系数向量的个数也倍增，但是分解向量的尺寸减半，即分辨率减半．

这里详细研究这种分解过程与小波包子空间规范正交基选择的关系．具体地，当 $\ell=0$ 时，若 $p=0$，则小波包分解关系写成

$$\left(\frac{\mathscr{D}_{j}^{(0)}}{\mathscr{D}_{j}^{(1)}}\right)=\mathcal{A}_0^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\left(\frac{[\mathcal{H}_0^{(0)}]^*}{[\mathcal{H}_1^{(0)}]^*}\right)\mathscr{D}_{j+1}^{(p)}=\left(\frac{[\mathcal{H}_0^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}}{[\mathcal{H}_1^{(0)}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}}\right)$$

其中，等式左边的列向量用分块形式表示为两个 $N/2$ 维列向量 $\mathscr{D}_j^{(0)},\mathscr{D}_j^{(1)}$，等式右边的变换矩阵 $\mathcal{A}_0^*$ 用分块形式表示为上下两块，而且每块 $[\mathcal{H}_0^{(0)}]^*,[\mathcal{H}_1^{(0)}]^*$ 都是 $(N/2)\times N$ 的长方形矩阵．这里变换矩阵 $\mathcal{A}_0^*$ 是酉矩阵．$N/2$ 维列向量 $\mathscr{D}_j^{(0)},\mathscr{D}_j^{(1)}$ 分别是与 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 对应的尺度子空间(类似尺度子空间的小波包子空间)和小波子空间(类似小波子空间的小波包子空间)的信号投影向量的坐标，在连续变量形式下，它们分别是信号投影在基 $\mu_{j,m}^{(0)}(x),\mu_{j,m}^{(1)}(x),\mu_{j+1,n}^{(0)}(x),(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ 下的坐标，或级数展开表达式中的组合系数，在离散形式下，它们分别是 N 维列向量 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 在 $[\mathcal{H}_0^{(0)}]^*,[\mathcal{H}_1^{(0)}]^*$ 的行向量构成的有限维(N 维)空间基(规范正交基)下的坐标分量，或写成这些基向量线性组合形式中的组合系数，由于 $[\mathcal{H}_0^{(0)}]^*,[\mathcal{H}_1^{(0)}]^*$ 的行向量各自张成不同但相互正交的两个子空间，这两个子空间的维数都是 $N/2$．但如果把 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 看成一个时间信号的采样序列，这时 $\mathscr{D}_j^{(0)},\mathscr{D}_j^{(1)}$ 从时间跨度来说，应该是与 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 相同的，只不过，$\mathscr{D}_j^{(0)},\mathscr{D}_j^{(1)}$ 的采样间隔变成 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 采样间隔的两倍，从而，

导致采样点数只是原始序列的一半. 当然, 由于 $\mathcal{A}_0^*$ 是酉矩阵(或正交矩阵), $\mathscr{D}_j^{(0)},\mathscr{D}_j^{(1)}$ 共同联合构成的向量是 N 维的, 而且, 这个联合 N 维或 N 点数据序列与 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 具有相同的信息量, 只不过从时间采样率来说, $\mathscr{D}_j^{(0)},\mathscr{D}_j^{(1)}$ 都是 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 采样率的一半. 这样, 在进行信号的直观分析时, 产生了一个新的问题: 随着小波分解和小波包分解级别的不断增加, $N=2^{m_0}$ 维的原始采样数据列 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 分别被分解成 2 个维数为 $N/2=2^{m_0-1}$ 维的采样间隔是原始采样间隔 2 倍的重采样数据列(第 1 级小波包分解); 接着被分解为 4 个维数是 $N/4=2^{m_0-2}$ 维的采样间隔是原始采样间隔 4 倍的重采样数据列(第 2 级小波包分解); 在进行第 m_0 级小波包分解之后, 原始的 $N=2^{m_0}$ 维的原始采样数据列将被分解为 2^{m_0} 个每个采样间隔都是全时间跨度的每个序列却只有 1 个数据的重采样数据列. 在这样的分解规则下, 最后得到了 2^{m_0} 个序列. 每个的时间跨度都与原始采样数据列的跨度相同, 但每个新序列都只有一个数据! 直观效果就是 2^{m_0} 个在全时间跨度范围内的水平线, 实际情况肯定不是这样!

在多分辨率分析的理论体系下, 考虑尺度方程和小波方程

$$\begin{cases}2^{j/2}\varphi(2^j x-m)=\sum\limits_n h_{n-2m}\times 2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-n)\\ 2^{j/2}\psi(2^j x-m)=\sum\limits_n g_{n-2m}\times 2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-n)\end{cases}$$

取 $x=x_1-2^{-(j+1)}$, 则上式变为

$$2^{j/2}\varphi(2^j x_1-0.5-m)=\sum_n h_{n-2m}\times 2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x_1-(n+1))$$

或者

$$2^{j/2}\varphi(2^j x_1-0.5(2m+1))=\sum_n h_{n-(2m+1)}\times 2^{(j+1)/2}\varphi^*(2^{j+1}x_1-n)$$

同理,

$$2^{j/2}\psi(2^j x_1-0.5(2m+1))=\sum_n g_{n-(2m+1)}\times 2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x_1-n),\quad m\in\mathbb{Z}$$

引入记号: 对于 $m\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{h}}_0^{(0)}=\tilde{h}^{(0)}=\{\tilde{h}_{n_1}^{(0)}=h_{n_1-1};n_1\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\\ \tilde{\mathbf{h}}_0^{(m)}=\tilde{h}^{(m)}=\{\tilde{h}_{n_1}^{(m)}=h_{n_1-(2m+1)};n_1\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\\ \tilde{\mathbf{h}}_1^{(0)}=\tilde{g}(0)=\{\tilde{g}_{n_1}^{(0)}=g_{n_1-1};n_1\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\\ \tilde{\mathbf{h}}_1^{(m)}=\tilde{g}^{(m)}=\{\tilde{g}_{n_1}^{(m)}=g_{n_1-(2m+1)};n_1\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

或者集中表示为: 对于 $m \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{\mathbf{h}}_\ell^{(m)} = \{h_{\ell,n-(2m+1)}; n \in \mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}, \quad \ell = 0,1$$

那么, 由多分辨率分析可知, 对于 $(m,k) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\left\langle \tilde{h}^{(m)}, \tilde{h}^{(k)} \right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \delta(m-k), \quad \left\langle \tilde{g}^{(m)}, \tilde{g}^{(k)} \right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \delta(m-k), \quad \left\langle \tilde{h}^{(m)}, \tilde{g}^{(k)} \right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = 0$$

而且, $\{\tilde{h}^{(m)}, \tilde{g}^{(m)}; m \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的规范正交基. 这样, 尺度子空间 V_{j+1} 具有如下形式的规范正交基:

$$\{2^{j/2}\varphi(2^j x - 0.5(2m+1)),\ 2^{j/2}\psi(2^j x - 0.5(2m+1)); m \in \mathbb{Z}\}$$

引入子空间序列记号: 对于 $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} \tilde{V}_j = \text{Closespan}\{2^{j/2}\phi(2^j x - 0.5(2m+1)); m \in \mathbb{Z}\} \\ \tilde{W}_j = \text{Closespan}\{2^{j/2}\psi(2^j x - 0.5(2m+1)); m \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

那么, $\tilde{V}_j \perp \tilde{W}_j, \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j = V_{j+1}$.

另外, 引入矩阵记号:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{B}}_0 = [h_{n,k} = h_{n-(2k+1)}; (n,k) \in \mathbb{Z}^2]_{\infty \times \frac{\infty}{2}} = [\tilde{\mathbf{h}}_0^{(k)}; k \in \mathbb{Z}]_{\infty \times \frac{\infty}{2}} \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}_1 = [g_{n,k} = g_{n-(2k+1)}; (n,k) \in \mathbb{Z}^2]_{\infty \times \frac{\infty}{2}} = [\tilde{\mathbf{h}}_1^{(k)}; k \in \mathbb{Z}]_{\infty \times \frac{\infty}{2}} \end{cases}$$

它们实际上是将以前使用过的矩阵:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & h_0 & h_{-2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & h_{+1} & h_{-1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & h_{+2} & h_0 & h_{-2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & h_{+1} & h_{-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & h_{+2} & h_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{\infty \times \frac{\infty}{2}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & g_0 & g_{-2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & g_{+1} & g_{-1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & g_{+2} & g_0 & g_{-2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & g_{+1} & g_{-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & g_{+2} & g_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{\infty \times \frac{\infty}{2}}$$

的全部列向量向下移动一行得到的两个 $\infty \times [0.5\infty]$ 矩阵. 利用这些记号定义一个 $\infty \times \infty$ 的分块为 1×2 的矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}_0 \mid \boldsymbol{\mathcal{B}}_1)$, 容易验证, 矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}_0 \mid \boldsymbol{\mathcal{B}}_1)$ 是酉矩阵.

此时, 从尺度子空间 V_{j+1} 的规范正交基 $\{2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x - n); n \in \mathbb{Z}\}$ 到尺度子空

间 V_{j+1} 的新规范正交基

$$\{2^{j/2}\varphi(2^j x-0.5(2m+1)),2^{j/2}\psi(2^j x-0.5(2m+1));m\in\mathbb{Z}\}$$

的过渡矩阵就是 $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_0\mid\mathcal{B}_1)$，即

$$\begin{aligned}&\{2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-n);n\in\mathbb{Z}\}\mathcal{B}\\&=\{2^{j/2}\varphi(2^j x-0.5(2m+1));m\in\mathbb{Z}\}\cup\{2^{j/2}\psi(2^j x-0.5(2m+1));m\in\mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

注释: 对于任意的整数 $m\in\mathbb{Z}$, 利用公式

$$\begin{cases}2^{j/2}\varphi(2^j x-0.5(2m+1))=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_{n-(2m+1)}\times 2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-n)\\2^{j/2}\psi(2^j x-0.5(2m+1))=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-(2m+1)}\times 2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-n)\end{cases}$$

以及 $\{2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-n);n\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_{j+1} 的规范正交基这个事实，可知

$$\{2^{j/2}\varphi(2^j x-0.5(2m+1)),2^{j/2}\psi(2^j x-0.5(2m+1));m\in\mathbb{Z}\}$$

中的每个函数都在尺度子空间 V_{j+1} 中，这是因为，对于任意的整数 $m\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{cases}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|h_{n-(2m+1)}|^2=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|h_n|^2<+\infty\\\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|g_{n-(2m+1)}|^2=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|g_n|^2<+\infty\end{cases}$$

但是，不可以断言:

$$\begin{aligned}&\{2^{j/2}\kappa(2^j x-0.5(2m+1));m\in\mathbb{Z}\}\subset V_j\\&\{2^{j/2}\psi(2^j x-0.5(2m+1));m\in\mathbb{Z}\}\subset W_j\end{aligned}$$

(β) 半尺度函数投影

在多分辨率分析的理论体系下，假设 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在 V_{j+1} 上的正交投影记为 $f_{j+1}^{(0)}(x)$，$f(x)$ 在 $\tilde{V}_j,\tilde{W}_j$ 上的正交投影分别记为 $\tilde{f}_j^{(\ell)}(x),\ell=0,1$，那么

$$\begin{cases}f_{j+1}^{(0)}(x)=\sum\limits_{n}\tilde{d}_{j+1,n}^{(0)}2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-n)\\\tilde{f}_j^{(0)}(x)=\sum\limits_{m}\tilde{d}_{j,m}^{(0)}2^{j/2}\varphi(2^j x-0.5(2m+1))\\\tilde{f}_j^{(1)}(x)=\sum\limits_{m}\tilde{d}_{j,m}^{(1)}2^{j/2}\psi(2^j x-0.5(2m+1))\end{cases}$$

将 $f(x)$ 在 V_{j+1} 上的正交投影及其在 $\tilde{V}_j,\tilde{W}_j$ 上的正交投影 $\tilde{f}_j^{(\ell)}(x),\ell=0,1$ 的正交级数展开系数列向量分别写成列向量 $\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}=\mathbb{D}_{j+1}^{(0)},\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)},\tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}$，它们之间的分解关系可以

写成

$$\begin{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}\\ \tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}\end{pmatrix}=\mathcal{B}^*\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}=\begin{pmatrix}\mathcal{B}_0^*\\ \mathcal{B}_1^*\end{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}=\begin{pmatrix}\mathcal{B}_0^*\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}\\ \mathcal{B}_1^*\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}\end{pmatrix}$$

相反的关系可以表示为

$$\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}=\mathcal{B}\begin{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}\\ \tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}\end{pmatrix}=\left(\mathcal{B}_0\middle|\mathcal{B}_1\right)\begin{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}\\ \tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}\end{pmatrix}=\mathcal{B}_0\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}+\mathcal{B}_1\tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}$$

利用这个合成关系，还可以得到恒等式:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}&=\mathcal{B}\begin{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}\\ \tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}\end{pmatrix}=(\mathcal{B}_0|\mathcal{B}_1)\begin{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}\\ \tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}\end{pmatrix}\\&=(\mathcal{B}_0|\mathcal{B}_1)\begin{pmatrix}\mathcal{B}_0^*\\ \mathcal{B}_1^*\end{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}=(\mathcal{B}_0\mathcal{B}_0^*+\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1^*)\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}\end{aligned}$$

对任意向量 $\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}\in\ell^2(\mathbb{Z})$ 成立.

在有限离散采样条件下，如果 $\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}=\mathbb{D}_{j+1}^{(0)}$ 是 $N=2^{m_0}$ 维的列向量，通过将有限项非零的尺度方程和小波方程对应的低通滤波器系数序列和带通滤波器系数序列进行周期化处理，从而得到 $N\times N$ 的过渡矩阵 $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_0|\mathcal{B}_1)$ 以及如下形式的半尺度有限向量小波分解关系:

$$\begin{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}\\ \tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}\end{pmatrix}=\mathcal{B}^*\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}=\begin{pmatrix}\mathcal{B}_0^*\\ \mathcal{B}_1^*\end{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}=\begin{pmatrix}\mathcal{B}_0^*\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}\\ \mathcal{B}_1^*\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}\end{pmatrix}$$

分解产生的两个向量 $\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)},\tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}$ 都是 $N/2=2^{m_0-1}$ 维列向量. 类似地，可以建立如下形式的半尺度有限向量小波包分解关系:

$$\begin{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_j^{(2p+0)}\\ \tilde{\mathbb{D}}_j^{(2p+1)}\end{pmatrix}=\mathcal{B}^*\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(p)}=\begin{pmatrix}\mathcal{B}_0^*\\ \mathcal{B}_1^*\end{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(p)}=\begin{pmatrix}\mathcal{B}_0^*\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(p)}\\ \mathcal{B}_1^*\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(p)}\end{pmatrix},\quad p=0,1,2,\cdots$$

在尺度级别为 $s=2^{-(m_0-1)}$ 时，完成全部第 $0,1,\cdots,(2^{m_0}-1)$ 级小波包分解，最终得到 $N=2^{m_0}$ 个分解向量，每个向量都只有 1 个坐标分量. 这样在半尺度移动的条件下，再次遇到分解过程造成的分辨率减半问题.

(γ) 半尺度投影分解

在多分辨率分析的理论体系下，假设 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在 V_{j+1} 上的正交投影记为

$f_{j+1}^{(0)}(x)$ 或者 $\tilde{f}_{j+1}^{(0)}(x)$，$f(x)$ 在 V_j, W_j 上的正交投影分别记为 $f_j^{(\ell)}(x), \ell = 0,1$, 在 $\tilde{V}_j, \tilde{W}_j$ 上的正交投影分别记为 $\tilde{f}_j^{(\ell)}(x), \ell = 0,1$, 那么

$$\begin{cases} f_{j+1}^{(0)}(x) = \sum\limits_n d_{j+1,n}^{(0)} 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1}x - n) \\ f_j^{(0)}(x) = \sum\limits_m d_{j,m}^{(0)} 2^{j/2} \varphi(2^j x - m) \\ f_j^{(1)}(x) = \sum\limits_m d_{j,m}^{(1)} 2^{j/2} \psi(2^j x - m) \end{cases}$$

而且

$$\begin{cases} \tilde{f}_{j+1}^{(0)}(x) = \sum\limits_n \tilde{d}_{j+1,n}^{(0)} 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1}x - n) \\ \tilde{f}_j^{(0)}(x) = \sum\limits_m \tilde{d}_{j,m}^{(0)} 2^{j/2} \varphi(2^j x - 0.5(2m+1)) \\ \tilde{f}_j^{(1)}(x) = \sum\limits_m \tilde{d}_{j,m}^{(1)} 2^{j/2} \psi(2^j x - 0.5(2m+1)) \end{cases}$$

由于 $V_j \perp W_j, V_j \oplus W_j = V_{j+1}$ 而且 $\tilde{V}_j \perp \tilde{W}_j, \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j = V_{j+1}$，因此成立如下的等式:

$$f_{j+1}^{(0)}(x) = f_j^{(0)}(x) + f_j^{(1)}(x) = \tilde{f}_{j+1}^{(0)}(x) = \tilde{f}_j^{(0)}(x) + \tilde{f}_j^{(1)}(x)$$

因为尺度子空间 V_{j+1} 除了 $\{2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x - n); n \in \mathbb{Z}\}$ 这个规范正交基之外，还有另外两个规范正交基

$$\{2^{j/2}\varphi(2^j x - 0.5(2m+1)), 2^{j/2}\psi(2^j x - 0.5(2m+1)); m \in \mathbb{Z}\}$$

以及

$$\{2^{j/2}\varphi(2^j x - m); m \in \mathbb{Z}\} \cup \{2^{j/2}\psi(2^j x - m); m \in \mathbb{Z}\}$$

由此可得

$$\begin{cases} \left\|f_{j+1}^{(0)}\right\|^2 = \left\|f_j^{(0)}\right\|^2 + \left\|f_j^{(1)}\right\|^2 \\ \left\|\tilde{f}_{j+1}^{(0)}\right\|^2 = \left\|\tilde{f}_j^{(0)}\right\|^2 + \left\|\tilde{f}_j^{(1)}\right\|^2 \end{cases}$$

由此得到 $f_{j+1}^{(0)}(x) = \tilde{f}_{j+1}^{(0)}(x)$ 的如下分解关系公式:

$$\begin{cases} f_{j+1}^{(0)}(x) = 0.5 f_j^{(0)}(x) + 0.5\tilde{f}_j^{(0)}(x) + 0.5 f_j^{(1)}(x) + 0.5\tilde{f}_j^{(1)}(x) \\ \left\|f_{j+1}^{(0)}\right\|^2 = 0.5\left\|f_j^{(0)}\right\|^2 + 0.5\left\|f_j^{(1)}\right\|^2 + 0.5\left\|\tilde{f}_j^{(0)}\right\|^2 + 0.5\left\|\tilde{f}_j^{(1)}\right\|^2 \end{cases}$$

(δ) 半尺度系数分解

在多分辨率分析的理论体系下，假设 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在 V_{j+1} 上的正交投影记为 $f_{j+1}^{(0)}(x)$ 或者 $\tilde{f}_{j+1}^{(0)}(x)$，$f(x)$ 在 V_j,W_j 上的正交投影分别记为 $f_j^{(\ell)}(x),\ell=0,1$，在 $\tilde{V}_j,\tilde{W}_j$ 上的正交投影分别记为 $\tilde{f}_j^{(\ell)}(x),\ell=0,1$，而且，在相应子空间上对应规范正交基之下，这些正交投影的正交函数项级数展开的系数向量是

$$\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)},\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)},\tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)} \quad 与 \quad \mathscr{D}_{j+1}^{(0)},\mathscr{D}_j^{(0)},\mathscr{D}_j^{(1)}$$

那么，成立如下的小波分解或小波包分解关系：

$$\begin{cases}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\dfrac{\mathscr{D}_j^{(0)}}{\mathscr{D}_j^{(1)}}\right)=(\boldsymbol{\mathcal{H}}\mid\boldsymbol{\mathcal{G}})\left(\dfrac{\mathscr{D}_j^{(0)}}{\mathscr{D}_j^{(1)}}\right)=\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathscr{D}_j^{(0)}+\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathscr{D}_j^{(1)}\\ \tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}=\boldsymbol{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}\\ \tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\mathcal{B}}_0|\boldsymbol{\mathcal{B}}_1)\begin{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}\\ \tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\mathcal{B}}_0\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}+\boldsymbol{\mathcal{B}}_1\tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}\end{cases}$$

而且

$$\begin{cases}\left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|^2=\left\|\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathscr{D}_j^{(0)}\right\|^2+\left\|\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathscr{D}_j^{(1)}\right\|^2\\ \left\|\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}\right\|^2=\left\|\boldsymbol{\mathcal{B}}_0\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}\right\|^2+\left\|\boldsymbol{\mathcal{B}}_1\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}\right\|^2\end{cases}$$

从而得到如下形式的小波分解和小波包分解关系以及能量分解关系：

$$\begin{cases}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=0.5\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathscr{D}_j^{(0)}+0.5\boldsymbol{\mathcal{B}}_0\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}+0.5\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathscr{D}_j^{(1)}+0.5\boldsymbol{\mathcal{B}}_1\tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}\\ \left\|\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\right\|^2=0.5\left\|\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathscr{D}_j^{(0)}\right\|^2+0.5\left\|\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathscr{D}_j^{(1)}\right\|^2+0.5\left\|\boldsymbol{\mathcal{B}}_0\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}\right\|^2+0.5\left\|\boldsymbol{\mathcal{B}}_1\tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}\right\|^2\end{cases}$$

注释：如果这些系数向量是有限维的，那么，就按照周期化的方式理解多分辨率分析中的低通滤波器系数序列和带通滤波器系数序列，这样，上述这些公式在形式上保持不变而且在逻辑上是正确的.

(ε) 恒分辨率小波分解

在多分辨率分析的理论体系下，可以利用 $\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathscr{D}_j^{(0)},\boldsymbol{\mathcal{B}}_0\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)},\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathscr{D}_j^{(1)},\boldsymbol{\mathcal{B}}_1\tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}$ 完全重建 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}$. 仔细分析 $\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)},\tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}$ 和 $\mathscr{D}_j^{(0)},\mathscr{D}_j^{(1)}$ 的产生过程：

$$\left(\dfrac{\mathscr{D}_j^{(0)}}{\mathscr{D}_j^{(1)}}\right)=\boldsymbol{\mathcal{A}}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\left(\dfrac{[\boldsymbol{\mathcal{H}}]^*}{[\boldsymbol{\mathcal{G}}]^*}\right)\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\left(\dfrac{[\boldsymbol{\mathcal{H}}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}}{[\boldsymbol{\mathcal{G}}]^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}}\right)$$

和

$$\begin{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}\\ \tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}\end{pmatrix}=\mathcal{B}^*\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}=\begin{pmatrix}\mathcal{B}_0^*\\ \mathcal{B}_1^*\end{pmatrix}\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}=\begin{pmatrix}\mathcal{B}_0^*\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}\\ \mathcal{B}_1^*\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}\end{pmatrix}$$

如果将 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{B}_0$ 的列向量相间地合并产生一个新矩阵 $\mathbb{S}^{(0)}$，即 $\mathbb{S}^{(0)}$ 的第 0 列是 $\mathcal{H}$ 的第 0 列，而 $\mathbb{S}^{(0)}$ 的第 1 列是 $\mathcal{B}_0$ 的第 0 列(实际就是 $\mathcal{H}$ 的第 0 列下移 1 行得到的列向量)，…，$\mathbb{S}^{(0)}$ 的第 $2m$ 列是 $\mathcal{H}$ 的第 m 列，$m\in\mathbb{Z}$, $\mathbb{S}^{(0)}$ 的第 $2m+1$ 列是 $\mathcal{B}_0$ 的第 m 列，$m\in\mathbb{Z}$, 如此产生的矩阵 $\mathbb{S}^{(0)}$ 是正方形矩阵，它的第 0 列就是列向量 $\mathbf{h}_0^{(0)}=\{h_{n,0}=h_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$，第 m 列是列向量 $\mathbf{h}_0^{(m)}=\{h_{n,m}=h_{n-m};n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$，这个列向量就是 $\mathbf{h}_0^{(0)}=\{h_{n,0}=h_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 下移 m 行之后得到的列向量，$m\in\mathbb{Z}$. 这说明 $\mathbb{S}^{(0)}$ 本质上是由列向量 $\mathbf{h}_0^{(0)}=\{h_{n,0}=h_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 决定的离散卷积算子(矩阵). 于是，如果引入记号 $\mathcal{D}_j^{(0)}$，它的第 $2m$ 个元素(分量)是 $\mathscr{D}_j^{(0)}$ 的第 m 个元素，而第$(2m+1)$个元素是 $\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}$ 的第 m 个元素，那么

$$\mathcal{D}_j^{(0)}=\mathbb{S}^{(0)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$$

这个表达式的本质意义是，低通滤波器系数序列构成的列向量 $\mathbf{h}^{(0)}=\{h_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 与序列 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 卷积产生新序列 $\mathcal{D}_j^{(0)}$，而且 $\mathcal{D}_j^{(0)}$ 与 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 具有相同的维数.

类似地，引入记号 $\mathbb{S}^{(1)}$，它的第 m 列是列向量 $\mathbf{h}_1^{(m)}=\{h_{n,m}=g_{n-m};n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$，这个列向量是带通滤波器系数序列构成的列向量 $\mathbf{g}^{(0)}=\{g_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 向下移动 m 行之后得到的列向量，$m\in\mathbb{Z}$. $\mathbb{S}^{(1)}$ 是矩阵 $\mathcal{G},\mathcal{B}_1$ 的合并，偶数列的向量是 $\mathcal{G}$ 的列向量，它的第$(2m)$列是 $\mathcal{G}$ 的第 m 列，奇数列是 $\mathcal{B}_1$ 的列向量，第$(2m+1)$列是 $\mathcal{B}_1$ 的第 m 列，$m\in\mathbb{Z}$. 这样，如果引入记号 $\mathcal{D}_j^{(1)}$，它的第 $2m$ 个元素(分量)是 $\mathscr{D}_j^{(1)}$ 的第 m 个元素，而第$(2m+1$ 个$)$元素是 $\tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}$ 的第 m 个元素，那么，得到如下的分解关系:

$$\mathcal{D}_j^{(1)}=\mathbb{S}^{(1)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$$

这个表达式的本质意义是，带通滤波器系数序列构成的列向量 $g^{(0)}=\{g_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 与序列 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 卷积产生新序列 $\mathcal{D}_j^{(1)}$，而且 $\mathcal{D}_j^{(1)}$ 与 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 具有相同的维数.

综合上述讨论得到新的小波分解关系:

$$\begin{cases}\mathcal{D}_j^{(0)}=\mathbb{S}^{(0)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\\ \mathcal{D}_j^{(1)}=\mathbb{S}^{(1)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\end{cases}$$

其中，$\mathbb{S}^{(0)},\mathbb{S}^{(1)}$ 是同阶正方形矩阵，这个阶数正好是列向量 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 的维数. 这样，作为

分解结果的列向量 $\mathcal{D}_j^{(0)},\mathcal{D}_j^{(1)}$ 具有相同维数，而且这个维数正好就是 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 的维数. 到此为止，通过具体构造分解矩阵 $\mathbb{S}^{(0)},\mathbb{S}^{(1)}$，获得了与原始列向量 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 同维的分解列向量 $\mathcal{D}_j^{(0)},\mathcal{D}_j^{(1)}$，从数字分辨率的角度来说，分解列向量 $\mathcal{D}_j^{(0)},\mathcal{D}_j^{(1)}$ 与原始列向量 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 具有相同的分辨率. 这就是恒分辨率小波分解.

注释: 如果这些系数向量是有限维的，那么，就按照周期化的方式理解多分辨率分析中的低通滤波器系数序列和带通滤波器系数序列，这样，上述这些公式在形式上保持不变而且在逻辑上是正确的，这就同时解决了有限数字信号恒分辨率小波分解问题.

(ζ) 恒分辨率函数分解

利用前述构造的恒分辨率小波分解关系:

$$\begin{cases}\mathcal{D}_j^{(0)}=\mathbb{S}^{(0)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\\ \mathcal{D}_j^{(1)}=\mathbb{S}^{(1)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\end{cases}$$

得到与 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}$ 具有相同数字分辨率的系数向量 $\mathcal{D}_j^{(0)},\mathcal{D}_j^{(1)}$. 这时，$f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在 V_{j+1} 上的正交投影 $f_{j+1}^{(0)}(x)$ 就可以表示成如下新形式:

$$\begin{aligned}f_{j+1}^{(0)}(x)&=0.5(f_j^{(0)}(x)+\tilde{f}_j^{(0)}(x))+0.5(f_j^{(1)}(x)+\tilde{f}_j^{(1)}(x))\\&=0.5\sum_{m\in\mathbb{Z}}[d_{j,m}^{(0)}\varphi_{j,m}(x)+\tilde{d}_{j,m}^{(0)}\tilde{\varphi}_{j,m}(x)]+0.5\sum_{m\in\mathbb{Z}}[d_{j,m}^{(1)}\psi_{j,m}(x)+\tilde{d}_{j,m}^{(1)}\tilde{\psi}_{j,m}(x)]\\&=0.5\sum_{m\in\mathbb{Z}}[d_{j,m}^{(0)}\times 2^{j/2}\varphi(2^jx-m)+\tilde{d}_{j,m}^{(0)}\times 2^{j/2}\varphi(2^jx-0.5(2m+1))]\\&\quad+0.5\sum_{m\in\mathbb{Z}}[d_{j,m}^{(1)}\times 2^{j/2}\psi(2^jx-m)+\tilde{d}_{j,m}^{(1)}\times 2^{j/2}\psi(2^jx-0.5(2m+1))]\end{aligned}$$

引入函数记号:

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}_j^{(0)}(x)=0.5(f_j^{(0)}(x)+\tilde{f}_j^{(0)}(x))\\ \boldsymbol{f}_j^{(1)}(x)=0.5(f_j^{(1)}(x)+\tilde{f}_j^{(1)}(x))\end{cases}$$

那么,

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}_j^{(0)}(x)=0.5\sum_{m\in\mathbb{Z}}[d_{j,m}^{(0)}\times 2^{j/2}\varphi(2^jx-m)+\tilde{d}_{j,m}^{(0)}\times 2^{j/2}\varphi(2^jx-0.5(2m+1))]\\ \boldsymbol{f}_j^{(1)}(x)=0.5\sum_{m\in\mathbb{Z}}[d_{j,m}^{(1)}\times 2^{j/2}\psi(2^jx-m)+\tilde{d}_{j,m}^{(1)}\times 2^{j/2}\psi(2^jx-0.5(2m+1))]\end{cases}$$

显然 $\boldsymbol{f}_j^{(0)}(x)$ 和 $\boldsymbol{f}_j^{(1)}(x)$ 与 $\boldsymbol{f}_{j+1}^{(0)}(x)$ 具有相同的分辨率，同时，正交函数项级数表达式中的系数序列 $\{d_{j,m}^{(0)},\tilde{d}_{j,m}^{(0)};m\in\mathbb{Z}\}$，$\{d_{j,m}^{(1)},\tilde{d}_{j,m}^{(1)};m\in\mathbb{Z}\}$，$\{d_{j+1,n}^{(0)};n\in\mathbb{Z}\}$ 也具有相

同的数字分辨率, 即 $\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)},\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}$ 与 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}$ 具有相同的数字分辨率. 当它们都是无穷维向量时, $\mathbb{S}^{(0)},\mathbb{S}^{(1)}$ 是正方形的矩阵, 在特定的条件下(这将在稍后的内容中展开讨论), $\mathbb{S}^{(0)},\mathbb{S}^{(1)}$ 都是可逆矩阵; 当它们都是有限维向量时, 三者都是同维向量, 而且, 低通滤波器系数序列构成的列向量 $\mathbf{h}^{(0)}=\{h_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 满足一定条件时(稍后讨论), $\mathbb{S}^{(0)},\mathbb{S}^{(1)}$ 都是可逆的正方形矩阵. 此外, 即使在 $\mathbb{S}^{(0)},\mathbb{S}^{(1)}$ 不可逆的条件下, $\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)},\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}$ 与 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}$ 也是同维列向量, $f_j^{(0)}(x)$ 和 $f_j^{(1)}(x)$ 与 $f_{j+1}^{(0)}(x)$ 也具有相同的采样点列, 相邻采样点相距(采样间隔)为 $2^{-(j+1)}$, 因此, 它们也具有相同的分辨率.

(η) 恒分辨率分解对角化

回顾前述构造的恒分辨率小波分解关系:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)}=\mathbb{S}^{(0)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}=\mathbb{S}^{(1)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\end{cases}$$

在这个恒分辨率小波分解关系中, 假设 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}$ 是有限维列向量. 这时,恒分辨率小波分解关系中的变换矩阵 $\mathbb{S}^{(0)},\mathbb{S}^{(1)}$ 未必是可逆矩阵. 考虑到这两个矩阵都是卷积矩阵, 在傅里叶变换基下将它们对角化.

由恒分辨率小波分解关系式得到它的有限傅里叶变换:

$$\begin{cases}\mathscr{F}^*\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)}=(\mathscr{F}^*\mathbb{S}^{(0)}\mathscr{F})\mathscr{F}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\\ \mathscr{F}^*\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}=(\mathscr{F}^*\mathbb{S}^{(1)}\mathscr{F})\mathscr{F}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\end{cases}$$

其中 $\mathscr{F}^*$ 是 $\mathscr{F}$ 的复共轭转置, $\mathscr{F}$ 是离散傅里叶变换算子或矩阵:

$$\mathscr{F}=\frac{1}{\sqrt{N}}\left(e^{(-2\pi i/N)\times m\times n}\right)_{0\leqslant m,n\leqslant N-1}$$

它是 N 点规范有限傅里叶变换矩阵. 引入记号:

$$\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}=\mathscr{F}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$$

而且

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_j^{(0)}=\mathscr{F}^*\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)},\\ \tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_j^{(1)}=\mathscr{F}^*\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)},\end{cases}\quad\begin{cases}\tilde{\mathbb{S}}^{(0)}=\mathscr{F}^*\mathbb{S}^{(0)}\mathscr{F}\\ \tilde{\mathbb{S}}^{(1)}=\mathscr{F}^*\mathbb{S}^{(1)}\mathscr{F}\end{cases}$$

这样, 建立恒分辨率小波分解在傅里叶变换域的表达形式:

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_j^{(0)}=\tilde{\mathbb{S}}^{(0)}\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}\\ \tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_j^{(1)}=\tilde{\mathbb{S}}^{(1)}\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}\end{cases}$$

因为，恒分辨率小波分解关系式中变换矩阵 $\mathbb{S}^{(0)},\mathbb{S}^{(1)}$ 都是卷积矩阵，所以，在有限傅里叶变换基之下，它们都将对角化，即 $\tilde{\mathbb{S}}^{(0)},\tilde{\mathbb{S}}^{(1)}$ 是对角矩阵.

(θ) 恒分辨率尺度分解合成算法

设 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=\tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}$ 是 N 维列向量，多分辨率分析中尺度方程的低通滤波器系数序列 $\mathbf{h}_0^{(0)}=\{h_{n,0}=h_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 只有有限项非零，首尾非零项之间的长度不超过 N (否则，后面的结果不能保证正确性). 当 $\mathbf{h}_0^{(0)}$ 的首尾非零项之间的长度正好是 N 时，直接选定 $\mathbf{h}_0^{(0)}$ 的首尾非零项之间的有限项作为有限维的 $\mathbf{h}_0^{(0)}$，勿需任何额外处理，即可进行下述讨论；当 $\mathbf{h}_0^{(0)}$ 的首尾非零项之间的长度小于 N 时，截取包含这些非零项的长度为 N 的有限项进行周期化处理，将 $\mathbf{h}_0^{(0)}$ 取为一个完整周期的有限项向量，之后进入后续讨论.

这样处理之后，可得到对角矩阵 $\tilde{\mathbb{S}}^{(0)}$ 的具体表达形式:

$$\tilde{\mathbb{S}}^{(0)}=\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1})$$

其中

$$\lambda_\ell=\sum_{m=0}^{N-1}h_m e^{(2\pi i/N)\times\ell\times m},\quad \ell=0,1,2,\cdots,(N-1)$$

于是，恒分辨率小波分解关系的傅里叶变换域形式可以直接写出:

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_j^{(0)}=\tilde{\mathbb{S}}^{(0)}\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}=\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1})\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}$$

同时得到这个变换关系的逆变换关系:

$$\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}=[\tilde{\mathbb{S}}^{(0)}]^{-1}\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_j^{(0)}=\mathrm{diag}(\lambda_0^{-1},\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_{N-1}^{-1})\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_j^{(0)}$$

其中要求 $\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{N-1}\neq 0$. 此时，$\tilde{\mathbb{S}}^{(0)}$ 的可逆性决定了 $\mathbb{S}^{(0)}=\mathscr{F}\,\tilde{\mathbb{S}}^{(0)}\mathscr{F}^*$ 也是可逆矩阵，而且

$$[\mathbb{S}^{(0)}]^{-1}=\mathscr{F}\ \mathrm{diag}(\lambda_0^{-1},\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_{N-1}^{-1})\mathscr{F}^*$$

显然，此时，$[\mathbb{S}^{(0)}]^{-1}=\mathscr{F}\ \mathrm{diag}(\lambda_0^{-1},\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_{N-1}^{-1})\mathscr{F}^*$ 是卷积矩阵. 因此，小波分解的一种逆变换关系可以写成

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=[\mathbb{S}^{(0)}]^{-1}\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)}$$

而且，实际计算可以利用线性滤波器完成.

(ι) 恒分辨率小波分解合成算法

在多分辨率分析中，带通滤波器系数序列 $\mathbf{h}_1^{(0)}=\{h_{n,1}=g_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 与低通滤波

器系数序列 $\mathbf{h}_0^{(0)}=\{h_{n,0}=h_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 的关系是下标反向且移动奇数位之后相间项乘以 (-1)，同时，下标移动偶数位不改变滤波器的性质，只会影响小波的中心位置，因此，当 $\mathbf{h}_0^{(0)}$ 以周期 N 进行周期化使 $\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{N-1}\neq 0$ 时，$\mathbf{h}_1^{(0)}$ 完全可以选取与 $\mathbf{h}_0^{(0)}$ 具有相同的长度. 当 $\mathbb{S}^{(1)}$ 经过有限傅里叶变换被对角化为矩阵 $\tilde{\mathbb{S}}^{(1)}$ 时，这个对角矩阵可以写成

$$\tilde{\mathbb{S}}^{(1)}=\operatorname{diag}(\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_{N-1})$$

其中

$$\mu_\ell=\sum_{m=0}^{N-1}g_m e^{(2\pi i/N)\times\ell\times m},\quad \ell=0,1,\cdots,(N-1)$$

这时，必满足 $\mu_0\mu_1\cdots\mu_{N-1}\neq 0$. 于是，$\tilde{\mathbb{S}}^{(1)}$ 不仅可逆，而且，其逆矩阵可以直接写成

$$[\tilde{\mathbb{S}}^{(1)}]^{-1}=\operatorname{diag}(\mu_0^{-1},\mu_1^{-1},\cdots,\mu_{N-1}^{-1})$$

同时得到这个恒分辨率小波分解变换关系在傅里叶变换域中的逆关系:

$$\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}=[\tilde{\mathbb{S}}^{(1)}]^{-1}\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_j^{(1)}=\operatorname{diag}(\mu_0^{-1},\mu_1^{-1},\cdots,\mu_{N-1}^{-1})\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_j^{(1)}$$

由此可得，$\mathbb{S}^{(1)}$ 是可逆矩阵，而且，可以具体写成

$$[\mathbb{S}^{(1)}]^{-1}=\mathscr{F}\ \operatorname{diag}(\mu_0^{-1},\mu_1^{-1},\cdots,\mu_{N-1}^{-1})\mathscr{F}^*$$

显然，此时，$[\mathbb{S}^{(1)}]^{-1}=\mathscr{F}\ \operatorname{diag}(\mu_0^{-1},\mu_1^{-1},\cdots,\mu_{N-1}^{-1})\mathscr{F}^*$ 是卷积矩阵. 因此，小波分解的一种逆变换关系可以写成

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=[\mathbb{S}^{(1)}]^{-1}\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}$$

而且，实际计算可以利用线性滤波器快速完成.

这些结果表明，在有限维列向量变换关系 $\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(\ell)}=\mathbb{S}^{(\ell)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)},\ell=0,1$ 中，可以由 $\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)},\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}$ 中的任何一个重建原始 N 维列向量 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$，而且，计算方法可以采用如下卷积直接计算完成:

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=[\mathbb{S}^{(0)}]^{-1}\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)}$$

或者

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=[\mathbb{S}^{(1)}]^{-1}\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}$$

除此之外，也可以利用

$$\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}=[\tilde{\mathbb{S}}^{(0)}]^{-1}\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_j^{(0)}=\operatorname{diag}(\lambda_0^{-1},\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_{N-1}^{-1})\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_j^{(0)}$$

或者

$$\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)} = [\tilde{\mathbb{S}}^{(1)}]^{-1}\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_j^{(1)} = \mathrm{diag}(\mu_0^{-1}, \mu_1^{-1}, \cdots, \mu_{N-1}^{-1})\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_j^{(1)}$$

之后进行傅里叶逆变换得到 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$.

(κ) 恒分辨率序列分解合成算法

回顾前述构造的恒分辨率小波分解关系:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)} = \mathbb{S}^{(0)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)} = \mathbb{S}^{(1)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \end{cases}$$

在这个恒分辨率小波分解关系中，假设 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = \tilde{\mathbb{D}}_{j+1}^{(0)}$ 是 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中的无限维列向量. 此时，多分辨率分析的低通滤波器系数序列 $\mathbf{h}_0^{(0)} = \{h_{n,0} = h_n; n \in \mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 和带通滤波器系数序列 $\mathbf{h}_1^{(0)} = \{h_{n,1} = g_n; n \in \mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 满足 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_n|^2 < +\infty$，即能量有限或者平方可和.

定义 $\mathbf{h}_0^{(0)} = \{h_{n,0} = h_n; n \in \mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{h}_1^{(0)} = \{h_{n,1} = g_n; n \in \mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 的傅里叶级数(周期 2π 的能量有限或者平方可积函数，或者滤波器脉冲响应函数):

$$\begin{cases} \mathbf{H}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega} \\ \mathbf{G}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} g_n e^{-in\omega} \end{cases}$$

它们是函数空间 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2(0, 2\pi)$ 或 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2(-\pi, +\pi)$ 中的函数，把这个变换记为 $\mathscr{F}^*$，它把能量有限序列 $\mathbf{h}_0^{(0)} = \{h_{n,0} = h_n; n \in \mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 变换成周期 2π 的能量有限函数或者平方可积函数 $\mathbf{H}(\omega)$，同样，它把 $\mathbf{h}_1^{(0)} = \{h_{n,1} = g_n; n \in \mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 变换成周期 2π 的能量有限函数或者平方可积函数 $\mathbf{G}(\omega)$. $\mathscr{F}^*$ 的逆变换 $\mathscr{F}$ 将周期 2π 的能量有限函数或者平方可积函数 $\mathbf{G}(\omega)$ 和 $\mathbf{H}(\omega)$ 逆变换成如下的平方可和或者能量有限无穷维列向量 $\mathbf{h}_1^{(0)} = \{h_{n,1} = g_n; n \in \mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{h}_0^{(0)} = \{h_{n,0} = h_n; n \in \mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$: 对于 $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} g_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\omega) e^{in\omega} d\omega \\ h_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathbf{H}(\omega) e^{in\omega} d\omega \end{cases}$$

这时，引入记号:

$$\begin{cases}\tilde{\mathscr{D}}_j^{(0)}(\omega)=\mathscr{F}^*\mathscr{D}_j^{(0)}\\ \tilde{\mathscr{D}}_j^{(1)}(\omega)=\mathscr{F}^*\mathscr{D}_j^{(1)}\\ \tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}(\omega)=\mathscr{F}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\end{cases}$$

而且

$$\tilde{\mathbb{S}}^{(\ell)}=\mathscr{F}^*\mathbb{S}^{(\ell)}\mathscr{F},\quad \ell=0,1$$

将恒分辨率小波分解关系改写如下:

$$\begin{cases}\mathscr{F}^*\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)}=[\mathscr{F}^*\mathbb{S}^{(0)}\mathscr{F}]\mathscr{F}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\\ \mathscr{F}^*\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}=[\mathscr{F}^*\mathbb{S}^{(1)}\mathscr{F}]\mathscr{F}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\end{cases}$$

或者利用上述引入的符号写成

$$\begin{cases}\tilde{\mathscr{D}}_j^{(0)}(\omega)=\tilde{\mathbb{S}}^{(0)}\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}(\omega)\\ \tilde{\mathscr{D}}_j^{(1)}(\omega)=\tilde{\mathbb{S}}^{(1)}\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}(\omega)\end{cases}$$

或者集中表示为

$$\tilde{\mathscr{D}}_j^{(\ell)}(\omega)=\tilde{\mathbb{S}}^{(\ell)}\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}(\omega),\quad \ell=0,1$$

因为恒分辨率小波分解关系式中变换矩阵 $\mathbb{S}^{(0)},\mathbb{S}^{(1)}$ 都是卷积矩阵, 所以, 在傅里叶级数基之下, 它们将被对角化为矩阵 $\tilde{\mathbb{S}}^{(0)},\tilde{\mathbb{S}}^{(1)}$, 具体写成如下对角形式:

$$\begin{cases}\tilde{\mathbb{S}}^{(0)}=\mathrm{diag}(\mathbf{H}(\omega);\omega\in[0,2\pi])\\ \tilde{\mathbb{S}}^{(1)}=\mathrm{diag}(\mathbf{G}(\omega);\omega\in[0,2\pi])\end{cases}$$

而且最终得到在傅里叶级数基变换下的恒分辨率小波分解关系式:

$$\begin{cases}\tilde{\mathscr{D}}_j^{(0)}(\omega)=\mathbf{H}(\omega)\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}(\omega)\\ \tilde{\mathscr{D}}_j^{(1)}(\omega)=\mathbf{G}(\omega)\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}(\omega)\end{cases}$$

由 $\mathbf{h}_0^{(0)}=\{h_{n,0}=h_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{h}_1^{(0)}=\{h_{n,1}=g_n;n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 在多分辨率分析中的特定关系可知, $\mathbf{H}(\omega)$ 与 $\mathbf{G}(\omega)$ 必将同时衡非零或者相反. 当 $\mathbf{H}(\omega)$ 衡不为 0, 即 $\mathbf{H}(\omega)\neq0,\omega\in[0,2\pi]$, 则 $\mathbf{G}(\omega)\neq0,\omega\in[0,2\pi]$. 这样, 可以得到在傅里叶级数基变换下的恒分辨率小波分解的逆变换关系:

$$\begin{cases}\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}(\omega)=[\mathbf{H}(\omega)]^{-1}\tilde{\mathscr{D}}_j^{(0)}(\omega)\\ \tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}(\omega)=[\mathbf{G}(\omega)]^{-1}\tilde{\mathscr{D}}_j^{(1)}(\omega)\end{cases}$$

这样, 可以从能量有限 2π 周期函数 $\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}(\omega)$ 由傅里叶变换 $\mathscr{F}$ 获得对应的无穷维列向量 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$, 满足关系 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}=[\mathbb{S}^{(0)}]^{-1}\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)}=[\mathbb{S}^{(1)}]^{-1}\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}$. 这时如下矩阵:

$$\begin{cases}[\mathbb{S}^{(0)}]^{-1} = \mathscr{F}[\mathbf{H}(\omega)]^{-1}\mathscr{F}^* \\ [\mathbb{S}^{(1)}]^{-1} = \mathscr{F}[\mathbf{G}(\omega)]^{-1}\mathscr{F}^*\end{cases}$$

都是卷积矩阵. 从而, $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = [\mathbb{S}^{(0)}]^{-1}\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)} = [\mathbb{S}^{(1)}]^{-1}\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}$ 本质上是 $\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)}, \boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}$ 经过卷积运算恢复原始数据序列 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$.

(λ) 恒分辨率函数分解合成算法

前述研究结果表明, 尺度子空间 V_{j+1} 除了 $\{2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-n); n\in\mathbb{Z}\}$ 这个规范正交基之外, 还有另外两个新基(可能不是正交基)

$$\{2^{j/2}\varphi(2^jx-0.5(2m+1)), 2^{j/2}\psi(2^jx-0.5(2m+1)); m\in\mathbb{Z}\}$$

以及

$$\{2^{j/2}\varphi(2^jx-m); m\in\mathbb{Z}\}\cup\{2^{j/2}\psi(2^jx-m); m\in\mathbb{Z}\}$$

而且, 这时尺度子空间 V_{j+1} 的基之间的过渡关系和过渡矩阵如下:

$$\begin{aligned}&\{2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-n); n\in\mathbb{Z}\}\\ &= \{2^{j/2}\varphi(2^jx-m), 2^{j/2}\varphi(2^jx-0.5(2m+1)); m\in\mathbb{Z}\}[\mathbb{S}^{(0)}]^{-1}\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}&\{2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-n); n\in\mathbb{Z}\}\\ &= \{2^{j/2}\psi(2^jx-m), 2^{j/2}\psi(2^jx-0.5(2m+1)); m\in\mathbb{Z}\}[\mathbb{S}^{(1)}]^{-1}\end{aligned}$$

注意, 此时, $[\mathbb{S}^{(0)}]^{-1}, [\mathbb{S}^{(1)}]^{-1}$ 都是卷积矩阵. 上述关系说明, 子空间 V_{j+1} 的规范正交基 $\{2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-n); n\in\mathbb{Z}\}$ 可以由子空间 V_{j+1} 的新基:

$$\{2^{j/2}\varphi(2^jx-m), 2^{j/2}\varphi(2^jx-0.5(2m+1)); m\in\mathbb{Z}\}$$

或者新基:

$$\{2^{j/2}\psi(2^jx-m), 2^{j/2}\psi(2^jx-0.5(2m+1)); m\in\mathbb{Z}\}$$

表示出来, 系数由 $[\mathbb{S}^{(0)}]^{-1}, [\mathbb{S}^{(1)}]^{-1}$ 的列向量获得. 应该注意到, $[\mathbb{S}^{(0)}]^{-1}, [\mathbb{S}^{(1)}]^{-1}$ 都是正方形的卷积矩阵.

因为, $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 是 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在 V_{j+1} 上的正交投影 $f_{j+1}^{(0)}(x)$ 在 V_{j+1} 的规范正交基 $\{2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-n); n\in\mathbb{Z}\}$ 之下的正交函数项级数展开的系数列向量, 而且, $\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)}$ 是 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在 V_{j+1} 上的正交投影 $f_{j+1}^{(0)}(x)$ 在 V_{j+1} 的规范正交基

$$\{2^{j/2}\varphi(2^jx-m), 2^{j/2}\varphi(2^jx-0.5(2m+1)); m\in\mathbb{Z}\}$$

之下的级数展开的系数列向量, 最后, $\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}$ 是 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在 V_{j+1} 上的正交投影

$f_{j+1}^{(0)}(x)$ 在 V_{j+1} 的规范正交基

$$\{2^{j/2}\psi(2^j x-m),2^{j/2}\psi(2^j x-0.5(2m+1));m\in\mathbb{Z}\}$$

之下的级数展开的系数列向量. 因此, $f_{j+1}^{(0)}(x)$ 与如下两个函数:

$$\boldsymbol{f}_j^{(0)}(x)=\frac{1}{2}(f_j^{(0)}(x)+\tilde{f}_j^{(0)}(x))$$
$$\boldsymbol{f}_j^{(1)}(x)=\frac{1}{2}(f_j^{(1)}(x)+\tilde{f}_j^{(1)}(x))$$

具有相同的分辨率, 而且

$$f_{j+1}^{(0)}(x)=\boldsymbol{f}_j^{(0)}(x)+\boldsymbol{f}_j^{(1)}(x)$$

注释说明: 子空间 V_{j+1} 的如下两个基:

$$\{2^{j/2}\varphi(2^j x-m),2^{j/2}\varphi(2^j x-0.5(2m+1));m\in\mathbb{Z}\}$$

和

$$\{2^{j/2}\psi(2^j x-m),2^{j/2}\psi(2^j x-0.5(2m+1));m\in\mathbb{Z}\}$$

未必是规范正交基, 因此, $\boldsymbol{f}_j^{(0)}(x)$, $\boldsymbol{f}_j^{(1)}(x)$ 的上述表示方法未必是正交函数项级数展开表达式.

这样, 由 $f_{j+1}^{(0)}(x)$ 分解为 $\boldsymbol{f}_j^{(0)}(x)$ 和 $\boldsymbol{f}_j^{(1)}(x)$ 的分解关系是相同分辨率的信号或函数分解, 称之为恒分辨率函数分解关系. 这种分解关系可以不断地进行下去, 而且, 对离散采样的点数 N 没有任何限制, 这与正交多分辨率分析在采样点数要求上存在差异. 反过来, 由 $\boldsymbol{f}_j^{(0)}(x)$ 或者 $\boldsymbol{f}_j^{(1)}(x)$ 或者两者共同决定的 $f_{j+1}^{(0)}(x)$ 的重建, 也是能够恒分辨率实现的. 这就是函数或者信号的恒分辨率分解合成算法理论.

8.2.3　恒分辨率小波包理论

在多分辨率分析的理论体系下, 信号分解关系:

$$\tilde{f}_{j+1}^{(0)}(x)=f_{j+1}^{(0)}(x)=\boldsymbol{f}_j^{(0)}(x)+\boldsymbol{f}_j^{(1)}(x)$$

和系数分解关系:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)}=\mathbb{S}^{(0)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}=\mathbb{S}^{(1)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\end{cases}$$

都是恒分辨率小波分解关系. 当 $\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{N-1}\neq 0$ 或 $\mathbf{H}(\omega)\neq 0,\omega\in[0,2\pi]$ 时, 只利用 $\boldsymbol{f}_j^{(0)}(x)$ 或 $\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(0)}$ 就可以完全重建原始的信号 $f_{j+1}^{(0)}(x)$ 或 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$, 同样, 只利用 $\boldsymbol{f}_j^{(1)}(x)$ 或 $\boldsymbol{\mathcal{D}}_j^{(1)}$ 也可以完全重建原始信号 $f_{j+1}^{(0)}(x)$ 或系数列向量 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$. 这样, 在分解过程中, 出现了信息的大量重叠, 因此, 有的文献将这种方法称为极大重叠小波分解算法理论.

由于在分解过程中分辨率没有降低而且分解过程对采样点数没有任何限制，所以，在许多实际信号分析和处理中，这种方法将是非常方便灵活的. 更为重要的是，这种方法还可以按照小波包的思想进行扩展，为实际应用提供更多的小波分析工具，这就是恒分辨率小波包分解合成理论.

(α) 恒分辨率小波包函数分解

在多分辨率分析的理论体系下，将恒分辨率分解关系中使用的符号改写成便于表达重复分解关系的符号，重写恒分辨率小波分解的函数分解关系为

$$\tilde{f}_{j+1}^{(0)}(x) = f_{j+1}^{(0)}(x) = \boldsymbol{f}_j^{(0)}(x) + \boldsymbol{f}_j^{(1)}(x)$$

将系数分解关系改写为

$$\begin{cases} \mathscr{D}_j^{(0)} = \mathbb{S}^{(0)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \\ \mathscr{D}_j^{(1)} = \mathbb{S}^{(1)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} \end{cases}$$

这样，就可以将恒分辨率小波分解关系直接重复应用在每次分解得到的所有分解向量或者分解函数(信号)上，从而得到恒分辨率小波包分解.

将系数列向量恒分辨率小波包分解关系表示如下：

$$\mathscr{D}_j^{(2p+\ell)} = \mathbb{S}^{(\ell)}\mathscr{D}_{j+1}^{(p)},\quad \ell = 0,1,\quad p = 0,1,2,\cdots$$

并将函数或者信号的恒分辨率小波包分解关系写成：对于 $0 \leqslant m \leqslant 2^{k+1}-1$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{j+1}^{(0)}(x) &= \boldsymbol{f}_j^{(0)}(x) + \boldsymbol{f}_j^{(1)}(x) \\ &= \boldsymbol{f}_{j-1}^{(0)}(x) + \boldsymbol{f}_{j-1}^{(1)}(x) + \boldsymbol{f}_{j-1}^{(2)}(x) + \boldsymbol{f}_{j-1}^{(3)}(x) \\ &\;\;\vdots \\ &= \boldsymbol{f}_{j-k}^{(0)}(x) + \boldsymbol{f}_{j-k}^{(1)}(x) + \cdots + \boldsymbol{f}_{j-k}^{(m)}(x) + \cdots + \boldsymbol{f}_{j-k}^{(2^{k+1}-1)}(x) \end{aligned}$$

(β) 恒分辨率小波包分解格式

将上述系数列向量恒分辨率小波包分解关系和函数或者信号的恒分辨率小波包分解关系统一地形象表达为：经过多次恒分辨率分解得到如下结果：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \varsigma_{j+1}^{(0)} & & & & & (2^0=1) \\
 & & \swarrow & & \searrow & & & & \\
 & & \varsigma_j^{(0)} & & \varsigma_j^{(1)} & & & & (2^1=2) \\
 & \swarrow & \vdots & & \vdots & \searrow & & & \\
 & \varsigma_{j-1}^{(0)} & \varsigma_{j-1}^{(1)} & & \varsigma_{j-1}^{(2)} & \varsigma_{j-1}^{(3)} & & & (2^2=4) \\
 & & & \vdots & & & & & \\
\varsigma_{j-k}^{(0)} & \varsigma_{j-k}^{(1)} & \cdots & \varsigma_{j-k}^{(m)} & & \cdots & \varsigma_{j-k}^{(2^{k+1}-1)} & & (2^{k+1}-1)
\end{array}$$

其中，当分解对应的尺度级别进行到 $s=2^{-(j-k)}$ 时，分解过程将产生 2^{k+1} 个恒分辨率的分解系数列向量或者分解函数(信号)，符号 $\zeta_{j-k}^{(m)},m=0,1,2,\cdots,(2^{k+1}-1)$ 有两种含义，当 $\zeta_{j-k}^{(m)}=\mathscr{D}_{j-k}^{(m)},m=0,1,2,\cdots,(2^{k+1}-1)$ 时，上述示意图表示系数列向量恒分辨率小波包分解关系，当 $\zeta_{j-k}^{(m)}=\boldsymbol{f}_{j-k}^{(m)}(x),m=0,1,2,\cdots,(2^{k+1}-1)$ 时，意思是函数(信号)恒分辨率小波包分解关系.

在多分辨率分析的理论体系下，当恒分辨率分解关系进行到尺度级别 $s=2^{-(j-k)}$ 时，小波包级别共有 2^{k+1} 个，当遍历 $m=0,1,2,\cdots,(2^{k+1}-1)$ 这 2^{k+1} 个小波包级别时，系数列向量恒分辨率小波包分解将得到 2^{k+1} 个分解向量 $\mathscr{D}_{j-k}^{(m)}$，$m=0,1,2,\cdots,(2^{k+1}-1)$，其中每个都是 N 维向量，其维数和原始采样向量 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 是相同的. 这对于信号分析处理以及预测等研究来说，无论在任何级别的小波包分解中，采样间隔都是相同的，这就完全解决了正交小波包分解列向量中采样间隔不断倍增产生的各种问题.

(γ) 恒分辨率小波包系数分解算法

这里研究在多分辨率分析的理论体系下恒分辨率系数列向量小波包分解的计算方法.

分解过程进行到尺度级别 $s=2^{-(j-k)}$ 时，小波包级别共有 2^{k+1} 个，当遍历 $m=0,1,2,\cdots,(2^{k+1}-1)$ 这 2^{k+1} 个小波包级别时，系数列向量恒分辨率小波包分解将得到 2^{k+1} 个分解向量 $\mathscr{D}_{j-k}^{(m)},m=0,1,2,\cdots,(2^{k+1}-1)$，其中每个都是 N 维向量，其维数和原始采样向量 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 是相同的.

下面给出 $\mathscr{D}_{j-k}^{(m)},m=0,1,2,\cdots,(2^{k+1}-1)$ 的详细表达式.

对于 $m=0,1,2,\cdots,(2^{k+1}-1)$，将 m 写成 $(k+1)$ 位的二进制形式:

$$m=2^k\times u_k+2^{k-1}\times u_{k-1}+\cdots+2^1\times u_1+2^0u_0=(u_ku_{k-1}\cdots u_1u_0)_2$$

其中 $(u_0,u_1,\cdots,u_k)\in\{0,1\}^{k+1}$，这样，$\mathscr{D}_{j-k}^{(m)}$ 可以写成

$$\mathscr{D}_{j-k}^{(m)}=\mathbb{S}^{(u_0)}\mathbb{S}^{(u_1)}\cdots\mathbb{S}^{(u_{k-1})}\mathbb{S}^{(u_k)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$$

或者写成

$$\mathscr{D}_{j-k}^{(u_k,u_{k-1},\cdots,u_1,u_0)}=\mathbb{S}^{(u_0)}\mathbb{S}^{(u_1)}\cdots\mathbb{S}^{(u_k)}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$$

其中 $u_j\in\{0,1\},j=0,1,\cdots,k$.

在规范正交有限傅里叶变换域中，这种恒分辨率小波包分解可表示为

$$\mathscr{F}^*\mathscr{D}_{j-k}^{(u_k,u_{k-1},\cdots,u_1,u_0)}=(\mathscr{F}^*\mathbb{S}^{(u_0)}\mathscr{F})(\mathscr{F}^*\mathbb{S}^{(u_1)}\mathscr{F})\cdots(\mathscr{F}^*\mathbb{S}^{(u_k)}\mathscr{F})(\mathscr{F}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)})$$

或者简写成

$$\tilde{\mathscr{D}}_{j-k}^{(u_k,u_{k-1},\cdots,u_1,u_0)}=\tilde{\mathbb{S}}^{(u_0)}\tilde{\mathbb{S}}^{(u_1)}\cdots\tilde{\mathbb{S}}^{(u_k)}\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}$$

其中，$u_j\in\{0,1\},j=0,1,\cdots,k$，而且，

$$\begin{cases}\tilde{\mathscr{D}}_{j-k}^{(u_k,u_{k-1},\cdots,u_1,u_0)}=\mathscr{F}^*\mathscr{D}_{j-k}^{(u_k,u_{k-1},\cdots,u_1,u_0)}\\ \tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}=\mathscr{F}^*\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}\\ \tilde{\mathbb{S}}^{(u_j)}=\mathscr{F}^*\mathbb{S}^{(u_j)}\mathscr{F}=\operatorname{diag}(\lambda_0^{(u_j)},\lambda_1^{(u_j)},\cdots,\lambda_{N-1}^{(u_j)})\end{cases}$$

从而

$$\tilde{\mathbb{S}}^{(u_0)}\cdots\tilde{\mathbb{S}}^{(u_k)}=\operatorname{diag}([\lambda_0^{(u_0)}\lambda_0^{(u_1)}\cdots\lambda_0^{(u_k)}],[\lambda_1^{(u_0)}\lambda_1^{(u_1)}\cdots\lambda_1^{(u_k)}],\cdots,[\lambda_{N-1}^{(u_0)}\lambda_{N-1}^{(u_1)}\cdots\lambda_{N-1}^{(u_k)}])$$

其中，$\ell=0,1,\cdots,(N-1)$，

$$\lambda_\ell^{(u)}=\begin{cases}\sum\limits_{m=0}^{N-1}e^{(2\pi/N)\times\ell\times m}h_m, & u=0\\ \sum\limits_{m=0}^{N-1}e^{(2\pi/N)\times\ell\times m}g_m, & u=1\end{cases}$$

进一步演算可得：当 $\ell=0,1,\cdots,(N-1)$ 时，

$$\lambda_\ell^{(u_0)}\lambda_\ell^{(u_1)}\cdots\lambda_\ell^{(u_k)}=[\lambda_\ell^{(0)}]^{(k+1)-\sum\limits_{j=0}^{k}u_j}[\lambda_\ell^{(1)}]^{\sum\limits_{j=0}^{k}u_j}$$

引入记号：对于 $\ell=0,1,\cdots,(N-1),u_j\in\{0,1\},j=0,1,\cdots,k$，

$$\lambda_\ell^{(u_k,\cdots,u_1,u_0)}=\lambda_\ell^{(u_0)}\lambda_\ell^{(u_1)}\cdots\lambda_\ell^{(u_k)}=[\lambda_1^{(0)}]^{(k+1)-\sum\limits_{j=0}^{k}u_j}[\lambda_\ell^{(1)}]^{\sum\limits_{j=0}^{k}u_j}$$

而且

$$\begin{cases}\mathbb{S}^{(u_k,\cdots,u_1,u_0)}=\mathbb{S}^{(u_0)}\mathbb{S}^{(u_1)}\cdots\mathbb{S}^{(u_k)}\\ \tilde{\mathbb{S}}^{(u_k,\cdots,u_1,u_0)}=\tilde{\mathbb{S}}^{(u_0)}\tilde{\mathbb{S}}^{(u_1)}\cdots\tilde{\mathbb{S}}^{(u_k)}\end{cases}$$

这样可得

$$\tilde{\mathbb{S}}^{(u_k,\cdots,u_0)}=\operatorname{diag}(\lambda_0^{(u_k,\cdots,u_1,u_0)},\lambda_1^{(u_k,\cdots,u_1,u_0)},\cdots\lambda_{N-1}^{(u_k,\cdots,u_1,u_0)}),$$

而且，当 $u_j\in\{0,1\},j=0,1,\cdots,k$ 时，

$$\tilde{\mathscr{D}}_{j-k}^{(u_k,\cdots,u_0)}=\tilde{\mathbb{S}}^{(u_k,\cdots,u_0)}\tilde{\mathscr{D}}_{j+1}^{(0)}$$

这就是恒分辨率小波包分解方法.

(δ) 恒分辨率小波包系数合成算法

这里研究在多分辨率分析的理论体系下恒分辨率系数列向量小波包合成和函数小波包合成的计算方法.

利用前述讨论和符号, 可以建立恒分辨率小波包合成方法的简洁表达形式.

回顾恒分辨率小波和小波包合成关系:

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = 0.5(\mathcal{H}\mathscr{D}_j^{(0)} + \mathcal{B}_0\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}) + 0.5(\mathcal{G}\mathscr{D}_j^{(1)} + \mathcal{B}_1\tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)})$$

并将两个列向量 $\mathscr{D}_j^{(0)},\tilde{\mathbb{D}}_j^{(0)}$ 的元素相间合并产生的与 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 同维的向量用符号记为 $\mathscr{Q}_j^{(0)}$, 将 $\mathscr{D}_j^{(1)},\tilde{\mathbb{D}}_j^{(1)}$ 合并后的与 $\mathscr{D}_{j+1}^{(0)}$ 同维的向量记为符号 $\mathscr{Q}_j^{(1)}$, 再结合矩阵符号 $\mathbb{S}^{(0)},\mathbb{S}^{(1)}$, 重新表达恒分辨率小波和小波包合成关系:

$$\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} = 0.5[\mathbb{S}^{(0)}]^*\mathscr{Q}_j^{(0)} + 0.5[\mathbb{S}^{(1)}]^*\mathscr{Q}_j^{(1)}$$

其中 $[\mathbb{S}^{(0)}]^*,[\mathbb{S}^{(1)}]^*$ 是 $\mathbb{S}^{(0)},\mathbb{S}^{(1)}$ 的复共轭转置. 需要提醒注意的是, $[\mathbb{S}^{(0)}]^*,[\mathbb{S}^{(1)}]^*$ 未必是 $\mathbb{S}^{(0)},\mathbb{S}^{(1)}$ 的逆矩阵. 重复利用上述恒分辨率小波包合成关系可得

$$\begin{cases}\mathscr{Q}_j^{(0)} = 0.5[\mathbb{S}^{(0)}]^*\mathscr{Q}_{j-1}^{(0)} + 0.5[\mathbb{S}^{(1)}]^*\mathscr{Q}_{j-1}^{(1)}\\ \mathscr{Q}_j^{(1)} = 0.5[\mathbb{S}^{(0)}]^*\mathscr{Q}_{j-1}^{(2)} + 0.5[\mathbb{S}^{(1)}]^*\mathscr{Q}_{j-1}^{(3)}\end{cases}$$

合并可得

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{j+1}^{(0)} &= (0.5)^2[\mathbb{S}^{(0)}]^*[\mathbb{S}^{(0)}]^*\mathscr{Q}_{j-1}^{(0)} + 0.5[\mathbb{S}^{(0)}]^*[\mathbb{S}^{(1)}]^*\mathscr{Q}_{j-1}^{(1)}\\ &\quad + 0.5[\mathbb{S}^{(1)}]^*[\mathbb{S}^{(0)}]^*\mathscr{Q}_{j-1}^{(2)} + 0.5[\mathbb{S}^{(1)}]^*[\mathbb{S}^{(1)}]^*\mathscr{Q}_{j-1}^{(3)}\\ &\ \vdots\\ &= (0.5)^{k+1}\sum_{(u_k,\cdots,u_0)\in\{0,1\}^{k+1}}[\mathbb{S}^{(u_k,\cdots,u_1,u_0)}]^*\mathscr{Q}_{j-k}^{(u_k,\cdots,u_1,u_0)}\end{aligned}$$

上述公式中最后的等式求和项数是 2^{k+1} 项, 将 m 写成 $(k+1)$ 位的二进制形式:

$$m = 2^k \times u_k + 2^{k-1} \times u_{k-1} + \cdots + 2^1 \times u_1 + 2^0 u_0 = (u_k u_{k-1} \cdots u_1 u_0)_2$$

其中 $(u_k,\cdots,u_1,u_0) \in \{0,1\}^{k+1}$, 这样, 相应求和项 $\mathscr{Q}_{j-k}^{(m)} = \mathscr{Q}_{j-k}^{(u_k,\cdots,u_1,u_0)}$ 左边相乘的矩阵就是 $\mathbb{S}^{(m)} = \mathbb{S}^{(u_k,\cdots,u_1,u_0)} = \mathbb{S}^{(u_0)}\mathbb{S}^{(u_1)}\cdots\mathbb{S}^{(u_k)}$ 的复共轭转置矩阵 $[\mathbb{S}^{(u_k,\cdots,u_1,u_0)}]^*$, 其中 m 的取值范围是 m=0,1,2,$\cdots$,$(2^{k+1}-1)$.

注释说明: 如果将公式中的常数因子 0.5 折算计入低通滤波器系数向量和带通滤波器系数向量 $\mathbf{h}_0^{(0)} = \{h_{n,0} = h_n; n \in \mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{h}_1^{(0)} = \{h_{n,1} = g_n; n \in \mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}$ 中, 那么, 形式上, 这些公式中的常数因子 0.5 将不直接呈现.

到此为止，恒分辨率小波分解方法和合成方法、恒分辨率小波包分解方法和合成方法以及恒分辨率分解合成的算法理论就全部讨论清楚了. 更多的研究工作可以参考 Percival 和 Walden(2000)，Daubechies(1988)，迈耶(1992)，冉启文(1995, 2001)，王建中(1992)等文献.

8.3　马尔小波与视觉计算理论

在人工智能或计算机智能研究的历史进程中，20 世纪七八十年代，大卫·马尔及其视觉理论研究团队在综合此前数学、心理学、逻辑学、哲学、心理物理学、神经解剖学、生物化学、神经生理学等多个学科关于脑和视觉系统研究成果的基础上，提出并建立了视觉计算理论，典型标志是 1982 年出版的科学专著《视觉：视觉信息的人类表达方法和处理的计算理论研究》(Marr, 1982)，开创性地建立了人类视觉科学和计算机视觉科学的第一个视觉计算理论体系，这标志着计算机视觉成为了一门独立的学科.

马尔建立的视觉计算理论包含两个主要观点：其一，人类视觉的核心功能是复原物理三维场景的视知觉几何表面和几何关系，也就是三维重建问题；其二，从二维图像到三维几何结构和几何关系的重建过程本质上体现了三维物理世界向二维平面投影的逆过程，这个过程具有物理的和数学的双重现实性和唯一性，可以利用计算机模拟或者重现这个过程. 马尔的视觉计算理论建立了完整的计算理论和计算方法，能够完全实现从二维图像到三维几何结构和几何关系的人类视觉的现实重建过程. 因此，在一些文献中马尔视觉计算理论也被称为三维重建理论. 具体地，需要从三个不同的层面解决从二维图像复原客观物体三维结构的问题. 首先是人类视觉系统的计算理论体系，就是说需要附加多少和哪些种类的约束条件才能保证重建过程的真实性，即保证这种数学刻画过程与物理现实过程的一致性. 合理的约束应该是物理世界客观场景固有的性质在成像过程中对图像形成的约束，包含了光学的光场传播规律和光对人类视觉系统的刺激作用机理. 其次是视觉信息的表示方法和数值计算方法，这包含了人类视觉信息的表示、传输、存储和决策等视觉信息处理过程以及这个过程的计算机数值计算实现两个方面. 最后是人类视觉系统实施和计算机器视觉系统实现的生物物理机理和计算机软硬件实现.

视觉计算理论对视觉信息的表示方法和数值计算方法的研究和讨论十分详尽. 从二维图像重建三维物理物体及其几何关系，经历的三个主要步骤包括图像初始略图(sketch)、物体的 2.5 维描述和物体的 3 维描述. 初始略图是从图像的旋转对称高斯拉普拉斯滤波获得的零穿越(zero-crossing)、短线段、端点等基元特征. 物体的 2.5 维描述是客观物体在特定视觉坐标系下物体形状的粗略描述，如物体的法向量等. 物体的 3 维描述是指在客观物理世界坐标系或者物体自身坐标系下对物体的描述，

在某种意义下，这是客观物理世界在人类视觉系统或者计算机视觉系统中的“像”，可以认为这是“真的物理世界中的物体”的描述.

视觉计算理论从 20 世纪 80 年代初被提出后，经过三十多年的广泛深入研究，发现其中“人类视觉主要是复原物理三维场景的物体几何表面和几何关系”的假设并不完全是正确的，而且“物体识别三维表示方法”假设与人类视觉系统物体识别的神经生理机理也并不完全相符.

视觉计算理论在计算机视觉领域的影响是广泛的和深远的，虽然存在这样那样的瑕疵，文献中也有很多人对这个理论提出质疑、批评甚至改进，但这个视觉理论体系所建立的层次化物理世界三维重建理论架构至今仍然是计算机视觉研究的主流方法，没有任何一种理论可以取代马尔的视觉计算理论，或者能够达到与其相提并论.

在马尔的视觉计算理论体系中，包含了几个关于人类视觉和计算机视觉的极其重要的“假设”或者“公理”，另外，特别突出地明确提出并强调“视觉信息的表示方法”的理论思想，这不仅对人类视觉和计算机视觉理论的研究具有十分重要的作用，而且，在范围极其广泛的科学研究领域，这种思想方法也具有巨大的潜在应用价值，它与受到普遍重视的“优化思想”具有异曲同工之妙.

特别地，马尔的视觉计算理论体系非常明确地揭示了人类视觉系统核心信息提取和传输过程的小波特性以及实现这些小波(具体体现为二进小波)的器官和细胞组织，从而奠定小波客观存在性的哲学基础，同时，这也为声音、语言、听觉、味觉、触觉以及其他传感系统信息提取、表达和传输的小波方法研究奠定哲学和方法论基础，并提供现实的科学研究典型范例.

8.3.1 马尔的视觉理论

马尔(1988)的视觉计算理论体系将视觉定义为复杂的信息处理，可以从三个相互独立的层面进行刻画，即:

(1) 视觉信息的表示方法理论: 建立视觉信息的恰当表示方法;

(2) 视觉信息的计算方法理论: 获得视觉信息表达的快速计算理论;

(3) 视觉信息的实现系统理论: 完成视觉任务的生物神经器官和细胞组织及其生理物理学和神经生理学机理，计算机实现需要的软硬件功能和构架(实现视觉任务的器件实体).

在视觉信息的表示方法理论中，视觉信息处理就是把特定符号表示的信息转换成用其他符号表示的信息. 人类视觉信息处理过程就是从外部世界在视网膜成像(图像或视频)直到形成完整的视知觉为止. 视觉信息表示方法是视觉计算理论中最重要的思想. 视觉信息的表示方法(representation)就是与所述问题相关的某种特殊信息表达方式，其目的是将对后续处理有用的重要信息变得更明确、更容易理解.

(α) 视觉公理和假设

马尔在关于视觉信息的表示方法和处理计算研究中，详细论述了计算机视觉和人类视觉理论研究的基本思想和独特方案. 这项研究为科学界开辟了一个崭新的研究天地，并且，在机器视觉和人类视觉研究领域，永久地留下这个深刻理论的印迹，虽然有些假设或者观点被后来的研究证明是错误的，但是，视觉计算理论体系中除了“视觉重建”或+者“物理世界的视觉重建”被总体扬弃外，其他主要思想和成果现在以“主动视觉”的形式被完全保留和继承.

机器视觉和人类视觉研究的三个基本假设:

马尔第一假设: 存在人类视觉科学;

马尔第二假设: 机器视觉科学与人类视觉科学完全一致;

马尔第三假设: 机器视觉就是人类视觉的“低级处理”模式.

按照“低级处理模式”，人类视觉系统能够从视网膜的刺激程度重新恢复出周围物理世界的三维结构，人类视觉理论就是关于这种模式的有条理的、严格的理论体系，它应是清楚明了的符合逻辑的学说.

在马尔开展视觉研究的过程中，面临的困难是异常艰难的，因为，相关的基础知识还很欠缺，根本不足以解释人类视觉系统. 最终他把视觉理论体系的研究归结为研究人类视觉的下述四个特点，这些特性就是计算机器的人工视觉希望模仿或重建的:

(A) 识别轮廓: 这种轮廓限定了目标的边界，并且把周围的环境组织成清晰的目标;

(B) 三维重构: 从二维视觉图像构造第三维的感觉以及三维物理世界;

(C) 突出目标: 使暗处的目标明亮化，从背景中突出出来;

(D) 运动敏感: 目标在栩栩如生的场景中的运动感觉.

实现这些特征的抽取和计算，可以转化为如下三方面的问题:

(1) 怎样由光线的强度变化确定目标轮廓?

(2) 怎样感觉或计算深度?

(3) 怎样感知运动? 如何通过检测图像的相继更迭，识别目标是否移动?

马尔在视觉计算理论论著中对这三个问题都给出了精确的计算公式并建立了相应的数值计算方法，从而打开了当代科学研究的一个非常活跃的领域. 在研究的过程中，马尔提出了一个深刻的概念，即信号或图像的“表示方法”，并用具体的例子对这个概念进行了清晰的说明.

以整数“加法”为例，整数可以由罗马制系统、十进制系统和二进制系统给出三种不同的“数字表示方法”. 但是，“加法”所用的数值计算方法在三种计数模式下却是完全不同的，并且在操作的难易程度上相差很大. 这说明选择不同的“数

字表示方法”，对于解决同样的问题将产生完全不同的影响.

“表示方法”所起的基本的、灵敏的作用，深深地吸引了马尔，以至于他认为，“表示方法”是一个内在的概念，并且，使用一些恰当的符号表述客观现实，可以帮助人们捕捉到现实中某些感兴趣的特点，根本地，他认为人类视觉系统的“低级处理”模式，提供视觉信号或图像的一个最优“表示方法”．正因为如此，才在这里将这个论述置于“视觉公理和假设”标题下.

(β) 视觉信息处理

人类视觉是一种复杂的信息处理系统，目的是把握外部世界的各种情况并把它们表达出来. 根据前述视觉公理和假设，马尔认为视觉神经系统所作的信息处理与机器是相似的，而且，人类视觉科学研究的终极目标是阐明人类视觉系统究竟是怎样完成视觉任务的.

这种任务必须在三个不同的水平上来理解，就是视觉信息系统信息采集、表示、传输和处理的计算理论、计算方法以及实施机制. 当然，这一划分并不是很严格的，但如果不符合上述分类，则没有一个或一组描述将是完善的. 在视知觉系统中，上述三个水平各有其特定的位置，它们基本上是互相独立的. 因此，在探讨相应的计算理论问题时必须把它与计算方法和实施机制严格地区别开来，并采用新的研究方法.

从视知觉系统的计算理论这一级水平来看，所谓信息处理(process)，其实就是视觉信息表示的相互转换问题，这就是普遍意义下的“信息表示方法”问题，把视觉信息的符号表示变成另一些符号表示，本质上就是一个“优化过程”，使视知觉信息以有利于表示、传输、存储以及决策的方式存在和被进一步使用. 这一处理过程从外部世界被投射到视网膜上的图像开始，一直到形成某种知觉以及得到执行验证为止，整个过程形成“信息—表示—传输—存储—决策—执行—再信息”这样的“循环封闭+半封闭”的信息流. 因此，视知觉信息的表示方法是视觉计算理论中最重要和最核心的概念. 所谓表示方法，简单地说，就是与所述问题有关的某种特殊的信息表达方式，其主要特点是使一些对进一步处理有用的重要信息变得突出、明确. 表示方法作为信息的一种表达方式其实是被普遍采用的. 例如，物理系统中的能量是物理系统的一种表示方法；数学中的数字或者点在直角坐标系中的坐标是点的一种表示方法；视知觉信息的表示方法在人脑中留下的“痕迹”在一定刺激条件下会再现出来，从这个意义上说，这种痕迹也是视知觉信息的一种表示方法. 用表示方法实际描绘某一个体现象即应用表示方法的具体实例则称为该表示方法中的一个描述(description). 例如 12 就是某个特定的数字在阿拉伯数字表示方法中的一个描述；同样这个数字，在二进制数字表示方法中的描述就变化为 1100. 同样一个问题可以用许多不同类型的表示方法进行表示而得到许多不同的描述，其中有些

计算简单而有效，有些则不是那样，因此必须正确地选择表示方法. 表示方法的具体结构是与现实场景相联系的. 但长期以来，人们并没有正视这一点；甚至在 20 世纪 70 年代早期，计算机科学和人工智能研究领域的研究人员也仍未认识到视知觉信息处理的困难所在. 其根本原因在于人类视觉系统在自然状态下工作良好，这个系统的工作过程的关键环节和关键问题难于自动突出出来. 马尔认为，正是因为如此，在人类视知觉系统研究中，神经科学的传统方法和技术一概都失败了.

在视觉计算理论体系中，马尔认为问题的关键在于视觉信息处理必须与给定的任务进行关联分析，而分析的基础则受制于客观物质世界. 用公理体系或者公式化系统表示视觉计算理论的一个决定性的步骤，就是要找出视觉世界的特性，给视觉计算问题加上特定的约束条件，使它含义明确，能够获得现实意义唯一的清晰明确的解. 大量具体实例表明，如果不把视觉世界自然存在的一般性质变成视觉计算问题的特殊假设，问题就无法准确确定下来. 高级水平的特殊先验知识是不需要的，有用的仅仅是物理世界客观存在的一般性质. 视觉计算问题的一个根本约束条件就是在视觉信息表示方法下最终得到的描述必须一律由图像导出. 因此在最一般的情况下，视觉早期处理的表示方法结构主要决定于“能从图像中计算得出什么样的特征”，而后期处理的表示方法结构则还要受到视觉系统相应任务的限制和影响.

马尔提出的上述视觉计算理论研究方法是强有力的，它使视觉信息科学得以迅速发展壮大，其结果就像物理学定律那样具有永久的性质. 因为它们是在现实世界的物理学和图像的公式化体系的基本定律这样牢固的基础上建立起来的. 所以视觉计算理论在这个水平上才能够发展成为一门真正的科学. 马尔的研究工作奠定了从计算方法的宏旨到分析具体问题的细节环节的方法论基础.

8.3.2　视觉计算理论

在前述视觉公理和假设的基础上，利用马尔提出的视知觉信息处理研究的科学设想，可以建立清晰明确的人类视知觉系统的计算理论模型和计算方法，形成相对完整的人类和计算机的视知觉信息系统的计算理论.

(α) *表示方法的结构和功能块*

从信息处理的观点出发，马尔在他的视觉计算理论中用公理化或者公式化体系表达人类视觉信息处理的整个理论框架. 除上述处理问题的方式方法外，这是马尔在人类视觉理论研究领域中作出的十分重要的贡献，它提供了一个全面研究视觉系统和视觉计算问题的理论框架和策略. 这个理论框架包含如下三个层面的理论模型:

基元图(the primal sketch)或者缩略图:图像密度的变化与物体边界这类具体的物理性质相对应，基元图主要描述图像密度的变化及其局部几何关系;

物体的 2.5 维图(2.5 dimensional sketch): 从特定的视角描述物体表面的方位、轮廓、深度及其他几何性质;

物体的 3 维模型(3D model): 在客观物理世界坐标系或者物体中心坐标系下处理和识别物体的三维形状表示方法和几何关系.

在视觉计算理论中, 各种不同的视觉处理被有机地集合在一起产生图像的各级表示方法, 非常重要的是, 视觉信息处理被看成是一组相对独立的功能块. 这不但有计算的、进化论的、方法论的论据支持, 而且更重要的是某些视觉功能块已经被实验方法分离出来. 比如双眼立体视觉就是一个典型实例.

(β) 图像检测模型和理论

视觉计算理论同神经生理学和心理学关系十分密切. 这里研究视觉信息处理中的图像轮廓或者边缘提取问题. 这类问题也被称为视觉底层或者低级视觉信息处理. 这个研究的目的是检测图像的局部性质. 图像密度剧烈变化标记了物体表面的物理变化.

在视觉计算理论体系中, 图像在一定空间分辨率要求下的分析处理, 对应于一个"中心-周边型感受域", 即算子 $\nabla^2\mathrm{G}$, 其中 ∇^2 是拉普拉斯算子:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

而 G 是中心旋转对称二维高斯函数 $\mathrm{G}(x,y) = \exp[-(x^2+y^2)/(2\pi\sigma^2)]$, 于是

$$\nabla^2\mathrm{G}(x,y) = -\frac{2}{\pi\sigma^2}\left(1-\frac{x^2+y^2}{2\pi\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\pi\sigma^2}\right)$$

如果令 $r^2 = x^2 + y^2$, 那么, 算子 $\nabla^2\mathrm{G}$ 可以表示为

$$\nabla^2\mathrm{G}(r) = -\frac{2}{\pi\sigma^2}\left(1-\frac{r^2}{2\pi\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{2\pi\sigma^2}\right)$$

在一维函数的情况下, 高斯函数 $g(x) = \exp[-x^2/(2\pi\sigma^2)]$, 它正好是数学期望为 0 而且方差是 $\Delta = \sqrt{\pi}\sigma$ 的高斯概率密度函数, 其二阶导函数是

$$g''(x) = -\frac{1}{\pi\sigma^2}\left(1-\frac{x^2}{\pi\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2\pi\sigma^2}\right)$$

这个函数在 $x = \pm\sqrt{\pi}\sigma$ 时穿越水平轴, 所以, $x = \pm\sqrt{\pi}\sigma$ 是这个高斯函数的零交叉或者零穿越, 在这两个点上, 高斯函数二阶导函数的数值正好是 0.

计算高斯函数的三阶导函数可得

$$g'''(x)=\frac{x}{\pi^2\sigma^4}\left(3-\frac{x^2}{\pi\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2\pi\sigma^2}\right)$$

由 $g'''(x)=0$ 得到 $x=\pm\sqrt{3\pi}\sigma$ 或者 $x=0$. 这样, 曲线 $g''(x)$ 的升降、穿越水平轴的位置、最大最小取值以及位置具有如下规律:

(1) $g''(x)$ 在区间 $(-\infty,-\sqrt{3\pi}\sigma)$ 之间取正实数值并严格单调上升, 在 $x=-\sqrt{3\pi}\sigma$ 处取得最大值 $g''_{\max}=g''(-\sqrt{3\pi}\sigma)=2\pi^{-1}\sigma^{-2}e^{-1.5}$;

(2) $g''(x)$ 在 $(-\sqrt{3\pi}\sigma,0)$ 之间单调下降, 其取值从正实数在 $x=-\sqrt{\pi}\sigma$ 处穿越水平轴即 $g''(-\sqrt{\pi}\sigma)=0$ 之后改变为取负实数值, 并在 $x=0$ 时取得该函数的全局唯一最小值 $g''_{\min}=g''(0)=-\pi^{-1}\sigma^{-2}$;

(3) $g''(x)$ 在 $(0,\sqrt{3\pi}\sigma)$ 之间单调上升, 其取值从负实数(最小值) $g''_{\min}=g''(0)=-\pi^{-1}\sigma^{-2}$ 在 $x=\sqrt{\pi}\sigma$ 处穿越水平轴即 $g''(\sqrt{\pi}\sigma)=0$ 之后改变为取正实数, 并在 $x=\sqrt{3\pi}\sigma$ 处再次取得函数的全局最大值

$$g''_{\max}=g''(\sqrt{3\pi}\sigma)=\ 2\pi^{-1}\sigma^{-2}e^{-1.5}$$

(4) $g''(x)$ 在 $(\sqrt{3\pi}\sigma,+\infty)$ 上取正实数值并单调下降.

利用高斯概率密度函数的归一化性质:

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}d\zeta=1$$

经过积分变量代换 $\zeta=\pi^{-0.5}\sigma^{-1}x$ 可以得到

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\pi\sigma^2}}dx=1$$

从而得到恒等式:

$$\int_{\mathbb{R}}g(x)dx=\sqrt{2}\pi\sigma$$

以及

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\mathrm{G}(x,y)dxdy=2\pi^2\sigma^2$$

因此, 在使用一维的高斯函数 $g(x)=\exp[-x^2/(2\pi\sigma^2)]$ 对一维函数进行滤波或利用二维旋转对称高斯函数 $\mathrm{G}(x,y)=\exp[-(x^2+y^2)/(2\pi\sigma^2)]$ 对图像进行滤波时, 它们

的归一化因子分别是 $\sqrt{2}\pi\sigma$ 和 $2\pi^2\sigma^2$，即进行卷积滤波时的卷积函数分别是

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\pi\sigma^2}}$$

和

$$\tilde{\mathrm{G}}(x,y) = \tilde{g}(x)\tilde{g}(y) = \frac{1}{2\pi^2\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\pi\sigma^2}}$$

对原始图像进行滤波，然后再找出滤波处理所得图像的零交叉点，即二阶导数零值位置，这样就可刻画图像密度的变化情况. 在自然图像中，密度变化的“空间尺度”是很宽的. 要把所有空间尺度上的密度变化都检测出来，就必须采用几个大小不同的滤波器. 大的检测模糊边，小的检测图像细节. 把各通道的零交叉合并成一组对后续处理有用的离散基元“边”. 基元边和其他一些基元符号构成马尔称之为原始基元图的图像密度表示方法.

由若干中心-周边型感受域得出的零交叉乃是从原始的连续密度值获得图像的离散符号表示方法的一种自然形式. 因为在某些条件下，一个带宽小于单倍频程的一维带通信号能由其零交叉完全复原. 从视觉信息处理的观点看，重建原始信号显然是不可能的，但由零交叉得出的离散符号必定含有原始图像的极为丰富的信息. 从经验性的研究中得出结论：用算子 $\nabla^2\mathrm{G}$ 作滤波处理的图像是可以用其零交叉和斜率充分近似地恢复的.

上述结果的生理学和心理学含义是明显的. 它们阐明了视觉通道第一级或者视觉信息低级处理的一些基本性质，而且，正是这些性质平服了此前视觉心理物理学和神经生物学研究中空间频率通道和边检测器之间的争论. 事实上，视觉的第一阶段或者视觉信息低级处理在很大程度上是由“边”检测器(即零交叉检测器)而不是由傅里叶频谱分析完成的；零交叉检测器要抽取有意义的信息，就必须对若干独立通道的输出进行运算. 因此可以确认，二阶导数滤波运算是由视网膜神经节细胞和外侧膝状体核完成的，而有向的零交叉线段(即“边”)则是由视皮层中的 x 细胞检测的. 这样，视觉信息处理的计算理论就具备了生物物理学和神经生物学的现实的、客观的基础，正是马尔提出的这些视觉信息处理的基本概念，才使视觉计算理论成为一种几乎是尽善尽美的理论，这样的基础科学理论特征使人类视觉信息处理研究变得越来越严密，并最终使它成为一门真正的科学.

随着人类视觉科学研究的不断进步，大量试验事实表明，人类视觉是不需要重建的. 视觉计算理论“三维重建”过程过大的计算量推动计算机视觉研究领域在 20 世纪 90 年代对马尔的视觉三维重建理论进行深刻反思，比如美国著名杂志 *CVGIP: Image Understanding* 曾经先后组织过两次大规模的理论讨论，其中的第二次就是关

于人类视觉三维重建问题的, 大论战的最终结果就是统一了人类视觉研究和计算机(或者人工智能)视觉研究的争论, 普遍接受了主动视觉和目的视觉的视觉系统研究思想.

“山重水复疑无路, 柳暗花明又一村”, 在人工智能和虚拟现实技术甚嚣尘上的当下, 尘封多年的“视觉三维重建思想”再次焕发活力, 成为虚拟现实技术和现实增强技术的主要理论基础.

8.3.3 视觉计算的马尔猜想

在视觉计算理论中, 马尔确信人类视觉系统对视觉信息或图像的处理是一个复杂的等级结构, 它包括许多处理级别, 而“低级处理”模式提供的表示方法是各级处理的共同基础.

(α) 马尔猜想

针对视觉计算理论的“视觉信息低级处理模式”, 马尔提出了以他的名字命名的著名猜想:

由视网膜系统所提供的基本视觉信息表示方法, 是在不同尺度下的草图的一个有序的前后相继的序列, 并且, 尺度是按几何级数增加的, 这些草图是由曲线构成的, 而这些曲线就是视觉信息图像马尔小波的二进小波变换零穿越曲线.

具体地说, 在视觉信号或图像强度检测中, 马尔认为: ①图像中的强度变化在每一尺度下都存在, 因此, 图像最优检测必须使用不同尺度的算子; ②图像强度的突然变化, 将使强度一阶导函数出现波峰或波谷, 相应地, 二阶导函数穿越零点. 因此, 为了有效检测强度变化, 必须寻找具有如下两个显著特征的系列滤波器: 它首先是图像一阶或二阶导数的可微算子; 其次具有尺度伸缩能力, 在大尺度级别, 能够检测图像的模糊阴影边界, 在小尺度级别, 能够检测图像集中了剧变的精细细节.

满足这些要求的理想算子是 $\nabla^2\mathrm{G}$, 其中 ∇^2 是前面已经用过的拉普拉斯算子, 即 $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$, 而 G 是具有标准差 $\sqrt{\pi}\sigma$ 的二维高斯分布函数 $\mathrm{G}(x,y)=\exp(-0.5\sigma^{-2}(x^2+y^2))$, 这时, $\nabla^2\mathrm{G}$ 就是一个圆形的旋转对称墨西哥帽状的二维算子, 即

$$\nabla^2\mathrm{G}(x,y)=-\frac{2}{\sigma^2}\left(1-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

令 $r^2=x^2+y^2$ 表示 (x,y) 到原点距离的平方, 则得到简化形式:

$$\nabla^2\mathrm{G}(r)=-2\sigma^{-2}(1-0.5\sigma^{-2}r^2)\exp(-0.5\sigma^{-2}r^2)$$

当把 $\nabla^2 G(r)$ 写成 $\nabla^2 G(r) = \sigma^{-2}\psi(\sigma^{-1}x, \sigma^{-1}y)$ 时，就得到现在被称为马尔小波的函数

$$\psi(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2}{2} - 1\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

对于灰度值为 $f(x,y)$ 的黑白图像，马尔猜想的草图就是曲线

$$(f * \psi_\sigma)(x,y) = 0$$

其中

$$\psi_\sigma(x,y) = \frac{1}{\sigma^2}\psi\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{y}{\sigma}\right)$$

这里 $\sigma > 0$ 为可变尺度，这些曲线就是马尔视觉计算理论的零穿越理论.

实际上，因为函数 $\psi(x,y)$ 是偶函数，所以，卷积 $(f * \psi_\sigma)(x,y)$ 就是 f 关于马尔小波 ψ 的“二进”小波变换的系数，只不过尺度是 σ 而不是二进小波变换中的尺度 $s = 2$，而且，这里出现的是小波的二维形式.

综合这些分析知：马尔猜想的草图或者马尔视觉计算理论的零穿越理论，完全由二进小波变换的系数等于零来确定.

关于尺度 σ，由 Campbell(1990), Campbell 和 Robson(1968), Wilson(1980), Wilson 和 Bergen(1979), Wilson 和 Giese(1977), Marr 和 Hildreth(1980)等的实验证明，尺度变化是按几何级数增加的，即 $\sigma_j = (1.75)^j \sigma_0$. 这样，马尔猜想就可描述为：原始图像 $f(x,y)$ 完全由一系列满足

$$(f * \psi_{\sigma_j})(x,y) = 0$$

的曲线所决定.

显然，视觉图像的这种描述方法具有平移、旋转和伸缩不变性. 这是马尔猜想的不可多得的诱人之处.

在视觉计算理论中，零穿越理论提供了一种自然表示方法，可以把作为视觉信息的二维图像强度值 $f(x,y)$ 这样的连续表达形式，转化为一个离散的、符号化的表达形式，这种表达形式的迷人之处是，它很可能不会遗失信息. 但是支持这个观点的证据还不很可靠.

事实上，马尔猜想在最一般的条件下是不成立的. 不过，时至今日，马尔猜想的反例都是定义在无界区域上的. 这似乎暗示，马尔猜想对于定义在有界区域上的图像可能是正确的.

(β) 马尔猜想的反例

这里详细讨论马尔猜想在一维时的反例，最后顺便给出二维反例.

定义函数

$$f(x)=\sin x+\sum_{k=2}^{+\infty}\alpha_k \sin kx$$

其中级数系数系列 $\{\alpha_k;k=2,3,\cdots\}$ 满足如下限制条件:

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\left|\alpha_k\right|\cdot k^3<1$$

利用下述简单事实容易证明, 满足限制条件的任何系数 $\{\alpha_k;k=2,3,\cdots\}$ 使前述构造所得函数 $f(x)$ 具有相同的零穿越:

如果 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是两个连续函数, 并对某常数 $r\in[0,1)$ 有关系

$$|v(x)|\leqslant ru(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

那么

$$u(x)+v(x)=0\Leftrightarrow u(x)=0$$

选择如下滤波器函数:

$$g_\sigma(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

则

$$\left(f*g_\sigma\right)(x)=\sin x\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\sum_{k=2}^{+\infty}\alpha_k\sin(kx)\exp\left(-\frac{k^2\sigma^2}{2}\right)$$

由此可得

$$\begin{aligned}u(x)+v(x)&=\sin x\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\sum_{k=2}^{+\infty}k^2\sin(kx)\exp\left(-\frac{k^2\sigma^2}{2}\right)\\&=-\frac{d^2}{dx^2}(f*g_\sigma)(x)\end{aligned}$$

由关系 $|\sin kx|\leqslant k|\sin x|$ 可导出 $|v(x)|\leqslant r|u(x)|$ 对某一常数 r: $0\leqslant r<1$ 成立, 这里 $\sum_{k=2}^{+\infty}k^3|\alpha_k|<1$, 所以, 按照前述三角级数构造的函数 $f(x)$ 有相同的零穿越, 即 $\sin x\exp(-0.5\sigma^2)=0$ 的解集, 具体表示为集合 $\{m\pi;m\in\mathbb{Z}\}$. 但是, 显而易见, 函数 $f(x)$ 将随系数序列 $\{\alpha_k;k=2,3,\cdots\}$ 的变化发生变化. 这说明马尔猜想在这种情况下是不成立的.

仿照这个一维马尔猜想反例, 容易构造得到如下的马尔猜想二维反例:

$$f(x,y)=\sin x\sin y+\sum_{k=2}^{+\infty}\alpha_k\sin(kx)\sin(ky)$$

其中系数序列 $\{\alpha_k; k=2,3,\cdots\}$ 满足如下条件限制:

$$2\sum_{k=2}^{+\infty} k^4 \mid \alpha_k \mid < 1$$

(γ) Mallat 猜想

在马尔的视觉计算理论基础上，Mallat 改进马尔的猜想，得到了更精确的 Mallat 猜想和相应的 Mallat 算法，这两者都是很有名的.

Mallat 在研究图像处理的过程中发现，使用正交共轭滤波器和马尔的方法对数字图像所进行的处理，代表着对数字图像进行小波分析的两个极其独特的方面.

通过简单的计算可知：当 $\psi(x,y)$ 是马尔小波函数时，即

$$\psi(x,y) = -\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

则

$$\Delta(f * g_\sigma) = \frac{1}{\sigma^2}(f * g_\sigma)$$

这个事实启发 Mallat 利用正交共轭滤波器的研究成果改进马尔猜想. 为了具体起见，先考虑一维情形.

选取函数 $\theta(x)=(T*T)(x)$，$T(x)=\sup(0,1-\mid x\mid)$，对 $\delta>0$ 记

$$\theta_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\theta\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

那么，对任何信号 $f(x)$，它的零穿越发生在二阶导数 $(f*\theta_\delta)''(x)=0$ 和改变符号的点上. 为了便于使用小波金字塔算法，Mallat 选取 $\delta=2^{-j}, j\in\mathbb{Z}$，并用满足如下条件的点列 $(x_{q,j}, y_{q,j})$ 来编码信号 $f(x)$:

点 $x_{q,j}$ 是 $\delta=2^{-j}$ 时 $(f*\theta_\delta)''(x)$ 的零点，即 $(f*\theta_\delta)''(x_{q,j})=0$，而且二阶导函数 $d^2(f*\theta_\delta)/dx^2$ 在 $x_{q,j}$ 的左右改变符号，此时，$y_{q,j}=d(f*\theta_{2^{-j}})(x_{q,j})/dx$.

这些点列 $(x_{q,j}, y_{q,j})$ 正好是 $d(f*\theta_{2^{-j}})/dx$ 的极值点和相应的极值. 这些极值点可分为两大类：或者是 $f(x)$ 发生急剧变化的点，或者是变化极其缓慢的慢变点. 因为图像的剧变包含了图像信号的主要信息，掌握了它就把握住了图像的主要特征，所以，Mallat 猜想认为，$\mid d(f*\theta_{2^{-j}})/dx\mid$ 的局部极大值点和相应的极值足以描述原信号 $f(x)$.

显然，这种描述在变换之下是不变的，而且它比马尔猜想更精确. 因为，这不仅利用了信号的零穿越特性，而且，还保留了曲线穿越零点的斜率值，后者大致相

当于图像的隐藏的边缘效应.

Nishihara(1981)的经验说明：一个二维的经过滤波的图像可以由它的零穿越点和零穿越点的斜率值进行图像重构.

虽然如此，这个 Mallat 猜想在最一般的条件下却并不成立.

实际上可以构造如下的 Mallat 猜想的反例. 选择如下两个函数：

$$f_0(x)=\begin{cases}1+\cos x, & |x|\leqslant\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$$

$$f_1(x)=\begin{cases}f_0(x)+\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k\left(1+\cos(2k+1)x\right), & |x|\leqslant\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$$

其中系数序列 $\{\alpha_k;k=0,1,2,3,\cdots\}$ 满足如下三个限制条件：

(1) 对 $\forall m\geqslant1, |\alpha_k|\cdot k^m\to0(k\to+\infty)$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)^3|\alpha_k|<\frac{1}{8}$$

(2) 对 $\forall j\in\mathbb{Z}$，当 $\tau=2\pi\cdot2^{-j}$ 时，

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(2k+1)^3\alpha_k\cos[(2k+1)\tau]=0$$

(3) 最后，对 $\forall N\geqslant1$, 当 $\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k\beta_{k,l}=0, 1\leqslant l\leqslant N$ 时，$\sup_{k,l}|\beta_{k,l}|\leqslant C$,

那么，当 $0\leqslant\delta\leqslant2^{-4}\pi$ 时，$(f_1*\theta_\delta)''(x)$ 和 $(f_0*\theta_\delta)''(x)$ 有相同的零点. 条件(1)保证 $f_1*\theta_\delta$ 和 $f_0*\theta_\delta$ 的导数在这些点处也是相同的；当 $\delta\leqslant8\pi$ 时，零穿越发生在两个点 $x=\pm2\delta/3$ 或区间 $|x|\geqslant\pi+2\delta$ 内，且一阶导数在这些点处也是相同的；当 $2^{-4}\pi<\delta<8\pi$ 时，由于 $\delta_j=2\pi\cdot2^{-j}$，这相当于 $-1\leqslant j\leqslant4$，这时条件(3)使 $(f_1*\theta_\delta)(x)$ 和 $(f_0*\theta_\delta)(x)$ 的二阶导数的零点的位置相同，且它的一阶导数在这些点取值相等.

此外，完全可以构造与 $f_0(x)$ 差别特别显著的函数 $f_1(x)$，它满足前述的构造形式和相应的三个构造条件. 这说明马拉猜想在一般的条件下并不成立.

注释：①上述反例中 $f_0(x)$ 包含丰富的“高频成分”，它是由截断产生的，除此之外，它与马尔猜想的反例颇为相似；②如果 $f(x)$ 是阶跃不连续的函数，则 Mallat 猜想是正确的，因为 $\theta(x)$ 是对称的，所以，当尺度 δ 充分小时，其零穿越都发生在

$f(x)$ 的跳跃不连续点处，而光滑信号的一阶导数值又给出了原信号在该跳跃点处的跳跃高度，显然，原信号可由这二者完美地重构；③前述反例中 $\theta(x)$ 是三次样条函数，这时，当然 Mallat 猜想不成立，但这并未说明 $\theta(x)$ 的其他选择对 Mallat 猜想仍然这么无情，实际上，如果选取

$$\theta(x)=\begin{cases}1+\cos x, & |x|\leqslant\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$$

即著名的 Turky 窗，那么，对一切紧支撑信号 $f(x)$，重构都是完全的，只不过重构是不稳定的.

然而，让人感到意外的是，虽然 Mallat 猜想在一般条件下是不成立的，但在几乎所有的实际应用中，Mallat 算法却表现出良好的计算行为，效果很好.

(δ) 二维 Mallat 猜想和 Mallat 算法

选择特定的 $\theta_\delta(x,y)$:

$$\theta_\delta(x,y)=\theta_\delta(x)\theta_\delta(y)=\delta^{-2}\theta(\delta^{-1}x)\theta(\delta^{-1}y)$$

对二维图像 $f(x,y)$，按照尺度 $\delta_j=2^{-j}, j\in\mathbb{Z}$ 求取卷积 $(f*\theta_\delta)$.

在接下来的分析中，仍然使用在一维中用过的函数 $\theta(x)=(T*T)(x)$，这是一个三次样条，而 $T(x)=\sup(0,1-|x|)$ 是三角形函数.

二维 Mallat 猜想是：$(f*\theta_{\delta_j})$ 的梯度模的局部极大值点 $(x_{q,j},y_{q,j})$ 及相应点上的梯度 $z_{q,j}=(\partial(f*\theta_{\delta_j})/\partial x,\partial(f*\theta_{\delta_j})/\partial y)(x_{q,j},y_{q,j})$ 全体，描述了图像 $f(x,y)$ 的图形特征.

当然，正如在一维时所得，二维 Mallat 猜想也是不成立的，反例如下:

$$f(x,y)=f_1(x)+f_1(y)$$

其中 $f_1(x)$ 是一维时的反例函数:

$$f_1(x)=\begin{cases}f_0(x)+\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k\big(1+\cos(2k+1)x\big), & |x|\leqslant\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$$

而且

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)^3|\alpha_k|<\frac{1}{8}$$

显然成立如下不等式:

$$1+\cos(2k+1)x\leqslant(2k+1)^2(1+\cos x)$$

从而

$$\frac{7}{8}f_0(x)\leqslant f_1(x)\leqslant\frac{9}{8}f_0(x)$$

于是

$$\frac{7}{8}(f_0(x)+f_0(y))\leqslant f_1(x,y)\leqslant\frac{9}{8}(f_0(x)+f_0(y))$$

即 $f(x,y)$ 必支撑在 $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ 上. 最后

$$f(x,y)*\theta_\delta(x)\theta_\delta(y)=f_1(x)*\theta_\delta(x)+f_1(y)*\theta_\delta(y)$$

的梯度向量是

$$z(x,y)=\left(\frac{d}{dx}(f_1*\theta_\delta)(x),\frac{d}{dy}(f_1*\theta_\delta)(y)\right)$$

其模满足

$$|z(x,y)|^2=\left|\frac{d}{dx}(f_1*\theta_\delta)(x)\right|^2+\left|\frac{d}{dy}(f_1*\theta_\delta)(y)\right|^2$$

当且仅当 $|(f_1*\theta_\delta)'(x)|$ 和 $|(f_1*\theta_\delta)'(y)|$ 都取极大时, $|z(x,y)|$ 才取极大. 回顾前述分析可知, 存在许多完全不同的 $f_1(x)$, 使 $|(f_1*\theta_\delta)'(x)|$ 的极值点和相应的 $(f_1*\theta_\delta)'(x)$ 的值都是相同的, 并且, 当 $\delta=2\pi\cdot 2^{-j}, j\in\mathbb{Z}$ 取离散尺度时, 这些结论仍然成立. 因此, 在这些条件下, 二维 Mallat 猜想是否正确还是悬而未决的.

(ε) Mallat 重构算法

这里以一维重构为例, 说明 Mallat 重构算法. 为了清楚起见, 引进下述各符号, 并选取磨光算子 $\theta(x)$ 为高斯函数, 即

$$\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

而且

$$\psi^{(1)}(x)=\theta'(x),\quad \psi^{(2)}(x)=\theta''(x)$$

以及

$$\begin{cases}W_s^{(1)}f(x)=(f*\psi_s^{(1)})(x)=\dfrac{1}{s}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(u)\psi^{(1)}\left(\frac{x-u}{s}\right)du\\[2ex] W_s^{(2)}f(x)=(f*\psi_s^{(2)})(x)=\dfrac{1}{s}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(u)\psi^{(2)}\left(\frac{x-u}{s}\right)du\end{cases}$$

容易验证

$$W_s^{(1)}f(x)=[f*(sd\theta_s\,/\,dx)](x)=s\frac{d}{dx}(f*\theta_s)(x)$$
$$W_s^{(2)}f(x)=[f*(s^2d^2\theta_s\,/\,dx^2)](x)=s^2\frac{d^2}{dx^2}(f*\theta_s)(x)$$

一维 Mallat 猜想是说：随尺度 s 变化时，$\left|(W_s^{(1)}f)(x)\right|$ 的极大值点以及相应点处 $(W_s^{(1)}f)(x)$ 的数值，可描述原信号 $f(x)$，即由此条件可重构 $f(x)$.

这里研究的问题是给出重构 $f(x)$ 的算法. 在后续论述中，尺度 s 只取二进离散化 $s_j=2^j$，这时，得到 $f(x)$ 的二进小波变换为

$$W_1\text{:}\ f\to W_1f=\{(W_{2^j}^{(1)}f)(x);j\in\mathbb{Z}\}$$
$$W_2\text{:}\ f\to W_2f=\{(W_{2^j}^{(2)}f)(x);j\in\mathbb{Z}\}$$

这样一来，上述问题可以转化为：

设 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，$W_1f$ 为其二进小波变换，由 $|(W_{2^j}^{(1)}f)(x)|$ 的极大值和相应点处 $(W_{2^j}^{(1)}f)(x)$ 的数值，如何重构原信号 $f(x)$？

把这个问题分成独立的两部分：

第一部分：由 $|(W_{2^j}^{(1)}f)(x)|$ 的极大值点和相应点处 $(W_{2^j}^{(1)}f)(x)$ 的值重构 $f(x)$ 的二进小波变换

$$W_1f=\{(W_{2^j}^{(1)}f)(x);j\in\mathbb{Z}\}$$

第二部分：由 $f(x)$ 的二进小波变换 W_1f，即

$$W_1f=\{(W_{2^j}^{(1)}f)(x);j\in\mathbb{Z}\}$$

重构原信号 $f(x)$，并要求重构是稳定的.

相对而言，第二部分更容易一些. 现在的研究方法是先易后难：对于第二部分问题，由定义知

$$[\mathscr{F}(W_{2^j}^{(1)}f)](\omega)=(\mathscr{F}f)(\omega)\cdot(\mathscr{F}\psi^{(1)})(2^j\omega),\quad j\in\mathbb{Z}$$

其中 $[\mathscr{F}(W_{2^j}^{(1)}f)](\omega)$，$(\mathscr{F}f)(\omega)$ 和 $(\mathscr{F}\psi^{(1)})(2^j\omega)$ 分别是 $(W_{2^j}^{(1)}f)(x)$，$f(x)$ 和 $\psi_{2^j}^{(1)}(x)=2^{-j}\psi^{(1)}(2^{-j}x)$ 的傅里叶变换. 因为要求由 $W_1f=\{(W_{2^j}^{(1)}f)(x);j\in\mathbb{Z}\}$ 能够稳定地重构 $f(x)$，所以，必存在常数 $0<A\leqslant B<+\infty$，满足

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \| W_{2^j}^{(1)} f\|^2 \leqslant B\|f\|^2$$

或者相应有

$$A \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} |(\mathscr{F}\psi^{(1)})(2^j\omega)|^2 \leqslant B, \quad \forall\omega\in\mathbb{R}$$

在这些条件下，选择“重构小波” $\eta(x)$ 满足

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (\mathscr{F}\psi^{(1)})(2^j\omega)(\mathscr{F}\eta)(2^j\omega) = 1$$

比如取

$$(\mathscr{F}\eta)(\omega) = \frac{[(\mathscr{F}\psi^{(1)})(\omega)]^*}{\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\,(\mathscr{F}\psi^{(1)})(2^j\omega)\,|^2}$$

即可．于是得到 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的重构公式:

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} [(W_{2^j}^{(1)} f) * \eta_{2^j}](x)$$

这就解决了由二进小波变换稳定地重构原信号问题.

现在回到第一部分研究的问题，独立地表述为：设 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，将它的二进小波变换表示为 $Wf = \{(W_{2^j}f)(x); j\in\mathbb{Z}\}$，已知 $|(W_{2^j}f)(x)|$ 只在 $\{x_n^j; n\in\mathbb{Z}\}$ 取极大值，现要求寻找的 $h(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 满足

A) $\forall j\in\mathbb{Z}$，$|(W_{2^j}h)(x)|$ 在 $\{x_n^j; n\in\mathbb{Z}\}$ 取极大值;

B) $\forall (j,n)\in\mathbb{Z}^2$，恒有

$$(W_{2^j}h)(x_n^j) = (W_{2^j}f)(x_n^j)$$

或者将卷积形式的 B) 改述为内积形式：$\forall (j,n)\in\mathbb{Z}^2$，总有

$$\left\langle f, \psi_{2^j}(x_n^j - \cdot)\right\rangle = \left\langle h, \psi_{2^j}(x_n^j - \cdot)\right\rangle$$

引入函数子空间记号

$$\mathscr{U} = \mathrm{Closespan}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}\{\psi_{2^j}(x_n^j - x); (j,n)\in\mathbb{Z}^2\}$$

则对函数 $h(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的要求 B) 可以进一步改述为函数子空间关系：函数 $f(x)$ 和 $h(x)$ 在子空间 $\mathscr{U}$ 上的正交投影相等．设

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \mathscr{U} \oplus \mathscr{D}, \quad \text{而且} \quad \mathscr{U}\perp\mathscr{D}$$

则函数子空间形式的要求 B)转化为如下的函数分解关系:

$$h(x) = f(x) + g(x), \quad g\in\mathscr{D}$$

由此说明，函数 $h(x)$ 一般不是唯一的，只有当 $\mathscr{D}=\{0\}$ 时，才有 $h(x)=f(x)$. 当 $\mathscr{D}\neq\{0\}$ 时，这里建立的 $f(x)$ 重构公式将不是唯一的.

再来讨论对函数 $h(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的第一个要求，即 A). 为了便于数值计算，将 A) 近似为：选取 $h(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，使得

$$|h|^2=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\{\|W_{2^j}h\|+2^{2j}\left\|\frac{d}{dx}W_{2^j}h\right\|^2\right\}\to\min$$

或者表示为

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|W_{2^j}h\|\to\min,\quad 而且\ \sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{2j}\left\|\frac{d}{dx}W_{2^j}h\right\|^2\to\min$$

直观地说，这是要求 $|(W_{2^j}h)(x)|$ 的平均值尽量小，且 $|(W_{2^j}h)'(x)|^2$ 的平均值也尽量小. 在 A) 满足时，前者基本上保证了 $|(W_{2^j}h)(x)|$ 在 $\{x_n^j;n\in\mathbb{Z}\}$ 取极大值，后者保证 $|(W_{2^j}f)(x)|$ 在 $\{x_n^j;n\in\mathbb{Z}\}$ 以外尽量不出现极大值，这样，可以最终保证 A) 成立.

假设相应的二进小波 $\psi(x)$ 满足：存在常数 $0<C\leqslant D<+\infty$，使得

$$C\leqslant\sum_{j\in\mathbb{Z}}(|(\mathscr{F}\psi)(2^j\omega)|^2+|(\mathscr{F}\psi')(2^j\omega)|^2)\leqslant D$$

其中 $(\mathscr{F}\psi)(\omega)$ 和 $(\mathscr{F}\psi')(\omega)$ 分别是小波函数 $\psi(x)$ 及其导函数 $\psi'(x)$ 的傅里叶变换. 那么，当 $h(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 时，成立如下不等式：

$$C\|h\|^2\leqslant|h|^2\leqslant D\|h\|^2$$

即 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中的两个范数 $\|\bullet\|$ 与 $|\bullet|$ 是等价的. 这样一来，原问题就变成寻找形如式 $h(x)=f(x)+g(x),\ g\in\mathscr{D}$ 的函数 $h(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，能够极小化 $|h|$，即

$$|h|^2=\{|f+g|^2;g\in\mathscr{D}\}\to\min$$

这里尝试性给出一种重建 $f(x)$ 的计算方法：即先由交替投影法求出 $h(x)$ 的二进小波变换，之后，再据此重构原信号 $f(x)$.

对于平方可积函数序列 $g=\{g_j(x);j\in\mathbb{Z}\}$，其中 $g_j(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}),j\in\mathbb{Z}$，定义函数序列 g 的范数 $|g|$ 满足如下公式：

$$|g|^2=|\{g_j;j\in\mathbb{Z}\}|^2=\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\|g_j(x)\|^2+2^{2j}\|g_j'(x)\|^2)$$

可以验证上述定义满足范数公理的要求.

定义平方可积函数序列构成的如下 3 个集合：

$$\mathscr{K} = \{g = \{g_j(x); j \in \mathbb{Z}\}; |g| < +\infty\}$$

$$\mathscr{V} = \{Wf = \{(W_{2^j}f)(x); j \in \mathbb{Z}\}; f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})\}$$

$$\mathscr{W} = \{g \in \mathscr{K}; g_j(x_n^j) = (W_{2^j}f)(x_n^j), (n, j) \in \mathbb{Z}^2\}$$

则显然有关系

$$\mathscr{V} \subset \mathscr{K}, \quad \mathscr{W} \subset \mathscr{K}$$

而且在 $\mathscr{K}$ 中范数 $|\bullet|$ 下，$\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{K}$ 的闭子集. 这时，满足要求 A) 的二进小波函数全体正好是 $\mathscr{V} \cap \mathscr{W} = \mathscr{A}$，因此，下面的任务就是在 $\mathscr{A}$ 中极小化范数 $|\bullet|$.

对 $\forall g = \{g_j(x); j \in \mathbb{Z}\} \in \mathscr{K}$，定义 W^{-1}，即

$$(W^{-1}g)(x) = W^{-1}(\{g_j; j \in Z\})(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (g_j * \eta_{2^j})(x)$$

其中 $\eta(x)$ 是前述已经引入的“重构小波”. 显然 $W \cdot W^{-1} = P_{\mathscr{V}}$ 是 $\mathscr{K}$ 到 $\mathscr{V}$ 的线性算子，在 $\mathscr{V}$ 上的限制是恒等算子.

对于任意的 $g = \{g_j; j \in \mathbb{Z}\} \in \mathscr{K}, P_{\mathscr{V}}g \in \mathscr{V}$，即 $P_{\mathscr{V}}$ 是 $\mathscr{K}$ 到 $\mathscr{V}$ 的投影算子，其算子核为

$$P_{\ell,j}(x) = (\eta_{2^\ell} * \psi_{2^j})(x)$$

于是，当且仅当 $P_{\ell,j}(x)$ 是对称时，$P_{\mathscr{V}}$ 是自共轭算子. 这时，当原来的二进小波 $\psi(x)$ 或者对称或者反对称时，可以导出 $P_{\mathscr{V}}$ 是正交投影.

现在定义正交投影算子 $P_{\mathscr{W}} : \mathscr{K} \to \mathscr{W}$. 对于 $\forall g = \{g_j; j \in \mathbb{Z}\} \in \mathscr{K}$，假定 $P_{\mathscr{W}}(g) = \mathfrak{h} = \{h_j(x); j \in \mathbb{Z}\} \in \mathscr{W}$，令

$$\varepsilon_j(x) = (h_j - g_j)(x)$$

选取函数序列 $\mathfrak{h} = \{h_j(x); j \in \mathbb{Z}\} \in \mathscr{W}$，满足如下的最小化要求:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(||\varepsilon_j(x)||^2 + 2^{2j}||\varepsilon_j'(x)||^2\right) \to \min$$

为此，作为一种求解途径，单独选取函数 $h_j(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), j \in \mathbb{Z}$，满足

$$||\varepsilon_j(x)||^2 + 2^{2j}||\varepsilon_j'(x)||^2 \to \min$$

设 x_0 和 x_1 为 $|(W_{2^j}f)(x)|$ 的两相邻极大值点，则

$$\begin{cases} \varepsilon_j(x_0) = (W_{2^j}f - g_j)(x_0) \\ \varepsilon_j(x_1) = (W_{2^j}f - g_j)(x_1) \end{cases}$$

这样，上述极小化问题等价转换为

$$\int_{\min(x_0,x_1)}^{\max(x_0,x_1)}[|\varepsilon_j(x)|^2+2^{2j}|\varepsilon_j'(x)|^2]\,\mathrm{d}x\to\min$$

此时，相应的 Euler 方程为

$$\varepsilon_j(x)-2^{2j}\varepsilon_j'(x)=0,\quad x\in(\min(x_0,x_1),\max(x_0,x_1))$$

求解这个微分方程容易得到其解具有如下结构:

$$\varepsilon_j(x)=\alpha\exp(2^jx)+\beta\exp(-2^jx)$$

并要求 α 与 β 使得 $\varepsilon_j(x)$ 满足上述的两个边界条件，这时

$$\begin{aligned}P_{\mathscr{W}}:\ \mathscr{K}&\to\mathscr{W}\\ g&\mapsto\mathfrak{h}\\ g&=\{g_j;j\in\mathbb{Z}\}\\ \mathfrak{h}&=\{h_j;j\in\mathbb{Z}\}=\{(g_j+\varepsilon_j);j\in\mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

定义了从 $\mathscr{K}$ 到 $\mathscr{W}$ 的正交投影算子. 最后定义算子

$$P=P_{\mathscr{V}}\cdot P_{\mathscr{W}}$$

并且，$n=3,4,\cdots$,

$$\begin{cases}P^{(2)}=P\cdot P\\ P^{(n)}=P\cdot P^{(n-1)}\end{cases}$$

可以证明: 对于 $\forall g=\{g_j;j\in\mathbb{Z}\}\in\mathscr{K}$, 有

$$\lim_{n\to+\infty}P^{(n)}(g)=P_{\mathscr{A}}(g)$$

其中 $P_{\mathscr{A}}:\mathscr{K}\to\mathscr{A}$ 是正交投影算子.

具体计算方法是: 取 g 是 $\mathscr{K}$ 中的零元素，则它在 $\mathscr{A}$ 上的正交投影 $P_{\mathscr{A}}(g)$，即为在范数 $|\!\cdot\!|$ 之下 $\mathscr{A}$ 中的极小化元素，也就是 $f(x)$ 的近似的二进小波变换列 $\{(W_{2^j}f)(x);j\in\mathbb{Z}\}$. 之后，再利用二进小波逆变换重构原信号 $f(x)$.

Mallat 重构算法到此结束. Mallat(1988, 1989a, 1989b, 1991)给出了数值算例，此处容不赘述. 此外，二维 Mallat 重构算法与一维形式相比较并没有实质上的不同，只是形式更复杂一些，有兴趣的读者请阅读文后所列参考文献中 Mallat 和 Hwang(1992)的论文. 更多关联研究可以参考王建中(1992), 姚国正和汪云九(1984), 迈耶(1992), 迈耶和科伊夫曼(1994), 冉启文(1995, 2001), 冉启文和谭立英(2002), Cetin 和 Ansari(1994), Mallat 和 Zhong(1991, 1992), Zhong(1990)等相关文献.

8.4 周期小波与小波级数

这里将研究周期小波的构造和简单性质，尝试说明即使在严格周期现象的研究中，和被普遍认为研究周期现象"最有效的"傅里叶级数方法相比，周期小波和小波级数仍然具有其独特的优势.

众所周知，傅里叶级数是用于表示周期函数，而小波级数用于表示平方可积或者在无穷远处较快衰减为零的函数，似乎这种比较没有意义. 为了公平比较小波级数和傅里叶级数，需要把小波函数:

$$2^{j/2}\psi(2^j x-k) \quad (k\in\mathbb{Z}, j\geqslant 0)$$

进行周期化，比如以 1 为周期的周期化，除此之外，为了保证基的需要把恒等于 1 的函数额外添加进来，经过这样的处理，小波级数的显著优势就明确显现出来了，其中最意外的，而且也是最令人吃惊的结果是，"满项的"小波级数(即大多数小波系数非零)代表了十分异常的函数(比如分形函数)；而"正常的"函数的小波级数却是"有洞的"或"缺项的"(即小波级数非零系数的分布是稀疏的). 回顾傅里叶级数理论可知，大多数"正常的"函数的傅里叶级数是"满项的"，而"缺项的"傅里叶级数代表着病态函数(比如魏尔斯特拉斯(Weierstrass)函数和黎曼函数等). 这似乎表明小波级数是对傅里叶级数的广泛的、强有力的升级：小波级数分析是傅里叶级数的局部化的、多尺度的升级模式，其突出的优越特征在于小波级数系数的显著取值直接地而且是集中地落在所研究函数、算子或者分布的奇异支撑集合上，除此之外，函数、算子或者分布是光滑的或者是无穷次可微的，其小波级数系数可以忽略不计.

8.4.1 周期小波

设 $(\{V_j; j\in\mathbb{Z}\},\varphi(x))$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的一个 r 正则多分辨率分析，即其中的尺度子空间列与尺度函数 $\varphi(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 满足如下六个要求，即:

❶ 单调性: $V_J\subseteq V_{J+1}, J\in\mathbb{Z}$；

❷ 稠密性: $\overline{\left[\bigcup_{J\in\mathbb{Z}} V_J\right]}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$；

❸ 唯一性: $\bigcap_{J\in\mathbb{Z}} V_J=\{0\}$；

❹ 伸缩性: $f(x)\in V_J \Leftrightarrow f(2x)\in V_{J+1}, J\in\mathbb{Z}$；

❺ 构造性: $\{\varphi(x-k); k\in\mathbb{Z}\}$ 构成 V_0 的规范正交基；

❻ 正则性: 对任意自然数 m，存在有限实数 γ_m，满足不等式:

$$|\varphi^{(k)}(x)\leqslant\gamma_m(1+|x|)^{-m},\quad k=0,1,\cdots,r;\quad x\in\mathbb{R}$$

在后面的讨论中总假设 $r\geqslant 1$．当 $1\leqslant p\leqslant 2$ 时，引入符号 V_j^p 表示 V_j 与 $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ 的交集合 $V_j^p=V_j\cap\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$；当 $2\leqslant p<\infty$ 时，V_j^p 则是 V_j 在 $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ 模下的完备化．最后当 $p=\infty$ 时，赋予 $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ 的拓扑是 $\sigma(\mathcal{L}^\infty,\mathcal{L}^1)$ 拓扑，而 V_j^∞ 就是 V_j 在此拓扑下的完备化．

利用这些约定，容易验证：若 $\varphi(x)$ 是多分辨率分析的尺度函数，则函数空间 V_0^∞ 具有如下等价描述：

$$f(x)\in V_0^\infty\Leftrightarrow f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_k\varphi(x-k),\quad\{c(k);k\in\mathbb{Z}\}\in\ell^\infty(\mathbb{Z})$$

或者

$$f(x)\in V_0^\infty\Leftrightarrow f(2^jx)\in V_j^\infty$$

下面陆续完成周期小波的构造并研究周期小波的性质.

(α) 周期化多分辨率分析

引入记号 $\mathscr{P}_j\subset V_j^\infty$ 表示由周期为 1 的函数组成的子空间. 可以得到如下尺度子空间周期化结果.

引理 8.1　当 $j\leqslant 0$ 时，$\mathscr{P}_j$ 全部相等而且只由常数函数组成；当 $j>0$ 时，函数子空间 $\mathscr{P}_j$ 的维数是 2^j．

事实上，首先注意到，因为

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi(x-k)=1$$

所以，常数函数属于所有的子空间 V_j^∞．

利用多分辨率分析定义中尺度子空间序列 $\{V_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 单调性的要求，即 $V_j\subseteq V_{j+1},j\in\mathbb{Z}$，容易验证 $V_j^\infty\subset V_{j+1}^\infty,j\in\mathbb{Z}$，因此，假如所有的函数 $f(x)\in\mathscr{P}_0$ 都是一个常数，那么，引理的第一个结论就得到证明.

实际上，对于任意的函数 $f(x)\in\mathscr{P}_0$，写出它的父小波函数(尺度函数)级数表达式:

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c(k)\varphi(x-k)$$

其中，$k \in \mathbb{Z}$,

$$c(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\varphi}(x-k)dx$$

因为，$f(x) \in \mathscr{P}_0$ 是周期为 1 的函数，所以，上述父小波级数系数计算公式中的积分，在整数平移积分变量代换以及 $f(x) = f(x-k)$，$k \in \mathbb{Z}$ 的共同作用下，这个积分的数值与整数 $k \in \mathbb{Z}$ 无关，即父小波级数系数序列 $\{c(k); k \in \mathbb{Z}\}$ 是恒常数序列 $c(k) = \zeta$，$k \in \mathbb{Z}$，将此结果代入父小波级数中可得 $f(x)$ 就是这个常数 $f(x) = \zeta$.

此外，在 $j > 0$ 的条件下，利用多分辨率分析尺度子空间 V_j 的尺度函数伸缩平移规范正交基 $\{2^{j/2}\varphi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$，如果 $f(x) \in V_j$，那么，成立如下的正交尺度函数级数表达式:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \cdot 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$$

其中，级数系数 $c(k)$ 可以表示并进一步演算化简如下:

$$\begin{aligned} c(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times 2^{j/2}\overline{\varphi}(2^j x - k)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-1) \times 2^{j/2}\overline{\varphi}(2^j(y-1) - k)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \times 2^{j/2}\overline{\varphi}(2^j y - (k+2^j))dy \\ &= c(k+2^j), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

在上述演算中利用了函数 $f(y)$ 的周期性 $f(y-1) = f(y), y \in \mathbb{R}$. 由此说明，正交尺度函数级数系数序列 $\{c(k); k \in \mathbb{Z}\}$ 是周期为 2^j 的序列.

容易验证相反的关系也成立. 这样就证明了函数空间 $\mathscr{P}_j$ 的维数是 2^j.

将定义在整个实直线 $\mathbb{R}$ 上的周期为 1 的连续函数全体组成的线性空间记为 $\mathscr{B}$，那么，$\mathscr{B}$ 是一个 Banach 空间. 容易证明前面定义的周期为 1 的函数子空间系列 $\{\mathscr{P}_j; j \in \mathbb{Z}\}$ 在 $\mathscr{B}$ 中是稠密的.

引理 8.2 $\overline{\left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathscr{P}_j\right)} = \mathscr{B}$，即函数子空间系列 $\{\mathscr{P}_j; j \in \mathbb{Z}\}$ 在 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 中是稠密的.

事实上，按照如下方式定义正交投影算子 $\mathbb{E}_j$：$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to V_j$，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_j:\ & \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to V_j \\ & f(y) \mapsto g(x) = (\mathbb{E}_j f)(x) \\ & g(x) = (\mathbb{E}_j f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_j(x,y) f(y)dy \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} E_j(x,y) = 2^j E(2^j x, 2^j y) \\ E(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x-k)\overline{\varphi}(y-k) \end{cases}$$

利用多分辨率分析中尺度函数的假设可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(x,y)dy = 1$$

而且存在有限的正实数 γ, 满足如下不等式:

$$|E(x,y)| \leqslant \gamma(1+|x-y|)^{-2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

那么, 当 $f(x)$ 在整个实直线 $\mathbb{R}$ 上有界一致连续时, 则 $\|f(x)-(\mathbb{E}_j f)(x)\|_\infty \to 0$, 其中 $j\to+\infty$. 除此之外, 如果 $f(x)$ 是周期为 1 的函数, 那么, 对任意的自然数 j, 有 $(\mathbb{E}_j f)(x) \in \mathscr{P}_j$, 这样得到 $\{\mathscr{P}_j; j\in\mathbb{Z}\}$ 在 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 中的稠密性.

仿照习惯用法, 使用符号 $\mathbb{T}$ 表示商群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, 并由此定义实直线上的函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, $C^\alpha(\mathbb{T})$ 等, 它们分别表示 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (平方可积函数空间), $C^\alpha(\mathbb{R})$ (Hölder 空间) 中周期为 1 的函数组成的空间, 实际上就是它们的周期化.

仿照多分辨率分析的表述, 将前述构造得到的单调函数子空间系列或者嵌套函数子空间系列 $\{\mathscr{P}_j; j\in\mathbb{N}\}$ 称为 $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ 的 r 正则多分辨率分析.

(β) 周期尺度函数

定义记号 $\Gamma_j = \{\mathrm{mod}(2^{-j}k,1); k\in\mathbb{N}\}$, 那么, 当 $j\in\mathbb{N}$ 时, Γ_j 是一个有限群, 而且, 容易验证, $\mathscr{P}_j$ 在 Γ_j 作用下是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ 的一个不变子空间.

当 $j\in\mathbb{N}$ 时, 设 $\varphi_j(x)$ 表示父小波函数 $2^{j/2}\varphi(2^j(x-k))$ 的周期化:

$$\varphi_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{j/2}\varphi(2^j(x-k))$$

那么可以证明 $\varphi_j(x)\in\mathscr{P}_j$.

引理 8.3　在 Γ_j 的作用下, $\varphi_j(x)$ 的轨道(平移族)是 $\mathscr{P}_j$ 的一组规范正交基.

这是一个简单的积分演算练习. 在 $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ 的内积意义下, 验证周期化平移父小波函数系 $\{\varphi_j(x-2^{-j}m); 0\leqslant m<2^j\}$ 是规范正交函数系即可, 因为, $\mathscr{P}_j$ 的维数正好是网格 Γ_j 的点数(元素个数), 这样, $\{\varphi_j(x-2^{-j}m); 0\leqslant m<2^j\}$ 就是构成 $\mathscr{P}_j$ 的一个规范正交基.

对于任意的 (m,m')，$0 \leqslant m < 2^j$，$0 \leqslant m' < 2^j$，直接演算得到

$$\begin{aligned}&\left\langle \varphi_j(x-2^{-j}m), \varphi_j(x-2^{-j}m') \right\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{k'\in\mathbb{Z}} 2^j \int_0^1 \varphi(2^j x - 2^j k - m)\overline{\varphi}(2^j x - 2^j k' - m')dx \\ &= \sum_{k''\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y-m)\overline{\varphi}(y + 2^j k'' - m')dy \\ &= \delta(m-m')\end{aligned}$$

在演算中，因为 $0 \leqslant x < 1$，$k \in \mathbb{Z}$，先对 $k \in \mathbb{Z}$ 求和并设置 $2^j(x-k) = y$ 的积分变量代换，这样，对 $y \in \mathbb{R}$ 的积分就分布在整个实数直线上，而且，$k'' = k - k'$. 最终的积分表现为多分辨率分析中父小波或者尺度函数整数平移函数系的规范正交性.

(γ) 周期小波函数

仿照多分辨率分析中小波子空间的定义，定义 $\mathscr{Q}_j$ 满足

$$\mathscr{P}_{j+1} = \mathscr{Q}_j \bigoplus \mathscr{P}_j,\quad \mathscr{Q}_j \perp \mathscr{P}_j$$

即 $\mathscr{Q}_j$ 形式上是子空间 $\mathscr{P}_j$ 在 $\mathscr{P}_{j+1}$ 中的正交补子空间，实际上，$\mathscr{Q}_j$ 就是多分辨率分析中小波子空间 W_j 的周期化.

按照如下方式以周期 1 周期化小波函数 $2^{j/2}\psi(2^j(x-k))$ 为函数 $\psi_j(x)$：

$$\psi_j(x) = 2^{j/2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi(2^j(x-k))$$

那么，十分自然地得到周期函数 $\psi_j(x)$ 按照尺度 $s = 2^{-j}$ 整倍数的平移函数系是规范正交函数系的结果，而且，它应该就是 $\mathscr{Q}_j$ 的一个规范正交基，即成立如下的引理.

引理 8.4　对任意自然数 j，平移函数系 $\{\psi^{(j,k)}(x) = \psi_j(x - 2^{-j}k); 0 \leqslant k < 2^j\}$ 构成函数子空间 $\mathscr{Q}_j$ 的一个规范正交基.

建议读者完成这个引理的验证. 值得注意的是，$\mathscr{Q}_j$ 的维数也是 2^j.

8.4.2　周期小波级数

回顾多分辨率分析中，函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的正交直和分解：

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = V_j \bigoplus \left(\bigoplus_{m=j}^{+\infty} W_m\right) = V_0 \bigoplus \left(\bigoplus_{m=0}^{+\infty} W_m\right)$$

在周期化条件下，周期化平方可积函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ 存在相同的正交直和分解：

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{T}) = \mathscr{P}_0 \oplus \mathscr{Q}_0 \oplus \mathscr{Q}_1 \oplus \mathscr{Q}_2 \oplus \cdots$$

这个结果的证明留给读者作为练习.

(α) 周期小波规范正交基

规范正交函数系 $\{1, \psi^{(j,k)}(x) = \psi_j(x - 2^{-j}k); 0 \leqslant k < 2^j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ 构成周期化平方可积函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ 的一个规范正交基.

按照字典序构造函数序列 $\{\zeta_0(x), \zeta_1(x), \cdots, \zeta_n(x), \cdots\}$:

$$\begin{aligned}
&\zeta_0(x) = 1\\
&\zeta_n(x) = \psi^{(j,k)}(x) = \psi_j(x - 2^{-j}k)\\
&\quad n = 2^j + k, 0 \leqslant k < 2^j\\
&\quad j = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

那么, 规范正交函数系 $\zeta_0(x), \zeta_1(x), \cdots, \zeta_n(x), \cdots$ 构成周期平方可积函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ 的规范正交基, 称之为周期小波规范正交基. 详细罗列如下: $\zeta_0(x) = 1$, 而且

$n = 1,$	$j = 0, k = 0,$	$\zeta_1(x) = \psi^{(0,0)}(x) = \psi_0(x)$
$n = 2,$	$j = 1, k = 0,$	$\zeta_2(x) = \psi^{(1,0)}(x) = \psi_1(x)$
$n = 3,$	$k = 1,$	$\zeta_3(x) = \psi^{(1,1)}(x) = \psi_1(x - 2^{-1})$
$n = 4,$	$j = 2, k = 0,$	$\zeta_4(x) = \psi^{(2,0)}(x) = \psi_2(x)$
$n = 5,$	$k = 1,$	$\zeta_5(x) = \psi^{(2,1)}(x) = \psi_2(x - 2^{-2})$
$n = 6,$	$k = 2,$	$\zeta_6(x) = \psi^{(2,2)}(x) = \psi_2(x - 2^{-2} \times 2)$
$n = 7,$	$k = 3,$	$\zeta_7(x) = \psi^{(2,3)}(x) = \psi_2(x - 2^{-2} \times 3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

假设 $\mathscr{C}$ 是一个 Banach 空间, 而且, $e_0, e_1, \cdots, e_k, \cdots$ 是空间 $\mathscr{C}$ 中的一个向量序列. 如果对所有的 $x \in \mathscr{C}$, 存在唯一的系数列 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k, \cdots$, 满足

$$\lim_{m \to +\infty} || x - (\alpha_0 e_0 + \cdots + \alpha_m e_m) ||_{\mathscr{C}} = 0$$

则称这个向量序列是空间 $\mathscr{C}$ 的一个 Schauder 基, 同时, $x \in \mathscr{C}$ 可以被写成级数:

$$x = \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m e_m = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots$$

此外, 如果这个级数是可求和的, 即任意置换无穷级数中各项的顺序后, 所得无穷级数仍收敛, 而且, 仍然收敛于向量 x, 则称这个 Schauder 基是无条件的, 或者说

这是一个无条件 Schauder 基.

(β) 周期小波级数

在这些预备工作基础上，将周期规范正交小波基和周期小波级数的几个重要结果集中罗列如下.

定理 8.1　假设 $(\{V_j; j\in\mathbb{Z}\},\varphi(x))$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的一个 r 正则多分辨率分析，则利用相应尺度子空间序列 $\{V_j; j\in\mathbb{Z}\}$ 、父小波(尺度)函数 $\varphi(x)$ 和母小波 $\psi(x)$ 构造得到的周期规范正交小波序列 $\{\zeta_m(x); m\in\mathbb{N}\}$ 具有如下性质:

(Ⅰ)　$\{\zeta_m(x); m\in\mathbb{N}\}$ 是函数空间 $C(\mathbb{T})$ 和 $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ 的 Schauder 基;

(Ⅱ)　当 $0\leqslant k\leqslant r$ 时，$\{\zeta_m(x); m\in\mathbb{N}\}$ 是 $C^k(\mathbb{T})$ 的 Schauder 基;

(Ⅲ)　当 $0<\alpha<1$ 时，$\{\zeta_m(x); m\in\mathbb{N}\}$ 是 Hölder 空间 C^α 的无条件基;

(Ⅳ)　当 $r\geqslant 2$ 时，$\{\zeta_m(x); m\in\mathbb{N}\}$ 是 Zygmund 类 Λ_* 的无条件基;

(Ⅴ)　当 $1<p<\infty$ 时，$\{\zeta_m(x); m\in\mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ 空间的无条件基;

(Ⅵ)　函数系 $\{\zeta_m(x); m\in\mathbb{N}\}$ 是哈代空间 $H^1(\mathbb{T})$ 和它的共轭空间 BMO($\mathbb{T}$) 的无条件基.

实际上，这个列表不是完全的，真实的序列是很长的，这里示范罗列了几种典型空间的结果，大致表明周期小波级数和周期小波规范正交基在函数、函数空间、算子和分布研究中的独特优越性，即“公共基的角色”，诱导得到普适分析的“万能恒等式”:

$$f=\sum_{m=0}^{\infty}[\![f,\zeta_m]\!]\zeta_m$$

其中，$[\![f,\zeta_m]\!]$ 表示相应函数空间中函数 $f(x)$ 与周期小波规范正交基函数 $\zeta_m(x)$，$m\in\mathbb{N}$ 的“内积”.

下面分别在不同条件下说明和解释这些结果.

首先，若 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$，则如下形式部分和序列 $\{\sigma_n(f)(x); n=1,2,\cdots\}$:

$$\sigma_n(f)(x)=\sum_{m=0}^{n-1}\left\langle f,\zeta_m\right\rangle\zeta_m(x)$$

依 $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ 范数收敛于 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$.

其次，当 $f(x)\in C(\mathbb{T})$ 时，即 $f(x)$ 是周期为 1 的连续函数时，则如下形式部分和序列 $\{\sigma_n(f)(x); n=1,2,\cdots\}$:

$$\sigma_n(f)(x) = \sum_{m=0}^{n-1} [\![f, \zeta_m]\!] \zeta_m(x)$$

在闭区间 $\mathbb{T}=[0,1]$ 上一致地收敛于 $f(x)$. 作为对比，回顾傅里叶级数理论，连续函数的傅里叶级数是没有这个性质的.

若 $f(x)\in\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$，则部分和序列 $\{\sigma_n(f)(x); n=1,2,\cdots\}$ 依 $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ 范数收敛于函数 $f(x)$，这个时候，函数的傅里叶级数还是没有这种性质.

在 $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ $(1<p<\infty)$ 空间中，规范正交函数系 $\{\exp(2k\pi ix); k\in\mathbb{Z}\}$，即傅里叶级数基函数系是这些函数空间的共同 Schauder 基，即函数 $f(x)\in\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ 的傅里叶级数的如下形式的部分和序列 $\{\mathscr{S}_n(f)(x); k=0,1,2,\cdots\}$：

$$\mathscr{S}_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c(k)\exp(2k\pi ix)$$

依 $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ 范数收敛到 $f(x)$. 但是，对于周期小波级数来说，函数 $f(x)$ 的周期小波级数部分和序列 $\{\sigma_n(f)(x); n=1,2,\cdots\}$ 在空间 $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ 中无条件地收敛到 $f(x)$，这个结果显然要好得多.

在函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ 和 Sobolve 空间中，傅里叶级数与周期小波级数表现俱佳，不分伯仲.

存在一种例外情形，即 Wiener 代数. Wiener 代数 $A(\mathbb{T})$ 是 $C(\mathbb{T})$ 的一个子代数，它由傅里叶级数是绝对收敛的函数全体组成. 小波基不是 Wiener 代数的一个 Schauder 基. 在这个空间中，傅里叶级数占优势，小波级数表现不佳.

(γ) 周期小波级数收敛性

回顾 Littlewood-Paley 分析理论以及字典序周期小波规范正交基的构造，大致可以感受到周期小波级数“二进频带局部化”傅里叶级数分析的特点，同时还伴随着具有“多尺度”的特色(“每个尺度吸收有限个频率点”).

这里罗列一些与 Littlewood-Paley 分析理论相关的多分辨率分析结果，这种条件下的周期小波规范正交函数系 $\{\zeta_m(x); m\in\mathbb{N}\}$ 显得比较特殊：可以证明，周期小波 $\zeta_m(x)$ 能够写成有限项三角级数和的如下形式，

$$\zeta_m(x) = \sum_{\ell_m \leqslant |\ell| < L_m} c(\ell)\exp(2\pi i\ell x)$$

其中

$$\frac{m}{3} \leqslant \ell_m < L_m \leqslant \frac{4m}{3}$$

这种特别的表达形式表明，傅里叶级数分析中的“基本单元” $\exp(2\pi i\ell x), \ell\in\mathbb{Z}$，在周期小波级数分析中被重新“分类组织”变成“叠加波” $\zeta_m(x)$，每个“叠加波” $\zeta_m(x)$ 中集中了在对数尺度下频率大致相同的“频率成分”(广义的或者离散的频带).

现在研究周期小波规范正交基构造过程中的“字典序”带给小波级数的特殊性质. 作为示范，研究在整个实数直线上周期为 1 的连续函数的周期小波级数的收敛性.

首先说明，如果 $f(x)\in\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\mathscr{P}_j$，那么，$\|f(x)-\sigma_n(f)(x)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}\to 0\ (n\to+\infty)$，并存在一个常数 γ，使得对任意 $n\in\mathbb{N}$，$\|\sigma_n(f)(x)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}\leqslant\gamma\|f(x)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}$ 成立.

实际上，若 $f(x)\in\mathscr{P}_j$，则只要 $n>2^j$，就有 $f(x)=\sigma_n(f)(x)$.

此外，设 $f(x)$ 是周期为 1 的全体实数轴 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，现在用二型数学归纳法进行验证.

先设 $n=2^j$，这时 $\sigma_n(f)(x)=(\mathbb{E}_jf)(x)$，而算子 $\mathbb{E}_j$ 在 $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ 上是一致有界的：因为在尺度变换之后，$\mathbb{E}_0:\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})\to\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ 是连续线性算子，连续性由 $\mathbb{E}_0$ 的核满足不等式 $|E(x,y)|\leqslant\gamma(1+|x-y|)^{-2},(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 得出保证.

再设 $2^j\leqslant n<2^{j+1}$，定义函数序列 $\{f_n(x);n\in\mathbb{N}\}$：

$$f_n(x)=\sigma_n(f)(x)=(\mathbb{E}_jf)(x)+r_n(x)$$

其中

$$r_n(x)=\sum_{2^j\leqslant k<n}(f,\zeta_k)\zeta_k(x)$$

因为 $\|(\mathbb{E}_jf)(x)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}$ 存在受控界，所以现在研究 $\|r_n\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}$ 的受控上界. 实际上

$$\|r_n\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}\leqslant\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}\left[\sup_{2^j\leqslant k<2^{j+1}}\|\zeta_k\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})}\right]=\left\|\sum_{2^j\leqslant k<2^{j+1}}\left|\zeta_k(x)\right|\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}$$

当 $2^j\leqslant n<2^{j+1}$ 时，成立 $\|\zeta_k(x)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})}\leqslant\vartheta 2^{-j/2}$ 以及

$$\sum_{2^j\leqslant k<2^{j+1}}|\psi_j(x-2^{-j}k)|\leqslant 2^{j/2}\left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\psi(x-k)\right|\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}=2^{j/2}\vartheta$$

综合这一切分析得到 $\|r_n\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}\leqslant\theta\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}$. 从而函数序列 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

因为函数子空间系列 $\{\mathscr{P}_j;j\in\mathbb{Z}\}$ 在 Banach 空间即周期为 1 的连续函数空间

$C(\mathbb{T})$ 中稠密，即 $\overline{\left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\mathscr{P}_j\right)} = C(\mathbb{T})$，前述论证说明，在函数空间 $C(\mathbb{T})$ 的稠密子空间序列 $\{\mathscr{P}_j; j\in\mathbb{Z}\}$ 的并集合 $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\mathscr{P}_j$ 上成立收敛关系：

$$\| f(x)-\sigma_n(f)(x)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}\to 0\quad(n\to+\infty)$$

并存在一个常数 γ，使得对任意 $n\in\mathbb{N}$，$\|\sigma_n(f)(x)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}\leqslant\gamma\|f(x)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}$ 成立. 因此，在整个空间 $C(\mathbb{T})$ 上，对于任意的函数 $f(x)\in C(\mathbb{T})$，成立如下的收敛关性：

$$\| f(x)-\sigma_n(f)(x)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}\to 0\quad(n\to+\infty)$$

当 $0\leqslant k\leqslant r$ 时，对于任意的函数 $f(x)\in C^k(\mathbb{T})$，成立如下的收敛关性：

$$\| f(x)-\sigma_n(f)(x)\|_{C^k(\mathbb{T})}\to 0\quad(n\to+\infty)$$

即周期小波规范正交函数系 $\{\zeta_m(x); m\in\mathbb{N}\}$ 构成 $C^k(\mathbb{T})$ 的一个 Schauder 基，证明方法与前述范例类似，建议读者完成证明.

另外，前述范例已经证明，周期为 1 的连续函数 $f(x)$ 的周期小波级数一致收敛到 $f(x)$，作为这个结果的一个推论，容易证明，当 $f(x)\in\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ 时，$f(x)$ 的周期小波级数部分和 $\{\sigma_n(f)(x); n=1,2,\cdots\}$ 按照 $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ 范数收敛到函数 $f(x)$.

事实上，这里只需要证明一致控制关系 $\|\sigma_n(f)(x)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})}\leqslant\gamma\|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})}$，其中 γ 是某个正的有限实数，$n=1,2,\cdots$.

回顾前述示范分析得到的控制关系 $\|\sigma_n(f)(x)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}\leqslant\gamma\|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})}$，根据如下表述：

$$\|\sigma_n(f)(x)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})}=\sup\{|\langle\sigma_n(f)(x),g\rangle|;\|g\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}\leqslant 1\}$$

其中，额外要求 $g(x)$ 是周期为 1 的连续函数，利用共轭关系 $\langle\sigma_n(f),g\rangle=\langle f,\sigma_n(g)\rangle$ 中的内积被上界 $\gamma\|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})}$ 控制，从而最终得到不等式：

$$\|\sigma_n(f)(x)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})}\leqslant\gamma\|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})}$$

顺便地，利用这里的结果可以容易地证明某些分布不是 Radon 测度. 因为，如果 μ 是一个 Radon 测度，那么，它的周期小波级数的部分和 $\{\sigma_n(\mu); n=1,2,\cdots\}$ 构成 $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ 中函数的一个有界序列，并且按照拓扑 $\sigma(M(\mathbb{T}),C(\mathbb{T}))$，这个有界序列收敛于测度 μ. 从这点出发，要证明某些分布 S 不是 Radon 测度，那么，只需要证明它满足 $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\sigma_n(S)\|=+\infty$ 即可.

需要特别注意，周期小波级数中级数项的顺序对刚才得到的这些结果起着基本的作用. 因为函数空间 $C(\mathbb{T})$ 与 $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ 没有无条件基，因此不能期望在扰乱级数各项的顺序之后，“万能恒等式”中的周期小波级数仍然收敛而且收敛到原来的函数.

当 $1 < p < \infty$ 时，函数空间 $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ 中周期小波级数的收敛性与前述这些情形完全不同，在这种情况下，实际上可以得到如下的更精确的刻画：在 $1 < p < \infty$ 的条件下，函数空间 $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ 中周期小波级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \zeta_k$ 收敛的条件是

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta_k \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$$

当且仅当

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 |\zeta_k(x)|^2\right]^{0.5} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$$

这个结果表明，在空间 $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ 中，周期小波级数的收敛性仅仅依赖于级数系数序列 $\{\alpha_k; k \in \mathbb{N}\}$ 的模序列 $\{|\alpha_k|; k \in \mathbb{N}\}$. 因此，在这个空间 $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ 中周期小波级数的收敛性具有一定意义的单调性：即如果某个系数序列 $\{\alpha_k; k \in \mathbb{N}\}$ 保证对应的周期小波级数收敛，那么只要满足关系 $|\beta_k| \leqslant |\alpha_k|, k \in \mathbb{N}$，系数序列 $\{\beta_k; k \in \mathbb{N}\}$ 对应的周期小波级数必然收敛.

另外，在 Hölder 空间 $C^\alpha(\mathbb{T})$ 中，周期小波级数的收敛性具有非常明显的刻画，即周期小波级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta_k(x) = f(x)$$

收敛到一个具有指数 $s > 0$ 的 Hölder 函数 $f(x)$，当且仅当 $\alpha_k = O(k^{-0.5-s})$. 这里必须假设 $0 < s < r$，其中 r 是多分辨率分析正则性的阶数；当 $s = 1$ 时，必须用 Zygmund类代替 $C^1(\mathbb{T})$，当 $s = 2$ 时，需要用Zygmund类中函数的周期为 1 的原函数代替 $C^2(\mathbb{T})$，如此等等.

在傅里叶级数理论中，没有与此类似的结果，除非是缺项的傅里叶级数，以保证其局部的和整体的性质都可以根据级数系数数值大小的阶进行直接判定.

8.4.3　周期小波级数与傅里叶级数

这里将要更深入地比较小波级数与缺项的傅里叶级数，为此先介绍一些必要的预备知识.

(α) 傅里叶级数与分形函数

Riesz 曾经建立了一种通用的方法，以便构造像魏尔斯特拉斯函数那样的处处连续但无处可导的函数，这是一种分形函数. 实际上，如果序列 $\{\alpha_k; k\in\mathbb{N}\}$ 是绝对可和的，即 $\sum_{k=0}^{+\infty}|\alpha_k|<\infty$，而非负序列 $\{\lambda_k; k\in\mathbb{N}\}$ 满足 $\lambda_{k+1}\geqslant q^\lambda k,\ k\in\mathbb{N}$，其中 $q>1$ 和 $\lambda>0$ 是固定常数，当 $\{\alpha_k\lambda_k; k\in\mathbb{N}\}$ 不趋于零即 $\alpha_k\lambda_k \nrightarrow 0$ 时，那么傅里叶级数：

$$\xi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\cos\lambda_k x$$

收敛而且函数 $\xi(x)$ 在整个实数轴上连续但无处可导.

简单说明这个结果的证明思路. 定义一个函数 $\psi\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$，要求它的傅里叶变换 $(\mathscr{F}\psi)(\omega)\in C^4(\mathbb{R})$，$(\mathscr{F}\psi)(1)=1$，而且当 $\omega\notin[q^{-1},q]$ 时 $(\mathscr{F}\psi)(\omega)\equiv 0$. 这样的函数 $\psi(x)$ 是连续的，而且，在无穷远处是 $O(|x|^{-4})$.

反证法. 假设函数 $\xi(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k\cos\lambda_k x$ 在某点 x_0 可导，用两种不同的方法估计计算积分：

$$\Xi_k=\int_{-\infty}^{\infty}\xi(x)\psi(\lambda_k(x-x_0))dx$$

首先，用 $\xi(x)-\xi(x_0)-\xi'(x_0)(x-x_0)=O(x-x_0)$ 代替函数 $\xi(x)$，Ξ_k 不会改变. 如果 $\xi(x)$ 在 x_0 处可导，那么 $\Xi_k=O(\lambda_k^{-2})$. 其次，直接计算得 $\Xi_k=0.5\alpha_k\lambda_k^{-1}e^{i\lambda_k x_0}$，并改写为 $\Xi_k=0.5(\alpha_k\lambda_k)\lambda_k^{-2}e^{i\lambda_k x_0}$. 这样，$\Xi_k=O(\lambda_k^{-2})$ 必然导致 $\alpha_k\lambda_k\to 0$，即函数 $\xi(x)$ 在 x_0 处可导的假设必将导致乘积 $\alpha_k\lambda_k\to 0$. 这是一个矛盾.

在这个证明过程中，已经发现小波方法的萌芽. 函数 $\lambda_k^{0.5}\psi(\lambda_k(x-x_0))$ 很像现在的小波，它具有类似的正则性、局部性及消失矩特性等性质.

显然，如果构造的傅里叶级数不是“缺项的”，那么，这个证明方法就发挥不了作用. 但是这种类似“小波的”证明思想却可以被继承下来.

(β) 周期小波级数与分形函数

这里以周期小波级数为例进行说明，即总是按照形如 $\sum_{m=0}^{+\infty}\alpha_m\zeta_m(x)$ 的周期小波级数展开讨论.

回顾构造周期小波规范正交基 $\{\zeta_m(x);m=0,1,2,\cdots\}$ 的字典序排列方法，若 $m\neq 0$，将它表示为 $m=2^j+k, j\in\mathbb{N}, 0\leqslant k<2^j$．令 $\mathbb{I}_m=[k2^{-j},(k+1)2^{-j})$，而且，记号 $q\mathbb{I}_m$ 表示与 $\mathbb{I}_m$ 有相同的中心但长度为 $q2^{-j}$ 的区间.

可以证明，如果周期小波级数 $\xi(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\alpha_m\zeta_m(x)$ 的和函数 $\xi(x)$ 在整个实直线上连续并且在某点 x_0 处可导，那么，对任意固定的 $q\geqslant 1$，只要整数序列 m 趋于无穷大，并且 $x_0\in q\mathbb{I}_m$，就成立关系 $\alpha_m=O(m^{-1.5})$.

实际上，根据周期小波级数系数的如下计算公式:

$$\alpha_m=\int_0^1\xi(x)\overline{\zeta}_m(x)dx$$

完全重复上述 Riesz 方法的证明过程即可得到关系 $\alpha_m=O(m^{-1.5})$.

由此可以得到一个非常重要的结果，即如果 $\{\alpha_m;m=0,1,2,\cdots\}$ 是实数或者复数序列，对于有限实数常数 $C_2\geqslant C_1>0$，满足

$$C_1m^{-\frac{3}{2}}\leqslant|\alpha_m|\leqslant C_2m^{-\frac{3}{2}},\quad m=1,2,\cdots$$

则周期小波级数 $\xi(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\alpha_m\zeta_m(x)$ 收敛，而且其和函数 $\xi(x)$ 属于 Zygmund 类 Λ_*，特别地，和函数 $\xi(x)$ 属于所有 $0<\alpha<1$ 的 Hölder 空间 $C^\alpha(\mathbb{T})$，但 $\xi(x)$ 无处可导.

容易验证历史上一些著名的类似于魏尔斯特拉斯级数构造处处连续而无处可导函数的方法构造结果的真实性. 它们常常以上述结果的推论形式出现.

(γ) 满项小波级数与缺项傅里叶级数

参考由 Littlewood-Paley 理论出发构造的 Littlewood-Paley 多分辨率分析，前面已经仔细讨论过的 Meyer 多分辨率分析是其特例，假设由此构造得到的正交小波是 $\psi(x)$，那么，直接计算可得

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi(x-k)=-\sqrt{2}\cos 2\pi x$$

现在研究如下形式的周期小波级数:

$$\xi(x)=\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{0\leqslant k<2^j}\alpha_{j,k}\psi_j(x-2^{-j}k)$$

其中假设 $\alpha_{j,k}=\alpha_j$ 与 k 无关，则

$$\xi(x) = -\sqrt{2}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j/2}\alpha_j \cos 2^{j+1}\pi x$$

这样，“缺项的”傅里叶级数再次出现.

由此可知：小波系数的模规则地趋于零的小波级数，表现为特殊的“缺项”傅里叶级数.

另外，研究高木贞治(Takagi, 1901)在 1901 年建立的不可导连续函数.

在实数轴 $\mathbb{R}$ 上定义一个周期为 1 的连续函数 $\Delta(x)$：

$$\Delta(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x < 0.5 \\ 2-2x, & 0.5 \leqslant x \leqslant 1.0 \end{cases}$$

高木贞治的函数 $\mathscr{G}(x)$ 被定义为如下的级数:

$$\mathscr{G}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\Delta(2^{j-1}x)$$

为了表达高木贞治的函数 $\mathscr{G}(x)$，构造一个分段线性的样条小波 $\psi(x)$，这个样条小波的傅里叶变换 $(\mathscr{F}\psi)(\omega)$ 表示为

$$(\mathscr{F}\psi)(\omega) = \sqrt{3}e^{-0.5i\omega}\sin^2(0.25\omega)(3-2\sin^2(0.5\omega))^{-0.5}$$
$$\times\left(\frac{\sin(0.25\omega)}{0.25\omega}\right)^2\left(\frac{3-2\cos^2(0.25\omega)}{3-2\sin^2(0.25\omega)}\right)^{0.5}$$

可以证明，这个小波函数 $\psi(x)$ 满足如下等式:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi(x-k) = \sqrt{3}(1-2\mathscr{G}(x))$$

这样，高木贞治的函数 $\mathscr{G}(x)$ 具有如下表达形式:

$$\mathscr{G}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-j}\psi(2^j x - k)$$

事实上，因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}x\psi(x)dx = 0$$

即这个正交小波对应的多分辨率分析的正则性阶数 $r=1$. 这样，利用前述结果直接推论即可得知，高木贞治函数或者 Takagi 函数 $\mathscr{G}(x)$ 是处处连续但无处可导的.

高木贞治函数 $\mathscr{G}(x)$ 具有十分重要的结构. 考虑实数平面 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的两个如下定义的仿射变换:

$$A(x,y)=\left(\frac{x}{2},\frac{x+y}{2}\right)$$

而且

$$B(x,y)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2},\frac{y-x}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

对于非负整数序列 $m_j\in\mathbb{N},n_j\in\mathbb{N},1\leqslant j\leqslant q$，按照如下“连乘积的方式”定义“多重仿射变换”：

$$A^{m_1}B^{n_1}\cdots A^{m_q}B^{n_q}$$

把这样定义的多重仿射变换 $A^{m_1}B^{n_1}\cdots A^{m_q}B^{n_q}$ 作用到平面原点 $(0,0)$ 上，那么，重复这样的作用过程所得集合的闭包正好就是高木贞治函数 $\mathscr{G}(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的图形 $\mathscr{G}(x)$.

可以验证，高木贞治函数 $\mathscr{G}(x)$ 属于 $0<\alpha<1$ 时的 Hölder 函数空间 C^{α}，但它不属于 Zygmund 类.

注意到 $\mathscr{G}(\pm 2^{-j})\geqslant j\times 2^{-j}$，那么，如下形式的不等式:

$$|\mathscr{G}(2^{-j})+\mathscr{G}(-2^{-j})-2\mathscr{G}(0)|\leqslant\gamma 2^{-j}$$

就不可能成立，于是，函数 $\mathscr{G}(x)$ 不属于 Zygmund 类. 高木贞治函数 $\mathscr{G}(x)$ 这个实例表明，当 $\alpha=r$ 时(其中 r 是多分辨率分析的正则性阶数)，正如前述结果所表述的那样，关于 Hölder 函数空间的刻画需要进行例外解释.

利用前述预备结果，还可以得到一个比较意外的推论，即：在 Zygmund 类中存在由无处可微函数构成的稠密开集.

事实上，引入函数集合符号 Ω_{ε}:

$$\Omega_{\varepsilon}=\left\{\xi(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\alpha_m\zeta_m(x);|\alpha_m|\geqslant\varepsilon m^{-\frac{3}{2}},m=1,2,\cdots,\alpha_m=O(m^{-\frac{3}{2}})\right\},\quad \varepsilon>0$$

如果 $\xi(x),\in\Omega_{\varepsilon}$，那么，显然 $\xi(x)\in\Lambda_*$ 并且 $\xi(x)$ 是无处可微的.

另外，按照上述这些函数集合的并集形式定义函数集合 Ω:

$$\Omega=\bigcup_{\varepsilon>0}^{\Omega_{\varepsilon}}$$

那么，Ω 是 Zygmund 类 Λ_* 中的一个开集. 事实上，如果假设

$$\xi(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\alpha_m\zeta_m(x),\quad \varsigma(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\chi_m\zeta_m(x)$$

那么当$\xi(x)\in\Omega_\varepsilon$而且$\|\xi(x)-\varsigma(x)\|_{\Lambda_*}\leqslant\delta$(按照$\Lambda_*$模)时，必然得到不等式:

$$|\alpha_m-\chi_m|\leqslant\gamma\delta m^{-\frac{3}{2}}$$

显然让$\delta>0$充分小必然可以保证$\gamma\delta<\varepsilon/2$，这样得到$\varsigma(x)\in\Omega_{\varepsilon/2}$. 由此说明$\Omega_\varepsilon$是开集，从而$\Omega$也必然是开集.

现在说明这个开集Ω在Λ_*中稠密. 事实上，如果$\kappa(x)=\sum\kappa_m\zeta_m(x)\in\Lambda_*$，则对任意$m\geqslant1$和某个常数$\gamma$，有$|\kappa_m|\leqslant\gamma m^{-\frac{3}{2}}$，对任意$\varepsilon>0$，对周期小波级数的系数序列$\{\kappa_m;m=1,2,\cdots\}$进行“阈值化”处理：当$|\kappa_m|\geqslant\varepsilon m^{-\frac{3}{2}}$时，保持$\kappa_m$的数值不变；当$|\kappa_m|<\varepsilon m^{-\frac{3}{2}}$时，将$\kappa_m$的数值修改为$\varepsilon m^{-1.5}$. 这样将序列$\{\kappa_m;m=1,2,\cdots\}$转换为数列$\{\lambda_m;m=1,2,\cdots\}$，按照周期小波级数形式构造函数$\lambda(x)=\sum\lambda_m\zeta_m(x)$，那么，$\lambda(x)\in\Omega_\varepsilon$，而且，$\|\kappa(x)-\lambda(x)\|_{\Lambda_*}<\gamma\varepsilon$，即开集$\Omega$在$\Lambda_*$中稠密.

(δ)　“缺项的”与“满项的”级数

这里用特殊实例说明缺项的和满项的小波级数与满项傅里叶级数的对比.

对$0<\alpha<1$，研究函数$|\sin\pi x|^{-\alpha}$，它的周期是1，其傅里叶级数的系数序列$c(k)$有渐近展开$c(k)=\lambda(\alpha)|k|^{-1+\alpha}+O(k^{-3+\alpha})$. 常数$\lambda(\alpha)$不为零，因而函数$|\sin\pi x|^{-\alpha}$在0点的奇异性必将影响它的所有傅里叶级数系数$c(k)$.

但是，显然只有周期小波规范正交基函数$\zeta_m(x)$的有效局部化支撑区间$\mathbb{I}_m$包含或者非常接近奇异点，对应的周期小波级数系数才会显著不为零，除此这些少数系数之外，这个函数的其他小波系数几乎不受$|\sin\pi x|^{-\alpha}$的奇异性影响.

具体地，如果将$|\sin\pi x|^{-\alpha}$写成如下的周期小波级数:

$$|\sin\pi x|^{-\alpha}=\sum_{m=0}^{+\infty}\alpha_m\zeta_m(x)$$

那么，当$2^j\leqslant m<2^{j+1},\ell=\inf(m-2^j,2^{j+1}-m)$时，对所有整数$N\geqslant1$，比存在有限正实数$C_N$，成立不等式:

$$|\alpha_m|\leqslant C_N2^{j(\alpha-0.5)}(1+\ell)^{-N}$$

这里周期小波规范正交基$\{\zeta_m(x);m=0,1,2,\cdots\}$是从 Littlewood-Paley 多分辨率分析构造的正交小波周期化产生的.

显然，函数$|\sin\pi x|^{-\alpha}$的周期小波级数的系数序列大量系数为零或者非常接近零，即$|\sin\pi x|^{-\alpha}$的周期小波级数是一个“缺项的”或者“多洞的”的小波级数.

循此启发研究更一般的“缺项的”小波级数:

$$\xi(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\zeta_{2^j}(x)$$

其中 $\{\zeta_m(x);m=0,1,2,\cdots\}$ 是周期小波规范正交基. 设 $\alpha_j=O(2^{j(\alpha-0.5)})$，则这个小波级数收敛而且和函数 $\xi(x)$ 是周期为 1 的函数, 除了在点 $0,\pm1,\pm2,\cdots$ 外, $\xi(x)$ 是无穷次可微的. 它的奇异性与 $|\sin\pi x|^{-\alpha}$ 是相同类型的, 即成立如下同阶估计关系:

$$\xi(x)=O(|\sin\pi x|^{-\alpha}),\quad \xi'(x)=O(|\sin\pi x|^{-\alpha-1}),\cdots$$

反过来, “满项的”小波级数与“缺项的”傅里叶级数有关.

在这里假设系数序列 $\{\alpha_m;m=0,1,2,\cdots\}$ 的模是单调下降, 研究如下形式的周期小波级数:

$$\xi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m\zeta_m(x)$$

这里为了讨论方便, 直接不加证明地引用如下重要定理.

设 $\{|\alpha_m|;m=0,1,2,\cdots\}$ 是单调下降的, 那么, 当 $\sum_{m=0}^{+\infty}|\alpha_m|^2=\infty$ 时,

$$\xi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m\zeta_m(x)$$

永远不是有界 Radon 测度的小波级数. 这些级数定义了所有的真正的分布.

反之, 若 $\sum_{m=0}^{+\infty}|\alpha_m|^2<\infty$，则如下的周期小波级数

$$\xi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m\zeta_m(x)$$

全都收敛, 和函数 $\xi(x)$ 属于所有的 $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$，而且, $\xi(x)$ 属于 $\mathrm{BMO}(\mathbb{T})$.

实际上, 可以顺便指出: 若 $p\geqslant q$，则 $\mathcal{L}^q(\mathbb{T})\supset\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$，并且 $\mathrm{BMO}(\mathbb{T})$ 包含在所有的 $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ 中.

这里进行如下补充说明.

研究如下形式的傅里叶级数:

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty}(\alpha_k\cos\lambda_k x+b_k\sin\lambda_k x)$$

这是一个 Hadamard 意义下的缺项傅里叶级数, 即其中的参数满足: $\lambda_0>0$，对某个 $q>1$, $\lambda_{k+1}\geqslant q\lambda_k$, 成立如下结果:

若$\sum[|a_k|^2+|b_k|^2]<\infty$，则$f(x)$属于$\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$，甚至属于BMO.

若$\sum[|a_k|^2+|b_k|^2]=\infty$，则$f(x)$一定是一个真正的分布，即$f(x)$不是一个Radon测度.

比如，在Kahane(1968)的随机傅里叶级数研究中出现的0-1法则，完全类似地几乎得到了所谓的“端点”空间，即BMO空间，但确实没有最终给出. 然而，如果符号“±”的分布是独立的等分布的Bernoulli变量，那么，当出现

$$\sum[|a_k|^2+|b_k|^2]=\infty$$

时，随机改变符号的级数

$$f(\omega,x)=\sum_{k=0}^{\infty}(\pm a_k\cos kx\pm b_k\sin kx)$$

几乎一定地定义了一个真正的分布，即它不是一个Radon测度；反之，当出现:

$$\sum[|a_k|^2+|b_k|^2]<\infty$$

时，随机改变符号的级数

$$f(\omega,x)=\sum_{k=0}^{\infty}(\pm a_k\cos kx\pm b_k\sin kx)$$

收敛，而且，和函数$f(\omega,x)$属于所有的$\mathcal{L}^p$空间.

为了与小波级数进行对比，设$m=2^j+k$，$0\leqslant k<2^j$，按照周期小波规范正交基的字典序排列方法，$\zeta_m(x)=\psi_j(x-2^{-j}k)$，$\alpha_m=c(j,k)$，而且

$$\mathbb{I}(j,k)=[2^{-j}k,2^{-j}(k+1))$$

利用这些符号，将“Carleson条件”描述为: 存在常数γ，使得对任意二进区间$\mathbb{I}\subset[0,1)$，有

$$\sum_{\mathbb{I}(j,k)\subset\mathbb{I}}|c(j,k)|^2\leqslant\gamma|\mathbb{I}|$$

为了验证这个结果，从$|\alpha_m|$的下降性质可以得到

$$|c(j,k)|\leqslant|c(j,0)|=\omega_j,\quad 0\leqslant k<2^j$$

此外，可以把$\sum|\alpha_m|^2<\infty$改写成$\sum 2^j\omega_j^2<\infty$.

在验证过程中，首先，按照$2^{-j}\leqslant|\mathbb{I}|$的要求固定不等式中的求和指标$j$，在求和过程中，这时$k$出现的次数恰恰是$2^j|\mathbb{I}|$. 因此要计算的部分和就被$2^j|\mathbb{I}|\omega_j^2$上界控制；其次，再对指标$j$求和就可以完成验证.

现在设 $\sum_{m=0}^{+\infty}|\alpha_m|^2=\infty$，考虑部分和

$$\mathfrak{f}_m(x)=\alpha_0+\cdots+\alpha_m\zeta_m(x)$$

这时候，为了证明 $f(x)$ 不是一个有界的 Radon 测度，只需要证明部分和序列的模 $\|\mathfrak{f}_m(x)\|_{\mathcal{L}^1}$ 趋于无穷，实际上，可以证明：存在常数 $c>0$，使得

$$c\sum_{q=0}^{\infty}|\alpha_q|^2\leqslant\|\mathfrak{f}_m(x)\|_{\mathcal{L}^1}^2$$

事实上，因为

$$\|\mathfrak{f}_m\|_{\mathcal{L}^4}^2\leqslant C\|\mathfrak{f}_m\|_{\mathrm{BMO}}^2\leqslant C'\sum_{q=0}^{m}|\alpha_q|^2$$

结合 Hölder 不等式得到

$$\|\mathfrak{f}_m\|_{\mathcal{L}^1}^2\geqslant[\|\mathfrak{f}_m\|_{\mathcal{L}^2}^3\|\mathfrak{f}_m\|_{\mathcal{L}^4}^{-2}]^2\geqslant C\sum_{q=0}^{\infty}|\alpha_q|^2$$

从而完成验证过程.

上述这些关于周期小波级数与傅里叶级数的对比，不是一个完整的对比，这里主要是通过一些典型的实例了解这两种级数分析方法各自的优劣.

此外，周期小波的研究和构造方法已经取得了丰富的成果，在应用研究中也取得了重要的成果，而且，周期小波的构造方法很容易扩展到二维和更高维度的情形，当然即使只使用张量积方法，涉及的符号和表述也会越来越复杂. 感兴趣的读者可以通过参考文献迈耶(1992)，迈耶和科伊夫曼(1994)，彭思龙等(2003)，Meyer(1990)，Meyer 和 Coifman(1991a, 1991b)，Zygmand(1959)等进行深入了解.

参 考 文 献

大卫·马尔. 1988. 视觉计算理论. 姚国正，刘磊，汪云九，译. 北京：科学出版社

迈耶 Y. 1992. 小波与算子(第一卷). 尤众，译. 北京：世界图书出版公司

迈耶 Y，科伊夫曼 R. 1994. 小波与算子(第二卷和第三卷). 王耀东，译. 北京：世界图书出版公司

彭思龙，李登峰，谌秋辉. 2003. 周期小波理论及其应用. 北京：科学出版社

冉启文. 1995. 小波分析方法及其应用. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社

冉启文. 2001. 小波变换与分数傅里叶变换理论及应用. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社

冉启文，谭立英. 2002. 小波分析与分数傅里叶变换及应用. 北京：国防工业出版社

王建中. 1992. 小波理论及其在物理和工程中的应用. 数学进展, 21(3): 290-310

姚国正，汪云九. 1984. D. Marr 及其视觉计算理论. 机器人, 6: 57-59

Campbell F. 1990. Probing the human visual system: A commentary on application of Fourier analysis to the visibility of gratings. Current Contents/Life Sciences, 45: 16

Campbell F, Robson J. 1968. Application of Fourier analysis to the visibility of gratings. The

Journal of Physiology, 197(3): 551-566

Cetin A E, Ansari R. 1994. Signal recovery from wavelet transform maxima. IEEE Transactions on Signal Processing, 42(1): 194-196

Daubechies I. 1988. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Communications on Pure and Applied Mathematics, 41(7): 909-996

Kahane J P. 1968. Some random series of functions. Massachusetts: D.C. Heath and Company

Mallat S G. 1988. Multiresolution representations and wavelets. Philadelphia, Ph. D. thesis, University of Pennsylvania

Mallat S G. 1989a. Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 37(12): 2091-2110

Mallat S G. 1989b. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11(7): 674-693

Mallat S G. 1991. Zero-crossings of a wavelet transform. IEEE Transactions on Information Theory, 37(4): 1019-1033

Mallat S G, Hwang W L. 1992. Singularity detection and processing with wavelets. IEEE Transactions on Information Theory, 38(2): 617-643

Mallat S G, Zhong S. 1991. Wavelet transform maxima and multiscale edges// Ruskai M B, et al., eds. Wavelets and their Applications. Boston: Jones and Bartlett: 67-104

Mallat S G, Zhong S. 1992. Characterization of signals from multiscale edges. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 14(7): 710-732

Marr D. 1982. Vision: A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information. New York: Freeman and Company

Marr D, Hildreth E. 1980. Theory of edge detection. Proceedings of the Royal Society of London, Series B, Biological Sciences, 207(1167): 187-217

Meyer Y. 1990. Ondelettes et Operateurs, Vol.1. Paris: Hermann

Meyer Y, Coifman R. 1991a. Ondelettes et Operateurs, Vol.2. Paris: Hermann

Meyer Y, Coifman R. 1991b. Ondelettes et Operateurs, Vol.3. Paris: Hermann

Nishihara H K. 1981. Intensity, visible-surface, and volumetric representations. Artificial Intelligence, 17(1): 265-284

Percival D B, Walden A T. 2000. Wavelet Methods for Time Series Analysis. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge, England: Cambridge University Press

Takagi T. 1901. A simple example of the continuous function without derivative. Tokyo Sugaku-Butsurigakukwai Kiji-Gaiyo, 1(17): 176-177

Takagi T. 1903. A simple example of the continuous function without derivative. Proceedings of the Physics and Mathematics of Japan, 1(17): 176-177

Wilson H R. 1980. Spatiotemporal characterization of a transient mechanism in the human visual system. Vision Research, 20(5): 443-452

Wilson H R, Bergen J R. 1979. A four mechanism model for threshold spatial vision. Vision Research, 19(1): 19-32

Wilson H R, Giese S C. 1977. Threshold visibility of frequency gradient patterns. Vision Research, 17(10): 1177-1190

Zhong S. 1990. Edges representation from wavelet transform maxima. Ph. D. thesis, New York University

Zygmund A. 1959. Trigonometric Series. Cambridge: Cambridge University Press

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝ａ
ＳＳ号＝１４６４１２５１